Vorlesung

Lineare Funktionalanalysis

Sommersemester 2021

Prof. Dr. Tobias Weth
Dr. Nils Ackermann
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt

Stand 11. März 2022

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Schwerpunkt der Vorlesung ist die systematische Untersuchung unendlich-dimensionaler normierter Räume und der stetigen linearen Abbildungen zwischen diesen Räumen. Die hierbei entwickelte Theorie ist Grundvoraussetzung für die Behandlung wichtiger Problemstellungen u.a. im Bereich der partiellen Differentialgleichungen, der mathematischen Physik, der Numerik und der Stochastik. Ein wesentliches Merkmal der Funktionalanalysis ist das fruchtbare Zusammenspiel analytischer und linear algebraischer Zusammenhänge. Eine Ausgangsfrage der linearen Algebra ist die Frage der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme der Form

$$Tx = b.$$

Hier und im Folgenden seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Ferner sei eine Matrix $T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gegeben. Die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{K}^n$ ist gesucht. Lösbar ist dieses Gleichungssystem genau dann, wenn b im Erzeugnis der Spalten von T liegt; dies ist leicht zu entscheiden. Im Falle der Lösbarkeit kann man den affinen Lösungsraum dann als Summe einer speziellen Lösung und des Kerns von T schreiben, wobei man diesen Kern ebenfalls leicht durch Zeilenumformungen von T bestimmen kann. In der Funktionalanalysis betrachtet man u.a. ähnlich aussehende Probleme der Form

$$Tu = f. \tag{1.1}$$

Hierbei ist $f \in F$ gegeben und $u \in E$ gesucht, wobei nun E und F unendlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ seien und eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $T\colon E \to F$ gegeben ist. In Anwendungen sind dabei u und f oft Funktionen, d.h. Elemente von Funktionenräumen. Wir werden sehen, dass wir zur strukturellen Untersuchung solcher unendlich-dimensionalen Probleme analytische Eigenschaften ins Spiel bringen müssen. Insbesondere werden wir voraussetzen, dass E und F normierte Vektorräume sind und T stetig ist.

Einfaches Beispiel Wir betrachten die Ruhelage einer eingespannten Saite, deren Auslenkung in vertikaler Richtung durch den Graph einer Funktion $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ beschrieben sei. Auf diese Saite möge nun die vertikale Kraft $f(x)$ am Punkt $x \in [0,1]$ wirken. Im Falle der Gewichtskraft wäre dies z.B. $f(x) = -c$ für $x \in [0,1]$, wobei c als Produkt der Massendichte der Saite und der Schwerebeschleunigung $g = 9,81 m/s^2$ gegeben ist. Die Form der Saite wird dann (bis auf eine Konstante) durch die Gleichungen

$$-u''(x) = f(x) \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{1.2}$$

beschrieben. Diese Gleichungen in den unendlich vielen Punkten x kann man zusammenfassend in der Form (1.1) schreiben, wenn man z.B. die Vektorräume

$$E \coloneqq \{u \in C^2([0,1],\mathbb{K}) \mid u(0) = u(1) = 0\}, \qquad F \coloneqq C([0,1],\mathbb{K})$$

und die lineare Abbildung $T\colon E \to F$, $Tu = -u''$ betrachtet. Glücklicherweise ist in diesem Fall das Problem eindeutig lösbar, und die Lösung ist gegeben durch

$$u \coloneqq T^{-1}f \qquad \text{d.h.} \quad u(x) = (T^{-1}f)(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für } y \in [0,1]$$

mit der Greenfunktion

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & x \le y; \\ (1-x)y, & x > y. \end{cases}$$

Man beachte, dass $T^{-1}\colon F \to E$ ein sogenannter Integraloperator ist, den man als Matrix mit durch $x, y \in [0,1]$ indizierten Einträgen betrachten kann. Damit wäre das einfache Problem (1.2) bereits gelöst. Allerdings schließen sich z.B. folgende wichtige Fragen an, auf welche die Funktionalanalysis Antworten geben kann:

- Welche Funktionenräume muss man betrachten, wenn man unstetige vertikale Kräfte f zulassen möchte?
- Wie sieht die Lösungsmenge des (ähnlich aussehenden) linearen speziellen Problems von Sturm-Liouville

  $$-(pu')' + qu = f \qquad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{1.3}$$

  mit gegebenen Funktionen $p \in C^1([0,1])$, $q \in C([0,1])$ aus? Hier ist $T\colon E \to F$ also gegeben durch $Tu = -(pu')' + qu$.
- Gibt es Eigenfunktionen für die Probleme (1.2) und (1.3), d.h. Funktionen $u \in E \subseteq F$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Tu = \lambda u$? Wie sieht die Menge der zugehörigen Eigenwerte aus?
- Wie behandelt man eine mehrdimensionale Version des Problems (Eingespannte Membran im vertikalen Kraftfeld)?

Wir werden auf Probleme der Form (1.1) in systematischer Weise zurückkommen. Zuvor müssen wir aber grundlegende Eigenschaften von unendlich-dimensionalen normierten Räumen und stetigen linearen Abbildungen verstehen.

2. Normtopologien

2.1. Normierte Räume und Prähilberträume

Bezeichnungen: Stets seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

2.1 Definition. (a) Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm* auf E, falls für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (*Homogenität*)

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*).

Es folgt dann: $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E\| \overset{(N1)}{=} |0_{\mathbb{K}}|\|0_E\| = 0$ und damit $0 = \|x + (-x)\| \overset{(N2)}{\leq} \|x\| + \|-x\| \overset{(N1)}{=} 2\|x\|$, also

(N3) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in E$ (*Positivität*).

(b) Eine Halbnorm $\|\cdot\|$ auf E heißt *Norm*, falls zusätzlich für alle $x \in E$ gilt:

(N4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (*Definitheit*).

In diesem Fall heißt das Paar $(E, \|\cdot\|)$ *normierter Raum*.

2.2 Definition. Zwei Halbnormen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf E heißen *äquivalent*, falls $a, b > 0$ existieren mit

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \quad \text{für alle } x \in E.$$

Wir schreiben dann: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. Die Relation „$\sim$“ definiert Äquivalenzrelationen auf der Menge der Halbnormen und auf der Menge der Normen auf E.

2.3 Bemerkung und Beispiel. (a) $\dim E < \infty \Rightarrow$ Alle Normen auf E sind äquivalent.

(b) $E = \mathbb{K}^N$. Für $x \in \mathbb{K}^N$ und $p \in [1, \infty]$ sei

$$|x|_p := \begin{cases} (|x_1|^p + \ldots + |x_N|^p)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Bekannt aus der Analysis II: $|\cdot|_p\colon E \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf E. Dabei gilt die Höldersche Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq |x|_p \, |y|_{p'} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K}^N \text{ mit } \quad p' := \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{falls } 1 < p < \infty, \\ \infty, & \text{falls } p = 1, \\ 1, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Hier heißt p' der zu p *konjugierte Exponent*. Beachte: $p, q \in (1, \infty)$ sind konjugiert g.d.w. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt.

(c) Sei M eine beliebige Menge, und sei $\ell^\infty(M, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen $u\colon M \to \mathbb{K}$ mit punktweisen linearen Operationen. Dann ist $\ell^\infty(M, \mathbb{K})$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der *Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|u\|_\infty := \sup_{z \in M} |u(z)|$. Der Beweis der Normeigenschaften ist sehr einfach. Ist $M = \mathbb{N}$, so notiert man die Funktionswerte von $u \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ als Folge, d.h. man schreibt $u = (u_k)_k$ mit $u_k = u(k)$. Dann ist $\|u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|$. Kurzschreibweisen: $\ell^\infty(M)$ statt $\ell^\infty(M, \mathbb{K})$ und ℓ^∞ statt $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Wir wollen im Folgenden weitere unendlich-dimensionale normierte Räume durch ein allgemeines Prinzip konstruieren. Dieses Prinzip liefert auch einen (alternativen) Beweis der Halbnormeigenschaften von $|\cdot|_p$ aus Bemerkung und Beispiel 2.3(b).

2.4 Definition. (a) Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt

- *konvex*, wenn für alle $x, y \in A$, $\lambda \in [0, 1]$ gilt: $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$;
- *symmetrisch*, wenn gilt: $\theta A = A$ für alle $\theta \in \mathbb{K}$ mit $|\theta| = 1$;
- *absolut konvex*, wenn A konvex und symmetrisch ist;
- *absorbierend*, wenn für jedes $x \in E$ ein $s > 0$ existiert mit $sx \in A$.

(b) Eine auf einer konvexen Teilmenge $A \subseteq E$ definierte Funktion

$$f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt *konvex*, wenn $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ für alle $x, y \in A$, $\lambda \in [0, 1]$, gilt. Ist A absolut konvex, so heißt f *absolut konvex*, wenn f konvex und gerade ist. Dabei heißt f *gerade*, wenn $f(\theta x) = f(x)$ für alle $x \in A$ und $\theta \in \mathbb{K}$ mit $|\theta| = 1$ gilt.

2.5 Bemerkung und Beispiel. (a) Ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf E und $r > 0$, so sind die Mengen $U_r(0) := \{x \in E \mid \|x\| < r\}$ und $B_r(0) := \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$ absolut konvex und absorbierend.

(b) $A \subseteq E$ ist absolut konvex genau dann, wenn $\lambda x + \mu y \in A$ für alle $x, y \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ gilt.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, \infty)$ (*Gewichte*) mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ heißt $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ *Konvexkombination* der Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$. Ist A konvex, so liegt jede Konvexkombination von Elementen aus A wieder in A.

(d) Ist $A \subseteq E$ absolut konvex, so gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$.

(e) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist $f \in C^1(I)$ genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Die Beweise von (a)–(e) sind allesamt recht einfach.

2.6 Satz. *Sei $A \subseteq E$ absolut konvex und absorbierend. Dann wird durch*

$$\|x\|_A := \inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \frac{x}{t} \in A\right\} = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\} \qquad \text{für } x \in E$$

eine Halbnorm auf E definiert.

Beweis. Da A absorbierend ist, erhält man $\|x\|_A < \infty$ für alle $x \in E$. Zur Homogenität: Für $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_A &= \inf\{t > 0 \mid \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 \mid |\lambda| x \in tA\} \\ &= \inf\bigl\{|\lambda| s \;\big|\; s > 0, x \in sA\bigr\} = |\lambda| \|x\|_A.\end{aligned}$$

Zur Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in E$, und seien $s, t > 0$ mit $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in A$. Mit $\lambda = \frac{t}{t+s}$ (also $1 - \lambda = \frac{s}{t+s}$) ist dann

$$\frac{x+y}{s+t} = (1-\lambda)\frac{x}{s} + \lambda \frac{y}{t} \in A$$

aufgrund der Konvexität von A, und somit folgt $\|x+y\|_A \leq s+t$. Durch Infimumbildung in s und t folgt $\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$. □

Ende der Videos von 2021-04-13

2.7 Definition und Satz. Für $p \in [1, \infty)$ sei $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ die Menge aller Folgen $x = (x_k)_k$ in $\mathbb{K}$ mit $\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p < \infty$. Dann ist $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation) mit der Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{für } x = (x_k)_k \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Beweis. Offensichtlich ist die Nullfolge $0 \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Seien $x = (x_k)_k, y = (y_k)_k \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda x_k|^p = |\lambda|^p \sum_k |x_k|^p < \infty,$$

und somit $\lambda x = (\lambda x_k)_k \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Da die Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^p$ gemäß Bemerkung und Beispiel 2.5(e) konvex ist, gilt ferner

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} (|x_k| + |y_k|)^p &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} (2 \max\{|x_k|, |y_k|\})^p \\ &= 2^p \sum_{k \in \mathbb{N}} \max\{|x_k|^p, |y_k|^p\} \leq 2^p \sum_{k \in \mathbb{N}} (|x_k|^p + |y_k|^p) < \infty\end{aligned}$$

und somit $x + y = (x_k + y_k)_k \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Also ist $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zudem ist

$$A := \left\{ x \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \leq 1 \right\}$$

eine absorbierende Teilmenge von $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, denn für $x \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ gilt $x/\|x\|_p \in A$. Aufgrund der Konvexität der Funktion $t \mapsto t^p$ ist A auch absolut konvex, wie man leicht nachprüft. Somit definiert

$$\begin{aligned} \|x\|_A = \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_k}{t}\right|^p \leq 1 \right\} &= \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \leq t^p \right\} \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \end{aligned}$$

eine Halbnorm auf $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ gemäß Satz 2.6. Zum Beweis der Definitheit (N4) beachte man: $\|x\|_p = 0 \implies \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p = 0 \implies x_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} \implies x = 0$. □

2.8 Bemerkung. (a) Analog definiert man $\ell^p(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ für eine beliebige höchstens abzählbare Indexmenge $\mathcal{I}$ anstelle von $\mathbb{N}$, z.B. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$. Kurzschreibweisen: $\ell^p(\mathcal{I})$ statt $\ell^p(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ und ℓ^p statt $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Man beachte: Der Fall $\mathcal{I} = \{1, \ldots, N\}$ führt wieder zurück auf $\mathbb{K}^N$.

(b) Sind $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, so gilt die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q \qquad \textit{für } x = (x_k)_k \in \ell^p(\mathcal{I}, \mathbb{K}),\ y = (y_k)_k \in \ell^q(\mathcal{I}, \mathbb{K}).$$

Im Fall $p = \infty$, $q = 1$ sieht man dies direkt:

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} |x_k y_k| \leq \sum_{k\in\mathcal{I}} \|x\|_\infty |y_k| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Im Fall $p, q \in (1, \infty)$ verwenden wir die Youngsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{für } a, b \geq 0. \tag{2.1}$$

Diese Ungleichung beweist man leicht durch Minimierung der Funktion $x \mapsto \frac{x^p}{p} - xb$ in $[0, \infty)$ für festes $b \geq 0$. Unter Verwendung von (2.1) folgt nun mit $s = \|x\|_p$, $t = \|y\|_q$:

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathcal{I}} |x_k y_k| = st \sum_{k\in\mathcal{I}} \left| \frac{x_k}{s} \cdot \frac{y_k}{t} \right| &\leq st \sum_{k\in\mathcal{I}} \left(\frac{1}{p} \left|\frac{x_k}{s}\right|^p + \frac{1}{q} \left|\frac{y_k}{t}\right|^q \right) \\ &= st \left(\frac{1}{p} \left\|\frac{x}{s}\right\|_p^p + \frac{1}{q} \left\|\frac{y}{t}\right\|_q^q \right) = st \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = st. \end{aligned}$$

2.9 Satz. *Sei $p \in [1, \infty)$.*

(a) *Für $q \in (p, \infty]$ gilt $\ell^p \subseteq \ell^q$, $\ell^p \neq \ell^q$, und $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$, aber $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_p$ sind nicht äquivalent auf ℓ^p.*

(b) $\lim\limits_{\substack{q \to \infty \\ q \geq p}} \|x\|_q = \|x\|_\infty$ *für alle $x \in \ell^p$.*

Beweis. Übung. $\square$

2.10 Definition. (a) Eine Abbildung $h\colon E \times E \to \mathbb{K}$ heißt *hermitesche Form* auf E, falls gilt:

(H1) $h(\cdot, y)\colon E \to \mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}$-linear für alle $y \in E$;

(H2) $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$ für alle $x, y \in E$. Insbesondere folgt: $h(x, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in E$.

(b) Eine hermitesche Form h heißt *positiv*, falls $h(x, x) \geq 0$ für alle $x \in E$ gilt.

(c) Eine positive hermitesche Form heißt *Skalarprodukt*, wenn für alle $x \in E$ die Implikation $h(x, x) = 0 \implies x = 0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir oft $\langle x, y\rangle$ statt $h(x, y)$. Das Paar $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ heißt dann *Prähilbertraum.*

2.11 Bemerkung. Ist h eine hermitesche Form auf E, so gilt

$$h(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} h(x, y_1) + \overline{\beta} h(x, y_2) \qquad \text{für alle } x, y_1, y_2 \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist h genau dann eine hermitesche Form, wenn es eine symmetrische Bilinearform ist.

2.12 Satz. *Sei h eine positive hermitesche Form auf E. Dann gilt:*

(a) $|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y)$ *für alle $x, y \in E$* (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(b) *Durch $\|x\| := \sqrt{h(x, x)}$ ist eine Halbnorm auf E definiert. Diese ist genau dann eine Norm, wenn h ein Skalarprodukt ist.*

Beweis. Übung. $\square$

2.13 Beispiel. Sei $\mathcal{I}$ eine höchstens abzählbare Indexmenge. Dann ist $\ell^2(\mathcal{I})$ ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k \in \mathcal{I}} x_k \overline{y}_k \quad \text{für } x = (x_k)_{k \in \mathcal{I}}, y = (y_k)_{k \in \mathcal{I}} \in \ell^2(\mathcal{I}).$$

Die Konvergenz der obigen Reihe folgt aus dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$|x_k \overline{y}_k| = |x_k||y_k| \leq \frac{1}{2}\big(|x_k|^2 + |y_k|^2\big) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und die Reihen $\sum_k |x_k|^2$ und $\sum_k |y_k|^2$ konvergieren.

2.2. Topologische Eigenschaften normierter Räume

Wir wiederholen zunächst die grundlegenden topologischen Begriffe in metrischen Räumen.

2.14 Definition. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, so dass für $x, y, z \in X$ gilt:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*.

2.15 Definition und Bemerkung. (a) Für $A \subseteq X$, $x^* \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} A &:= \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} && (\textit{Durchmesser von } A),\\
\operatorname{dist}(x^*, A) &:= \inf\{d(x^*, y) \mid y \in A\} && (\textit{Abstand von } x^* \textit{ zu } A),\\
U_\varepsilon(x^*) &:= \{y \in X \mid d(y, x^*) < \varepsilon\} && (\textit{offene } \varepsilon\textit{-Kugel um } x^*),\\
B_\varepsilon(x^*) &:= \{y \in X \mid d(y, x^*) \leq \varepsilon\} && (\textit{abgeschlossene } \varepsilon\textit{-Kugel um } x^*),\\
U_\varepsilon(A) &:= \{y \in X \mid \operatorname{dist}(y, A) < \varepsilon\} && (\textit{offene } \varepsilon\textit{-Umgebung von } A),\\
B_\varepsilon(A) &:= \{y \in X \mid \operatorname{dist}(y, A) \leq \varepsilon\} && (\textit{abgeschl. } \varepsilon\textit{-Umgebung von } A),\\
\overline{A} &:= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) = 0\} && (\textit{Abschluss von } A),\\
\operatorname{int}(A) := \mathring{A} &:= \{x \in A \mid \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \subseteq A\} && (\textit{offener Kern von } A),\\
\partial A &:= \overline{A} \setminus \mathring{A} && (\textit{Rand von } A).
\end{aligned}$$

(b) A heißt

- *abgeschlossen*, falls $A = \overline{A}$;
- *offen*, falls $A = \mathring{A}$;
- *Umgebung von x*, falls $x \in \mathring{A}$;
- *dicht in X*, falls $\overline{A} = X$;
- *beschränkt*, falls $\operatorname{diam} A < \infty$.

Es gilt:

- $U_\varepsilon(x^*)$, $U_\varepsilon(A)$ sind offen, $B_\varepsilon(x^*), B_\varepsilon(A)$ sind abgeschlossen;
- A offen $\iff X \setminus A$ abgeschlossen;
- $X, \varnothing$ sind offen und abgeschlossen;
- $\mathring{A}$ ist offen, $\overline{A}$ ist abgeschlossen;
- ∂A ist abgeschlossen.

(c) Seien $A_i \subseteq X$, $i \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ beliebige Indexmenge). Dann gilt:
- Sind alle A_i, $i \in \mathcal{I}$, offen, so auch $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ und, falls $\mathcal{I}$ endlich ist, auch $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$.
- Sind alle $A_i, i \in \mathcal{I}$, abgeschlossen, so auch $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ und, falls $\mathcal{I}$ endlich ist, auch $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$.

(d) Sei $a \in X$ und $(x_k)_k \subseteq X$ eine Folge. Falls $d(x_k, a) \to 0$ für $k \to \infty$, so nennen wir a Grenzwert der Folge $(x_k)_k$ und schreiben $a = \lim_{k\to\infty} x_k$ bzw. $x_k \to a$ für $k \to \infty$. Leicht zu sehen: Durch diese Eigenschaft ist a eindeutig bestimmt.

(e) Ist E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so induziert jede Norm $\|\cdot\|$ auf E eine Metrik d, gegeben durch $d(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in E$. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, so ist auch (A, d) ein metrischer Raum. Insbesondere ist jede Teilmenge eines normierten Raumes ein metrischer Raum mit der durch die Norm induzierten Metrik.

(f) Die Eigenschaften „offen“ und „abgeschlossen“ hängen vom umgebenden metrischen Raum ab. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$, so gilt für $A \subseteq M$:
- A offen in $(M, d) \iff$ es existiert $A' \subseteq X$, A' offen in X, mit $A = A' \cap M$;
- A abgeschlossen in $(M, d) \iff$ es existiert $A' \subseteq X$, A' abgeschlossen in X, mit $A = A' \cap M$.

(g) Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E erzeugen die gleiche Topologie, d.h. das gleiche System offener Teilmengen. Für $A \subseteq E$ gilt also, dass A genau dann offen bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist, wenn A offen bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist. Gleichermaßen invariant bleiben die Eigenschaften „abgeschlossen“, „beschränkt“ und „dicht“, die Definitionen $\overline{A}$ und $\mathring{A}$ und die Konvergenz von Folgen. Insbesondere sind diese Begriffe im Vektorraum $\mathbb{K}^N$, unabhängig von der Wahl einer Norm, wohldefiniert.

2.16 Definition. Der metrische Raum (X, d) heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Hier und im Folgenden steht „abzählbar“ für „endlich oder abzählbar unendlich“.

2.17 Beispiel. (a) $\mathbb{K}^N$ ist separabel, denn
- $\mathbb{Q}^N$ ist abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^N$
- $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})^N$ ist abzählbar und dicht in $\mathbb{C}^N$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist separabel, denn $\sqrt{2} + \mathbb{Q}$ ist eine abzählbare und dichte Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2.18 Satz. *(X, d) separabel, $A \subseteq X \implies (A, d)$ separabel.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare Menge $Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, welche in X dicht liegt. Wir setzen

$$H := \left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\middle|\; B_{\frac{1}{m}}(y_n) \cap A \neq \varnothing\right\}$$

und wählen $b_{m,n} \in B_{\frac{1}{m}}(y_n) \cap A$ für jedes $(m,n) \in H$. Da H abzählbar ist, ist auch die Menge

$$B \coloneqq \{b_{m,n} \mid (m,n) \in H\} \subseteq A$$

abzählbar. Ferner ist B dicht in A (Übung!). Es folgt, dass A separabel ist. $\square$

Ende der Videos von 2021-04-16

2.19 Definition. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt *total*, falls $\overline{\operatorname{span} M} = E$ gilt. Hier und im Folgenden bezeichne „$\operatorname{span} M$" das Vektorraumerzeugnis von M in E, welches als der Unterraum aller Linearkombinationen von Elementen aus M bzw. äquivalent als der Schnitt aller Unterräume von E, welche M enthalten, gegeben ist.

2.20 Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist E genau dann separabel, wenn E eine abzählbare totale Teilmenge enthält.*

Beweis. „$\Longrightarrow$": Sei E separabel. Dann existiert eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq E$ mit $\overline{M} = E$. Es folgt $E = \overline{M} \subseteq \overline{\operatorname{span} M} \subseteq E$, also $\overline{\operatorname{span} M} = E$. Demnach ist M total.

„$\Longleftarrow$": Sei $M \subseteq E$ abzählbar und total. Wir setzen

$$D \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_n \in R,\ v_1, \dots, v_n \in M \right\},$$

wobei

$$R \coloneqq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, & \text{falls} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

sei. D ist abzählbar, da M und R abzählbar sind.

Seien nun $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da M total ist, existieren $v_1, \dots, v_n \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Sei $C \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|$. Da R dicht in $\mathbb{K}$ ist, existieren $a_1, \dots, a_n \in R$ mit

$$|\lambda_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Es folgt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \right\| \overset{(2.2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - a_k) v_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - a_k| \, \|v_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $x \in \overline{D}$. Somit ist $\overline{D} = E$, und E ist separabel. $\square$

2.21 Definition und Bemerkung. (a) Eine Folge $(x_k)_k \subseteq \mathbb{K}$ heißt *finit*, falls $x_k \neq 0$ für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $\mathcal{F}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der finiten Folgen. Es gilt dann $\mathcal{F} \subseteq \ell^p$ für alle $p \in [1, \infty]$. Eine Basis B von $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Einheitsvektoren $e_k := (\delta_{kj})_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $k \in \mathbb{N}$. Für $p \in [1, \infty)$ ist $\mathcal{F}$ dicht in ℓ^p (Übung), also B total in ℓ^p. Es folgt mit Satz 2.20: ℓ^p ist für $p \in [1, \infty)$ separabel.

(b) ℓ^∞ ist nicht separabel (Übung).

2.3. Stetige Abbildungen

Seien im Folgenden (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

2.22 Definition und Bemerkung. Seien $f \colon X \to Y$ eine Abbildung und $a \in X$.

(a) f heißt *stetig* in a, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für jede Folge $(x_n)_n$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt. Dies ist bekanntermaßen äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.
- Für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X.

(b) f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt aus X stetig ist. Dies ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

- Für jede in Y offene Teilmenge V von Y ist $f^{-1}(V)$ offen in X.
- Für jede in Y abgeschlossene Teilmenge V von Y ist $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in X.
- Für alle $A \subseteq X$ gilt $f\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)}$.

(c) Wir setzen

$$C(X, Y) := \{f \colon X \to Y \mid f \text{ ist stetig}\}$$

und

$$C_b(X, Y) := \{f \in C(X, Y) \mid f(X) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ist speziell $Y = \mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so schreiben wir kurz $C(X)$ anstelle von $C(X, \mathbb{K})$ und $C_b(X)$ anstelle von $C_b(X, \mathbb{K})$.

2.23 Bemerkung. (a) Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig

(b) Sind $f_n \colon X \to Y$ stetig für $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f \colon X \to Y$ (d.h. $\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$ für $n \to \infty$), so ist auch f stetig.

(c) Sind $f, g \colon X \to Y$ stetig und ist $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ dicht in X, so ist $f \equiv g$.

(d) Die Mengen $C(X)$ und $C_b(X)$ sind $\mathbb{K}$-Vektorräume. Genauer ist $C_b(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(X)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Dies folgt aus (b), da die Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau der gleichmäßigen Konvergenz entspricht. Falls nicht explizit anders bemerkt, betrachten wir $C_b(X)$ im Folgenden stets mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$

2.24 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung

(a) f heißt *gleichmäßig stetig*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ die Implikation gilt: $d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

(b) f heißt *Lipschitz-stetig*, falls $L > 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$

(c) f heißt *Isometrie*, falls $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

(d) f heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und f sowie f^{-1} stetig sind. Existiert solch ein f, so heißen X und Y *homöomorph*. Wir schreiben in diesem Fall $X \approx Y$.

2.25 Bemerkung. (a) Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ gelten folgende Implikationen: f Isometrie $\Longrightarrow$ f Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ f gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ f stetig.

(b) Es gelte $\varnothing \neq A \subseteq X$. Dann ist die Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1).

Seien im Folgenden $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

2.26 Satz. *Sei $T\colon E \to F$ $\mathbb{K}$-linear.*

(a) *Äquivalent sind:*

- *T ist stetig;*
- *T ist stetig in 0;*
- *$T(B_1(0))$ ist in F beschränkt (Erinnerung: $B_1(0) := \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\}$);*
- *T ist Lipschitz-stetig.*

(b) *Ist $\dim E < \infty$, so ist T stetig.*

Beweis. (a) bekannt und einfach.

(b) Man sieht direkt, dass eine Norm $\|\cdot\|_T$ auf E definiert ist durch $\|x\|_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F$. Nach Bemerkung und Beispiel 2.3(a) ist $\|\cdot\|_T$ äquivalent zu $\|\cdot\|_E$, da E endlichdimensional ist. Somit existiert $C > 0$ mit

$$\|x\|_T \leq C\|x\|_E \qquad \text{für alle } x \in E,$$

also insbesondere

$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_T \leq C\|x\|_E \leq C \qquad \text{für alle } x \in B_1(0).$$

□

2.27 Definition. (a) Wir setzen

$$\mathcal{L}(E,F) \coloneqq \{T\colon E \to F \mid \text{T ist linear und stetig}\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{L}(E,F)$ mit der Definition

$$\|T\| \coloneqq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \coloneqq \sup_{x\in B_1(0)} \|Tx\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

ein normierter Raum ist.

(b) Der Vektorraum $E' \coloneqq \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ heißt *topologischer Dualraum* von E.

(c) Wir setzen $\mathcal{L}(E) \coloneqq \mathcal{L}(E,E)$ (Raum der stetigen Endomorphismen von E).

(d) Eine bijektive $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $T\colon E \to F$ heißt *topologischer Isomorphismus*, falls T und T^{-1} stetig sind. Existiert eine solche Abbildung T, so heißen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ *topologisch isomorph*. Wir setzen

$$\operatorname{Iso}(E,F) \coloneqq \{T\colon E \to F \mid T \text{ ist ein topologischer Isomorphismus}\}$$

und schreiben kurz $\operatorname{Iso}(E)$ anstelle von $\operatorname{Iso}(E,E)$.

(e) Die Identität $\mathrm{id}\colon E \to E$ schreiben wir meist als $I \coloneqq \mathrm{id}$, so wie in der Operatorentheorie üblich.

2.28 Bemerkung. (a) Die Elemente von $\mathcal{L}(E,F)$ nennt man auch *beschränkte lineare Operatoren*, und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ nennt man die *Operatornorm*.

(b) Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so ist $c = \|T\|$ die kleinste nichtnegative Zahl mit der Eigenschaft

$$\|Tx\|_F \le c\|x\|_E \qquad \text{für alle } x \in E.$$

(c) Ist $(G, \|\cdot\|_G)$ ein weiterer normierter Raum und sind $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und $S \in \mathcal{L}(F,G)$ gegeben, so gilt

$$\|STx\|_G \le \|S\|\|Tx\|_F \le \|S\|\|T\|\|x\|_E \qquad \text{für alle } x \in E,$$

also

$$ST \in \mathcal{L}(E,G) \quad \text{und} \quad \|ST\| \le \|S\|\|T\| \qquad (\textit{Submultiplikativität der Norm}).$$

Insbesondere gilt $\|T^n\| \le \|T\|^n$ für $T \in \mathcal{L}(E)$ und $n \in \mathbb{N}$.

2.29 Beispiel. (a) Sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{F}$ der finiten Folgen (siehe Definition und Bemerkung 2.21) versehen mit $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k| = \max_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ für $x \in \mathcal{F}$. Sei ferner $T\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definiert durch $T(x_k)_k = (\frac{1}{k}x_k)_k$. Man sieht leicht, dass T bijektiv ist. Da ferner $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathcal{F}$ gilt, ist T auch stetig. Allerdings ist T^{-1} nicht stetig, da

$$\frac{1}{k}e_k \to 0 \quad \text{in } (\mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty) \quad \text{und} \quad \left\|T^{-1}\frac{1}{k}e_k\right\|_\infty = \|e_k\|_\infty = 1$$

für alle k gilt. Hier sei $e_k \coloneqq (\delta_{nk})_n \in \mathcal{F}$ wie in Definition und Bemerkung 2.21 der k-te Einheitsvektor in $\mathcal{F}$.

(b) Sei $1 \leq p < q \leq \infty$. Dann ist die identische Abbildung $T\colon (\ell^p, \|\cdot\|_p) \to (\ell^p, \|\cdot\|_q)$ stetig (da $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ gilt), aber T^{-1} ist nicht stetig, da $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_p$ auf ℓ^p nicht äquivalent sind.

(c) (*Integraloperatoren*) Seien $[a,b], [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, und sei $k\colon [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Wir schreiben $C[a,b] \coloneqq C([a,b])$, $C[c,d] \coloneqq C([c,d])$ und definieren die lineare Abbildung $K\colon C[a,b] \to C[c,d]$ durch

$$(Ku)(t) \coloneqq \int_a^b k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für } t \in [c,d].$$

Offensichtlich ist K wohldefiniert und linear. K ist stetig, denn für alle $u \in C[a,b]$ und $t \in [c,d]$ gilt

$$|(Ku)(t)| \leq \int_a^b |k(t,s)||u(s)|\,\mathrm{d}s \leq M\|u\|_\infty$$

mit

$$M \coloneqq \max_{c \leq t \leq d} \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s < \infty, \tag{2.3}$$

also $\|Ku\|_\infty \leq M\|u\|_\infty$ für $u \in C[a,b]$. Es folgt somit $K \in \mathcal{L}(C[a,b], C[c,d])$ mit $\|K\| \leq M$. Wir werden nun sehen, dass sogar $\|K\| = M$ gilt. Sei dazu $t_0 \in [c,d]$ ein Punkt, wo das Maximum in (2.3) angenommen wird. Für $\varepsilon > 0$ sei ferner

$$u_\varepsilon \in C[a,b] \quad \text{definiert durch} \quad u_\varepsilon(s) = \frac{\overline{k(t_0,s)}}{|k(t_0,s)| + \varepsilon}$$

Da $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ ist, unabhängig von $\varepsilon > 0$, gilt

$$\|K\| \geq \|Ku_\varepsilon\|_\infty \geq |(Ku_\varepsilon)(t_0)| = \int_a^b \frac{|k(t_0,s)|^2}{|k(t_0,s)| + \varepsilon}\,\mathrm{d}s,$$

wobei das letzte Integral für $\varepsilon \to 0$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gegen $\int_a^b |k(t_0,s)| ds = M$ konvergiert. Also ist auch $\|K\| \geq M$, und insgesamt folgt Gleichheit. Spezielles Beispiel: Sei $K \in \mathcal{L}(C[0,1], C[0,1])$ der Lösungsoperator zum

Problem (1.2) aus Kapitel 1, d.h. es gelte

$$Kf(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für } f \in C[0,1],\ t \in [0,1]$$

mit der Greenfunktion

$$G(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & s \le t; \\ (1-s)t, & s \ge t. \end{cases}$$

Dann ist

$$\|K\| = \max_{t\in[0,1]} h(t)$$

mit

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^1 |G(t,s)|\,\mathrm{d}s = (1-t)\int_0^t s\,\mathrm{d}s + t\int_t^1 (1-s)\,\mathrm{d}s \\ &= (1-t)\int_0^t s\,\mathrm{d}s + t\int_0^{1-t} s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\Big((1-t)t^2 + t(1-t)^2\Big) = \frac{t(1-t)}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt $\|K\| = \frac{1}{8}$.

Ende der Videos von 2021-04-20

2.4. Vollständigkeit und Reihen

2.30 Definition. (a) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *Cauchyfolge*, wenn $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} d(x_m, x_n) = 0$ gilt.

(b) (X,d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

(c) Ein vollständiger normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*.

(d) Ein vollständiger Prähilbertraum $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Hilbertraum*.

In (c) und (d) bezieht sich die Vollständigkeit dabei auf die induzierte Metrik.

2.31 Bemerkung. Sei $(x_n)_n \subseteq X$ eine Folge.

(a) Ist $(x_n)_n$ konvergent, so ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(b) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, so ist $(x_n)_n$ in X beschränkt, d.h. die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ ist beschränkt.

(c) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge und besitzt $(x_n)_n$ eine gegen $a \in X$ konvergente Teilfolge, so konvergiert bereits die Folge $(x_n)_n$ selbst gegen a.

(d) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, $(Y, \tilde{d})$ ein weiterer metrischer Raum und $f\colon X \to Y$ gleichmäßig stetig, so ist auch $(f(x_n))_n$ eine Cauchyfolge (in Y).

2.32 Satz. *Sei $A \subseteq X$.*

(a) *Ist (X, d) vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch (A, d) vollständig.*

(b) *Ist (A, d) vollständig, so ist A abgeschlossen in X.*

Beweis. (a) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in A. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$, wobei $x \in \overline{A} = A$ nach Voraussetzung gilt. Also konvergiert $(x_n)_n$ in A.

(b) Sei $x \in \overline{A}$. Dann ist $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ für eine Folge $(x_n)_n$ in A. Nach Bemerkung 2.31(a) ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in A, und damit konvergiert $(x_n)_n$ nach Voraussetzung in A. Es folgt $x \in A$. Insgesamt folgt $A = \overline{A}$. □

2.33 Bemerkung. Sei $(Y, \tilde{d})$ ein weiterer metrischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Ist f eine Isometrie, so ist neben f auch $f^{-1}\colon f(X) \to X$ gleichmäßig stetig, und aus Bemerkung 2.31(d) folgt:

$$(X, d) \text{ vollständig} \iff \big(f(X), \tilde{d}\big) \text{ vollständig}$$

Gilt dies, so ist $f(X)$ abgeschlossen in Y nach Satz 2.32.

(b) Ist f ein Homöomorphismus, so erhält f nicht notwendigerweise die Vollständigkeit: Seien z.B. $X = \mathbb{R}$ und $Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, jeweils versehen mit der Betragsmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Sei ferner der Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ gegeben durch $f(x) = \arctan x$. Dann ist X vollständig und Y nicht, da $Y \subseteq X$ nicht abgeschlossen ist.

2.34 Bemerkungen und Beispiele. (a) Sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E, so gilt:

$$(E, \|\cdot\|_1) \text{ Banachraum} \iff (E, \|\cdot\|_2) \text{ Banachraum}$$

Allgemeiner gilt für zwei topologisch isomorphe $\mathbb{K}$-Vektorräume $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$:

$$E \text{ Banachraum} \iff F \text{ Banachraum}$$

(b) $\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum (bzgl. jeder Norm). Ist ferner E irgendein normierter Raum mit $n \coloneqq \dim E < \infty$, so ist E topologisch isomorph zu $\mathbb{K}^n$ und damit ein Banachraum nach (a).

(c) Jeder endlich-dimensionale Unterraum eines normierten Raums ist abgeschlossen nach (b) und Satz 2.32.

(d) ℓ^p ist ein Banachraum für $p \in [1, \infty]$. Wir beweisen dies zunächst im Fall $p < \infty$: Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in ℓ^p, wobei wir $x_n = (\xi_{nk})_k$ notieren. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest; für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|\xi_{mk} - \xi_{nk}|^p \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_{mj} - \xi_{nj}|^p = \|x_m - x_n\|_p^p,$$

und somit ist die Folge $(\xi_{nk})_n \subseteq \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, existiert $\xi_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} \xi_{nk} \in \mathbb{K}$. Setze $x \coloneqq (\xi_k)_k$. Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{k=1}^{\ell} |\xi_k|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} |\xi_{nk}|^p \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_p^p \overset{\text{Bemerkung 2.31(b)}}{<} \infty.$$

Also ist $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|^p < \infty$ und somit $x \in \ell^p$. Für alle $n, \ell \in \mathbb{N}$ gilt zudem

$$\sum_{k=1}^{\ell} |\xi_k - \xi_{nk}|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} |\xi_{mk} - \xi_{nk}|^p \leq \sup_{m\geq n} \|x_m - x_n\|_p^p \eqqcolon c_n$$

und somit $\|x - x_n\|_p^p \leq c_n$. Nach Voraussetzung gilt zudem $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in ℓ^p; dies war zu zeigen. Der Beweis für $p = \infty$ ist ähnlich, nur einfacher. Es gilt sogar:

(e) Ist M eine beliebige Menge, so ist $\ell^\infty(M)$ ein Banachraum (Übung).

(f) Nach Bemerkung 2.23(d) ist der Unterraum $C_b(X)$ abgeschlossen in $\ell^\infty(X)$ und damit ein Banachraum nach (e) und Satz 2.32(a).

(g) ℓ^2 ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus Beispiel 2.13.

2.35 Satz. *Seien E, F normierte Räume. Ist F ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(E, F)$ ein Banachraum. Insbesondere ist der Dualraum E' eines normierten Raumes E stets ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E, F)$ und $c_n \coloneqq \sup_{m\geq n} \|T_m - T_n\|$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Für alle $x \in E$ folgt

$$\sup_{m\geq n} \|T_m x - T_n x\| \leq \sup_{m\geq n} \|T_m - T_n\| \|x\| = c_n \|x\| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. $(T_n x)_n$ ist eine Cauchyfolge in F. Aus der Voraussetzung folgt somit die Existenz von

$$Tx \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_n x \in F \qquad \text{für alle } x \in E.$$

Aus der Linearität der Abbildungen T_n und der Stetigkeit der linearen Operationen in F folgt direkt, dass auch die Zuordnung $x \mapsto Tx$ linear ist. Ferner ist $\|\cdot\|$ stetig und daher

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \right) \|x\| \qquad \text{für alle } x \in E,$$

d.h. T ist stetig. Man beachte dabei, dass $(\|T_n\|)_n$ wegen Bemerkung 2.31(b) beschränkt ist. Schließlich ist

$$\begin{aligned}\|(T-T_n)x\| &= \lim_{m\to\infty}\|(T_m-T_n)x\| \\ &\leq \left(\sup_{m\geq n}\|T_m-T_n\|\right)\|x\| = c_n\|x\| \qquad \text{für alle } x\in E,\end{aligned}$$

d.h. $\|T-T_n\|\leq c_n\to 0$ für $n\to\infty$. Dies zeigt die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(E,F)$. □

2.36 Definition. Seien $(E,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x_n)_n\subseteq E$ eine Folge.

(a) Wenn $S\coloneqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n x_k\in E$ existiert, so nennen wir die Reihe $\sum_k x_k$ *konvergent* und setzen $\sum_{k=1}^\infty x_k\coloneqq S$.

(b) Die Reihe $\sum_k x_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=1}^\infty\|x_k\|<\infty$ ist.

2.37 Satz. *Sei $(E,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt: E ist genau dann ein Banachraum, wenn jede absolut konvergente Reihe in E auch konvergent ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Genau wie für $E=\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ („Cauchykriterium“), man muss nur alle Beträge durch Normen ersetzen.

„$\Longleftarrow$“: Sei $(x_n)_n\subseteq E$ eine Cauchyfolge. Dann existiert für alle $k\in\mathbb{N}$ ein $\tau_k\in\mathbb{N}$ mit

$$\sup_{m\geq n}\|x_m-x_n\|<2^{-k}\qquad\text{für } n\geq\tau_k.$$

Wähle nun induktiv $n_1\geq\tau_1$ und $n_{k+1}\geq\max\{\tau_{k+1},n_k+1\}$ für $k\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\leq 2^{-k}\qquad\text{für alle } k,$$

also insbesondere

$$\sum_{k=1}^\infty\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\leq\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}=1,$$

dh. die Reihe $\sum_k(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ konvergiert *absolut*. Nach Voraussetzung konvergiert sie damit auch, d.h. es existiert

$$x\coloneqq\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_{n_1}+\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k\left(x_{n_{j+1}}-x_{n_j}\right)\qquad\in E.$$

Nach Bemerkung 2.31(d) konvergiert die Folge damit insgesamt gegen x, was zu zeigen war. □

2.5. Kompaktheit

Im Folgenden sei (X,d) ein metrischer Raum.

2.38 Definition und Bemerkung. (a) (X,d) heißt *kompakt*, falls gilt: Ist $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge und sind $U_i \subseteq X$, $i \in \mathcal{I}$, offene Mengen mit $X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$, so existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ mit $X = \bigcup_{i\in\mathcal{J}} U_i$. Mit anderen Worten: Jede offene Überdeckung von X lässt sich auf eine endliche Teilüberdeckung reduzieren.

(b) (X,d) heißt *präkompakt*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subseteq X$ existiert mit $X = B_\varepsilon(M)$ (hier könnte man äquivalent auch $U_\varepsilon(M)$ nehmen; überlegen!).

(c) $A \subseteq X$ heißt *kompakt* (bzw. *präkompakt*), wenn der metrische Teilraum (A,d) kompakt (bzw. präkompakt) ist. Somit gilt:

- A ist kompakt genau dann, wenn für jedes Familie $U_i \subseteq X$, $i \in \mathcal{I}$ offener Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ existiert mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{J}} U_i$.
- A ist präkompakt genau dann für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subseteq A$ existiert mit $A \subseteq B_\varepsilon(M)$ (wobei $B_\varepsilon(M)$ hier die Umgebung von M in X bezeichne).

(d) $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

2.39 Satz (Cantor)**.** *Sei (X,d) vollständig, und seien $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene, nichtleere Mengen mit $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle n und* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$. *Dann ist $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nichtleer.*

Beweis. Wähle $x_n \in A_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist dann

$$x_m \in A_n \qquad \text{für } m \geq n. \tag{2.4}$$

Also folgt

$$\sup_{m\geq n} d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} A_n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. $(x_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in X. Da (X,d) vollständig ist, existiert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Wegen (2.4) ist $x \in \overline{A_n} = A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; also $x \in A$. □

Nachbemerkung: Es gilt sogar $A = \{x\}$, da $\operatorname{diam} A \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$ ist.

——— Ende der Videos von 2021-04-23 ———

2.40 Satz. *Für einen metrischen Raum (X,d) sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(i) *X ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge $(x_k)_k$ in X besitzt eine in X konvergente Teilfolge.*

(iii) *X ist präkompakt und vollständig.*

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei X kompakt, und sei $(x_k)_k$ eine Folge in X. Ohne Einschränkung sei $M \coloneqq \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Menge. Angenommen, kein $a \in X$ ist Grenzwert einer Teilfolge von $(x_k)_k$. Dann existiert für jedes $a \in X$ ein $\varepsilon_a > 0$ so, dass $U_{\varepsilon_a}(a) \cap M$ endlich ist. Da $X = \bigcup_{a \in X} U_{\varepsilon_a}(a)$ kompakt ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$. Es folgt: $M = M \cap X = \bigcup_{i=1}^n M \cap U_{\varepsilon_{a_i}}(a_i)$ ist endlich. Widerspruch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Sei $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge in X. Diese besitzt nach Voraussetzung eine in X konvergente Teilfolge. Nach Bemerkung 2.31(c) ist dann aber schon $(x_k)_k$ selbst konvergent. Demnach ist X vollständig.

Wir zeigen nun die Präkompaktheit von X. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, es gäbe keine endliche Menge $M \subseteq X$ mit $X = B_\varepsilon(M)$. Wir wählen dann $a_1 \in X$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\text{Da } X \nsubseteq U_\varepsilon(a_1), \text{ existiert } a_2 \in X \setminus U_\varepsilon(a_1);\\
&\text{da } X \nsubseteq U_\varepsilon(a_1) \cup U_\varepsilon(a_2), \text{ existiert } a_3 \in X \setminus (U_\varepsilon(a_1) \cap U_\varepsilon(a_2));\\
&\ldots \qquad \ldots\\
&\text{da } X \nsubseteq \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j), \text{ existiert } a_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(a_j).
\end{aligned}$$

Diese Konstruktion definiert induktiv eine Folge $(a_n)_n$ in X derart, dass

$$d(a_n, a_m) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m \neq n \tag{2.5}$$

gilt. Nach Voraussetzung muss $(a_n)_n$ aber eine konvergente Teilfolge $(a_{n_j})_j$ besitzen. Diese ist dann eine Cauchyfolge, im Widerspruch zu (2.5). Es folgt die Präkompaktheit von X.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Seien $U_i \subseteq X$ für $i \in \mathcal{I}$ offene Teilmengen mit

$$X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i. \tag{2.6}$$

Da X präkompakt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $M_n \subseteq X$ mit

$$X = B_{\frac{1}{n}}(M_n) = \bigcup_{x \in M_n} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

Sei nun angenommen, dass X nicht von endlich vielen der Mengen U_i überdeckt wird. Da M_1 endlich ist, existiert $x_1 \in M_1$ so, dass $A_1 \coloneqq B_1(x_1)$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird. Da ferner M_2 endlich ist und $A_1 = \bigcup_{x \in M_2} A_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$ gilt, existiert $x_2 \in M_2$ so, dass $A_2 \coloneqq A_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird. Induktiv findet man:

(2.7) Es gibt $x_n \in M_n$, so dass $A_n \coloneqq A_{n-1} \cap B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird.

Dies liefert eine Folge abgeschlossener Mengen mit $A_{n+1} \subseteq A_n$ und $\operatorname{diam} A_n \leq \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X vollständig ist, folgt mit Satz 2.39, dass ein $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ existiert. Ferner existiert $i \in \mathcal{I}$ mit $a \in U_i$. Da U_i offen ist, existiert auch ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq U_i$. Für $n > \frac{2}{\delta}$ ist $\operatorname{diam} A_n < \delta$ und $a \in A_n$, also $A_n \subseteq B_\delta(a) \subseteq U_i$ im Widerspruch zu (2.7). Der Widerspruch zeigt, dass eine endliche Teilmenge $J \subseteq \mathcal{I}$ existiert mit $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. Es folgt die Kompaktheit von X. □

2.41 Bemerkung. (a) Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.

(b) Ist X kompakt, $\big(Y, \tilde{d}\big)$ ein weiterer metrischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X) \subseteq Y$ kompakt, und f ist gleichmäßig stetig.

(c) (Satz von Heine-Borel) Sei E ein endlichdimensionaler normierter Raum und $A \subseteq E$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Bekannt aus der Analysis II. □

2.42 Bemerkung. (a) Ist X präkompakt, so ist X offensichtlich beschränkt. Ferner ist X dann auch separabel, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine endliche Teilmenge $M_n \subseteq X$ mit $X = B_{\frac{1}{n}}(M_n)$. Somit ist die Menge $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar und dicht in X.

(b) Für $A \subseteq X$ sind äquivalent:

- A ist präkompakt
- Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine präkompakte Menge $C \subseteq X$ mit $A \subseteq B_\varepsilon(C)$.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ von A mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $\operatorname{diam} A_i \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$.
- $\overline{A}$ ist präkompakt.

Beweis als Übung.

(c) Für $A \subseteq X$ gilt wegen Satz 2.32(a), Satz 2.40 und (b):

- A relativ kompakt $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ kompakt $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ präkompakt $\Longrightarrow$ A präkompakt;
- (X, d) vollständig und A präkompakt $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ vollständig und präkompakt $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ kompakt $\Longrightarrow$ A relativ kompakt,

d.h. in einem vollständigen metrischen Raum sind Teilmengen genau dann präkompakt, wenn sie relativ kompakt sind.

2.43 Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subseteq E$. Dann gilt: A ist präkompakt genau dann, wenn A beschränkt ist und für jedes $\varepsilon > 0$ ein endlichdimensionaler Unterraum $F \subseteq E$ existiert mit $A \subseteq B_\varepsilon(F)$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei A präkompakt. Wie bereits bemerkt, ist A dann auch beschränkt. Sei ferner $\varepsilon > 0$, und sei $M \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq B_\varepsilon(M)$. Setze $F := \operatorname{span} M$. Dann ist $\dim F < \infty$ und $A \subseteq B_\varepsilon(F)$.

„$\Longleftarrow$“: Nach Voraussetzung ist $r := \sup_{x\in A}\|x\| < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $F \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Unterraum mit $A \subseteq B_\varepsilon(F)$. Setze $C := \{x \in F \mid \|x\| \leq r + \varepsilon\}$.

Nach Bemerkung 2.41(c) ist C dann kompakt, also auch präkompakt. Ferner existiert für jedes $x \in A$ ein $y \in F$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$, also insbesondere $\|y\| \leq \|x\| + \varepsilon \leq r + \varepsilon$ und somit $y \in C$. Also ist $A \subseteq B_\varepsilon(C)$, und mit Bemerkung 2.42(b) folgt die Behauptung. $\square$

2.44 Lemma (Rieszsches Lemma)**.** *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein echter abgeschlossener Unterraum. Seien ferner $r > 0$ und $\varepsilon \in (0,1)$ gegeben. Dann existiert ein $x \in E$ mit $\|x\| = r$ und $\operatorname{dist}(x, F) \geq (1-\varepsilon)r$.*

Beweis. Da $F = \overline{F} \neq E$ gilt, existiert $z \in E \setminus F$. Es folgt $\alpha := \operatorname{dist}(z, F) > 0$. Ferner existiert $y \in F$ mit $\|z - y\| < \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$. Seien nun $\lambda := \frac{r}{\|z-y\|}$ und $x := \lambda(z - y)$. Dann ist $\|x\| = r$, und für alle $w \in F$ gilt:

$$\|x - w\| = \lambda \|z - \underbrace{(y + \lambda^{-1} w)}_{\in F}\| \geq \lambda\alpha = \frac{r\alpha}{\|z-y\|} > (1-\varepsilon)r.$$

Es folgt $\operatorname{dist}(x, F) \geq (1-\varepsilon)r$. $\square$

2.45 Satz. *Für einen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:*

(i) $\dim E < \infty$

(ii) *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E ist kompakt*

(iii) *$B_1(0) \subseteq E$ ist präkompakt.*

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: siehe Bemerkung 2.41(c).
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: $B_1(0)$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt nach Voraussetzung und damit auch präkompakt.
„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Nach Satz 2.43 existiert ein endlichdimensionaler (und damit nach Bemerkungen und Beispiele 2.34(c) abgeschlossener) Unterraum $F \subseteq E$ mit

$$B_1(0) \subseteq B_{\frac{1}{3}}(F). \tag{2.8}$$

Ist $F \neq E$, so existiert nach Lemma 2.44 zu $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und $r = 1$ ein $x \in E \setminus F$ mit $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, F) \geq (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, also $x \notin B_{\frac{1}{3}}(F)$ im Widerspruch zu (2.8). Es folgt also $E = F$; somit ist E endlichdimensional. $\square$

3. Vollständigkeit

3.1. Der Satz von Baire

Sei stets (X, d) ein metrischer Raum.

3.1 Satz (von Baire)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $D_n \subseteq X$ offene und dichte Teilmengen für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ dicht in X.*

Beweis. Es reicht, zu zeigen, dass $D \cap U \neq \varnothing$ für jede nichtleere offene Teilmenge U von X gilt. Sei also $U \subseteq X$ offen und nichtleer. Da $D_1 \subseteq X$ offen und dicht ist, ist $D_1 \cap U$ offen und nichtleer. Wähle $x_1 \in D_1 \cap U$ und $r_1 \in (0, \frac{1}{2})$ mit $A_1 := B_{r_1}(x_1) \subseteq D_1 \cap U$. Dann gilt:

$$\varnothing \neq \mathring{A}_1 \subseteq A_1 = \overline{A}_1 \subseteq D_1 \cap U \quad \text{und} \quad \operatorname{diam} A_1 \leq 1. \tag{3.1}$$

Konstruiere nun sukzessive Mengen $A_n \subseteq X$, $n \geq 2$ mit

$$\varnothing \neq \mathring{A}_n \subseteq A_n = \overline{A}_n \subseteq D_n \cap A_{n-1} \quad \text{und} \quad \operatorname{diam} A_n \leq \frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

Sei dazu $n \geq 2$, und seien $A_1, \ldots, A_{n-1}$ bereits konstruiert. Da $\varnothing \neq \mathring{A}_{n-1}$ offen in X und D_n offen und dicht ist, muss $D_n \cap \mathring{A}_{n-1}$ offen und nichtleer sein. Wähle $x_n \in D_n \cap \mathring{A}_{n-1}$ und $r_n \in (0, \frac{1}{2n})$ mit $A_n := B_{r_n}(x_n) \subseteq D_n \cap \mathring{A}_{n-1}$. Mit dieser Wahl von A_n gilt (3.2). Anwendung von Satz 2.39 auf die Mengen $A_n, n \in \mathbb{N}$ liefert schließlich $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Aus (3.1) und (3.2) folgt aber

$$A_n \subseteq (D_1 \cap \cdots \cap D_n) \cap U \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \qquad \text{also } A \subseteq D \cap U.$$

Es folgt $D \cap U \neq \varnothing$. □

3.2 Korollar. *Sei (X, d) vollständig, und sei $A_n \subseteq X$ abgeschlossen für $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\mathring{A}_n = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\mathring{A} = \varnothing$.*

(b) *Enthält A eine offene Kugel $U_r(a)$ mit $a \in X, r > 0$, dann enthält mindestens eine der Mengen A_n eine abgeschlossene Kugel der Form $B_s(b)$ mit $b \in X$, $s > 0$.*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung ist $D_n := X \setminus A_n$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.1 ist somit $X \setminus A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ dicht in X. Dies liefert $\mathring{A} = X \setminus \overline{X \setminus A} = \varnothing$.
(b) folgt direkt aus (a). □

3.3 Definition. Sei $A \subseteq X$.

(a) A heißt *nirgends dicht* (in X), wenn $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$ gilt.

(b) A heißt *mager* (oder *von erster Kategorie*), falls sich A als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen schreiben lässt.

3.4 Bemerkungen und Beispiele. (a) Die Vereinigung abzählbar vieler magerer Mengen ist mager.

(b) Für $z \in X$ ist äquivalent:

$$\{z\} \text{ nirgends dicht in } X \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{dist}(z, X \setminus \{z\}) = 0$$

Gilt dies für alle $z \in X$, so ist jede abzählbare Teilmenge von X mager. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\{0\} \neq X$ ein normierter Raum (mit induzierter Metrik) ist.

(c) Seien $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein Unterraum, welcher nicht dicht ist. Dann ist F auch nirgends dicht, denn: F nicht dicht bedeutet, dass $v \in E \setminus \overline{F}$ existiert. Da $\overline{F}$ ein Unterraum von E ist (Übung), können wir dabei $0 \neq \|v\| < 1$ annehmen. Für alle $x \in \overline{F}$ und $\delta > 0$ ist dann $x + \delta v \in U_\delta(x) \setminus \overline{F}$. Es folgt $\operatorname{int}\left(\overline{F}\right) = \varnothing$.

3.5 Satz. *Seien (X, d) vollständig und $A \subseteq X$ mager. Dann ist $X \setminus A$ dicht in X. Insbesondere ist X nicht mager in sich, falls $X \neq \varnothing$ ist.*

Beweis. Sei $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $\operatorname{int}\left(\overline{A}_n\right) = \varnothing$ für alle n. Nach Korollar 3.2 gilt dann $\mathring{A} \subseteq \mathring{B} = \varnothing$ für $B \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. Es folgt $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A} = X$. □

3.6 Korollar. *Sei E ein unendlichdimensionaler Banachraum. Dann ist jede Basis von E (im Sinne der linearen Algebra) überabzählbar.*

Beweis. Angenommen, E besäße eine abzählbare Basis $\{v_1, v_2, \dots,\}$. Dann ist $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ mit $V_n \coloneqq \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Nach Voraussetzung und Bemerkungen und Beispiele 2.34(c) ist $V_n = \overline{V}_n \neq E$ für alle n, und somit ist V_n nirgends dicht in E nach Bemerkungen und Beispiele 3.4(c). Dann ist E mager in sich, im Widerspruch zu Satz 3.5. □

3.7 Bemerkung. Wir werden bald sehen, dass der Satz von Baire wichtige Konsequenzen für die Struktur der Menge stetiger linearer Abbildungen hat (Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz von der offenen Abbildung).

Ende der Videos von 2021-04-27

3.2. Gleichmäßige Beschränktheit

Stets seien E, F normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume

3.8 Hauptsatz (von der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, und sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ punktweise beschränkt, d.h.,*

$$\textit{für jedes } x \in E \textit{ existiere } C_x > 0 \textit{ mit } \|Tx\|_F \leq C_x \textit{ für alle } T \in \mathcal{H}.$$

Dann ist $\mathcal{H}$ beschränkt in $\mathcal{L}(E,F)$, d.h. es existiert $C > 0$ mit $\|T\| \leq C$ für alle $T \in \mathcal{H}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{x \in E \mid \|Tx\|_F \leq n \text{ für alle } T \in \mathcal{H}\} = \bigcap_{T \in \mathcal{H}} T^{-1}(\underbrace{B_n(0)}_{\subseteq F}).$$

Dann ist A_n abgeschlossen in E für alle $n \in \mathbb{N}$, und nach Voraussetzung gilt $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Da E vollständig ist, existieren nach Korollar 3.2(b) ein $n \in \mathbb{N}$, $z \in E$ und $s > 0$ mit $B_s(z) \subseteq A_n$, d.h.

$$\|Tx\|_F \leq n \qquad \text{für alle } x \in B_s(z),\ T \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Sei nun $v \in E \setminus \{0\}$ und $T \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann ist $x_v := z + s\frac{v}{\|v\|_E} \in B_s(z)$ und $v = \frac{\|v\|_E}{s}(x_v - z)$. Es folgt

$$\|Tv\|_F = \frac{\|v\|_E}{s}\ \|Tx_v - Tz\|_F \leq \frac{\|v\|_E}{s}(\|Tx_v\|_F + \|Tz\|_F) \overset{(3.3)}{\leq} \frac{2n}{s}\|v\|_E.$$

Insgesamt folgt $\sup_{T \in \mathcal{H}}\|T\| \leq \frac{2n}{s} < \infty$. □

3.9 Korollar. *Sei E ein Banachraum, und sei $(T_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}(E,F)$.*

(a) *Gilt $\limsup_{n\to\infty}\|T_n\| = \infty$, so existiert $x \in E$ derart, dass die Folge $(T_n x)_n$ in F nicht konvergiert.*

(b) *Existiert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in F$ für alle $x \in E$, so ist $(\|T_n\|)$ beschränkt und es gilt $T \in \mathcal{L}(E,F)$ mit*

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|. \tag{3.4}$$

(c) *Falls F auch ein Banachraum ist, und falls gilt, dass $(\|T_n\|)$ beschränkt ist und $(T_n x)$ lediglich für alle x in einer in E dichten Teilmenge konvergiert, dann konvergiert $(T_n x)$ für alle $x \in E$ und* (b) *ist anwendbar.*

Beweis. (a) Wenn $\lim_{n\to\infty} T_n x \in F$ für alle $x \in E$ existiert, so ist die Menge $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ punktweise beschränkt im Sinne von Hauptsatz 3.8. Dieser liefert dann ein $c > 0$ mit $\|T_n\| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt (a).

(b) Für T wie in (b) gilt

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\| \qquad \text{für alle } x \in E,$$

und (a) liefert $\liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$. Somit ist T (als offensichtlich lineare Abbildung) stetig und es folgt (3.4).

(c) Sei D ein dichte Teilmenge von E, so dass $(T_n x)$ für alle $x \in D$ konvergiert. Wir setzen $C := \sup \|T_n\|$ und zeigen, dass $(T_n x)$ für *alle* $x \in E$ konvergiert. Dafür halten wir $x \in E$ fest und betrachten eine Folge $(x_k) \subseteq D$ mit $x_k \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert k mit $\|x - x_k\| \le \varepsilon/(3C)$, und es existiert n_0 mit $\|T_m x_k - T_n x_k\| \le \varepsilon/3$ für alle $m, n \ge n_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|T_m x - T_n x\| &\le \|T_m x - T_m x_k\| + \|T_m x_k - T_n x_k\| + \|T_n x_k - T_n x\| \\ &\le C\|x - x_k\| + \varepsilon/3 + C\|x - x_k\| \le \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $m, n \ge n_0$, das heißt, $(T_n x)$ ist eine Cauchyfolge in F und konvergiert demnach. □

3.10 Bemerkung (Satz von Banach-Steinhaus)**.** Aus Korollar 3.9 folgt für Banachräume E und F und eine Folge $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ die Äquivalenz der Aussagen

(i) $(T_n x)$ konvergiert in F für alle $x \in E$;

(ii) $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ist beschränkt und $(T_n x)$ konvergiert für alle x in einer dichten Teilmenge von E.

Ist eine dieser Aussagen erfüllt, dann definiert $Tx \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_n x$ ein $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

3.3. Der Satz von der offenen Abbildung

Stets seien E, F normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume

3.11 Definition und Bemerkung. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, falls für $A \subseteq X$ gilt:

$$A \text{ ist offen in } X \qquad \Longrightarrow \qquad f(A) \text{ ist offen in } Y.$$

Man beachte: Ist $f\colon X \to Y$ offen und bijektiv, so ist f^{-1} stetig (vgl. Definition und Bemerkung 2.22(b))

3.12 Hauptsatz (von der offenen Abbildung)**.** *Sei E ein Banachraum, und sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$ derart, dass* $\operatorname{Bild}(T)$ *nicht mager in F ist. Dann ist T surjektiv und offen.*

Bevor wir den Beweis bringen, betrachten wir erst einmal einige Folgerungen aus diesem zentralen Resultat.

3.13 Beispiel. Sei $1 \le p < q \le \infty$. Nach Satz 2.9 ist die Inklusion $i\colon (\ell^p, \|\cdot\|_p) \hookrightarrow (\ell^q, \|\cdot\|_q)$ stetig. Da ℓ^p ein Banachraum und i nicht surjektiv ist, folgt mit Hauptsatz 3.12, dass ℓ^p in $(\ell^q \|\cdot\|_q)$ mager ist.

3.14 Korollar. *Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann gilt:*

(a) *Ist T surjektiv, so ist T offen.*

(b) *Ist T bijektiv, so ist T ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung und Satz 3.5 ist $\operatorname{Bild} T = F$ nicht mager in F. Also ist T offen nach Hauptsatz 3.12.

(b) Aus (a) und Definition und Bemerkung 3.11 folgt die Stetigkeit von T^{-1}. $\square$

3.15 Korollar. *Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V derart, dass $(V, \|\cdot\|_1)$, $(V, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind. Ferner möge $C > 0$ existieren mit $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in V$. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $I \colon (V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1)$ stetig, also ein topologischer Isomorphismus nach Korollar 3.14(b). Insbesondere ist $I \colon (V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ stetig, d.h. es existiert $D > 0$ mit $\|x\|_2 \leq D\|x\|_1$ für alle $x \in V$. Die Behauptung folgt. $\square$

Für den Beweis von Hauptsatz 3.12 vereinbaren wir zunächst ein paar praktische Bezeichnungen.

3.16 Notation. Seien $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $A, B \subseteq E$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} x + A &:= \{x + y \mid y \in A\}, \\ \alpha A &:= \{\alpha y \mid y \in A\}, \\ A + B &:= \{y + z \mid y \in A,\ z \in B\}. \end{aligned}$$

3.17 Lemma. *Seien $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $A \subseteq E$. Dann gelten:*

(a) *$\overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$ und $\operatorname{int}(\alpha A) = \alpha \operatorname{int}(A)$.*

(b) *$\overline{x + A} = x + \overline{A}$ und $\operatorname{int}(x + A) = x + \operatorname{int}(A)$.*

(c) *Für einen Vektorraum F und eine lineare Abbildung $T \colon E \to F$ ist $T(A)$ absolut konvex, falls A absolut konvex ist.*

(d) *Wenn A absolut konvex ist, dann ist auch $\overline{A}$ absolut konvex.*

Beweis. Übung. $\square$

Beweis von Hauptsatz 3.12. Zur Abkürzung verwenden wir hier für $r > 0$ und $x \in E$ die Notation $B_r(x; E)$ für die abgeschlossene Kugel in E, $B_r E := B_r(0; E)$, und analoge Schreibweisen in F.

Zuerst zeigen wir, dass $r > 0$ existiert mit

$$B_r F \subseteq \overline{T(B_1 E)}. \tag{3.5}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $A_n := \overline{T(B_n E)}$. Weil

$$\operatorname{Bild}(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n E)$$

nicht mager ist, existiert n_0 mit $\operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$. Lemma 3.17(a) liefert jetzt, dass auch

$$\operatorname{int}(A_1) = \operatorname{int}\left(\frac{1}{n_0} A_{n_0}\right) = \frac{1}{n_0} \operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$$

gilt und dass $y_0 \in F$ und $r > 0$ existieren, so dass $B_r(y_0; F) \subseteq A_1$ gilt. Wegen Lemma 3.17(c) und (d) ist A_1 absolut konvex. Daraus folgt $B_r(-y_0; F) \subseteq A_1$. Für $x \in B_r F$ gilt also $-y_0 + x, y_0 + x \in A_1$ und somit wegen der Konvexität von A_1:

$$x = \frac{1}{2}(-y_0 + x + y_0 + x) \in A_1.$$

Damit haben wir (3.5) gezeigt.

Im zweiten Schritt zeigen wir für r aus (3.5), dass

$$B_{r/2} F \subseteq T(B_1 E) \tag{3.6}$$

gilt. Sei $y \in B_{r/2} F$ gewählt. Dann zeigt (3.5), dass $z_1 \in B_{1/2} E$ existiert, so dass $\|y - Tz_1\| \leq r/4$ gilt. Mit (3.5) erhalten wir wieder $z_2 \in B_{1/4} E$, so dass $\|y - Tz_1 - Tz_2\| \leq r/8$ ist. Per Induktion konstruieren wir eine Folge $(z_n) \subseteq E$, so dass gilt:

$$\|z_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tz_k \right\| \leq r \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \tag{3.7}$$

Wir setzen nun $x_n := \sum_{k=1}^n z_k$. Dann folgt

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 1.$$

Wegen (3.7) konvergiert $\sum z_k$ absolut. Da E vollständig ist, liefert Satz 2.37, dass (x_n) gegen ein $x \in B_1 E$ konvergiert. Unter Benutzung von (3.7) prüft man leicht, dass $y = Tx \in T(B_1 E)$ gilt. Damit ist (3.6) gezeigt. Es folgt sofort

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n B_{r/2} F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n T(B_1 E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(n B_1 E) = \operatorname{Bild}(T),$$

d.h., T ist surjektiv.

Im letzten Schritt nehmen wir an, dass $U \subseteq E$ offen ist. Für beliebiges $y \in T(U)$ existiert $x \in U$ mit $y = Tx$. Weil U offen ist, existiert $t > 0$ mit $x + B_t E \subseteq U$. Aus (3.6) folgt $B_{tr/2} F \subseteq T(B_t E)$. Dann gilt $y + B_{tr/2} F \subseteq y + T(B_t E) = T(x + B_t E) \subseteq T(U)$, und

$y + B_{tr/2}$ ist daher eine Umgebung von y, die in $T(U)$ enthalten ist. Da $y \in T(U)$ beliebig war, ist $T(U)$ offen. $\square$

Ende der Videos von 2021-04-30

3.4. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien stets E und F normierte Räume über $\mathbb{K}$.

3.18 Definition und Bemerkung. Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $E \times F$ sei die Norm $\|\cdot\|$ definiert durch $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$. Dann gilt:

$$(E \times F, \|\cdot\|) \text{ ist Banachraum} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \text{ und } F \text{ sind Banachräume}$$

3.19 Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume, und sei $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung, deren Graph $\Gamma := \{(x, y) \in E \times F \mid y = Tx\}$ in $E \times F$ abgeschlossen ist. Dann ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$, also stetig.*

Beweis. Nach Voraussetzung und Definition und Bemerkung 3.18 ist $(E \times F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und somit auch $(\Gamma, \|\cdot\|)$, da $\Gamma \subseteq E \times F$ abgeschlossen ist. Sei $G\colon \Gamma \to E$ definiert durch $G(x, y) = x$. Da $\|G(x, y)\|_E = \|x\|_E \leq \|(x, y)\|$ für $(x, y) \in \Gamma$, ist $G \in \mathcal{L}(\Gamma, E)$. Ferner ist G bijektiv mit $G^{-1}(x) = (x, Tx)$ für $x \in E$. Gemäß Korollar 3.14(b) ist nun $G^{-1} \in \mathcal{L}(E, \Gamma)$; also existiert $C > 0$ mit

$$\|x\|_E + \|Tx\|_F = \|G^{-1}(x)\| \leq C\|x\|_E \qquad \text{für alle } x \in E,$$

und somit $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ für alle $x \in E$. Es folgt die Stetigkeit von T. $\square$

3.20 Bemerkung. Sei $T\colon E \to F$ $\mathbb{K}$-linear. Offensichtlich sind dann folgende Eigenschaften äquivalent:

- Der Graph von T ist abgeschlossen.
- Für jede Folge $(x_n)_n$ in E, für die Grenzwerte

  $$x := \lim_{n\to\infty} x_n \in E \qquad \text{und} \qquad y := \lim_{n\to\infty} Tx_n \in F$$

  existieren, gilt $y = Tx$.
- Für jede Nullfolge $(x_n)_n$ in E, für die der Grenzwert $y := \lim_{n\to\infty} Tx_n \in F$ existiert, gilt $y = 0$.

3.21 Bemerkung. Seien V, W Teilräume von E mit $E = V \oplus W$. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass genau eine Projektion $P\colon E \to E$ (d.h. P linear und $P^2 = P$) mit $V = \operatorname{Kern} P$ und $W = \operatorname{Bild} P$ existiert. Wir nennen P die *Projektion auf W längs V*. Dann ist $I - P\colon E \to E$ die Projektion auf V längs W.

3.22 Definition. Seien V, W Teilräume von E mit $E = V \oplus W$, und sei P die Projektion auf W längs V.

(a) Offensichtlich ist P genau dann stetig, wenn $I - P$ stetig ist. Gilt dies, so schreiben wir $E = V \oplus_{\text{top}} W$ (*topologische direkte Summe*) und nennen W ein *topologisches Komplement von* V (bzw. umgekehrt). Insbesondere sind in diesem Fall V und W als Kerne stetiger linearer Operatoren abgeschlossen in E.

(b) Ein Unterraum $V \subseteq E$ heißt *stetig projiziert*, falls es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $V = \operatorname{Bild} P$ gibt, d.h. falls V ein topologisches Komplement in E besitzt.

3.23 Beispiel. (a) Sei $E = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$, $V = \operatorname{span}\{(1,0)\}$ und $W_n = \operatorname{span}\{\big(1, \frac{1}{n}\big)\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $E = V \oplus W_n$. Sei P_n die Projektion mit $\operatorname{Bild} P = W_n$ und $\operatorname{Kern} P = V$. Da $(0,1) = -(n,0) + (n,1) \in V \oplus W_n$ gilt, ist $P_n(0,1) = (n,1)$, also $|P_n(0,1)|_\infty = n = n|(0,1)|_\infty$. Es folgt $\|P_n\| \geq n$.

(b) Sei nun $E = \mathcal{F}$ der Raum der finiten Folgen mit Norm $\|\cdot\|_\infty$. Dann ist $E = V \oplus W$ mit

$$V = \{x = (x_j)_j \in \mathcal{F} \mid x_j = 0 \text{ für } j \text{ gerade}\} \qquad \text{und} \qquad W = \operatorname{span}\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

wobei $d_n = \big(0, \ldots, 0, 1, \frac{1}{n}, 0, \ldots\big) = e_{2n-1} + \frac{1}{n} e_{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$ sei. Sei P die Projektion auf W längs V. Wie in (a) sieht man

$$e_{2n} = -n e_{2n-1} + n d_n \in V \oplus W \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also $\|P e_{2n}\|_\infty = \|n d_n\|_\infty = n = n\|e_{2n}\|_\infty$. Es folgt, dass P nicht stetig ist.

3.24 Satz. *Seien V, W Teilräume von E mit $E = V \oplus W$. Dann gilt:*

(a) *Ist V endlichdimensional und W in E abgeschlossen, so ist $E = V \oplus_{\text{top}} W$.*

(b) *Ist E ein Banachraum und sind V und W abgeschlossen in E, so ist $E = V \oplus_{\text{top}} W$.*

Beweis. Sei $P\colon E \to E$ die Projektion mit $\operatorname{Bild} P = V$ und $\operatorname{Kern} P = W$.

(a) Angenommen, P ist nicht stetig. Dann existiert eine Folge $(x_n)_n \subseteq E \setminus \{0\}$ mit $\|Px_n\| \geq n\|x_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $y_n := \frac{x_n}{\|Px_n\|}$. Dann gilt $y_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber $Py_n \in S_V := \{z \in V \mid \|z\| = 1\}$ für alle n. Da $\dim V < \infty$, ist S_V kompakt. Also existiert $z \in S_V$ und eine Teilfolge $(y_{n_\ell})_\ell$ mit $\lim_{\ell\to\infty} Py_{n_\ell} = z$. Somit ist

$$-z = \lim_{\ell\to\infty} \underbrace{(I-P)y_{n_\ell}}_{\in W} \in W,$$

da W abgeschlossen ist. Es folgt $z \in S_V \cap W$, im Widerspruch zu $V \cap W = \{0\}$. Der Widerspruch zeigt die Stetigkeit von P.

(b) Nach Satz 3.19 reicht es, zu zeigen, dass P einen abgeschlossenen Graphen besitzt. Zum Beweis verwenden wir Bemerkung 3.20. Sei also $(x_n)_n$ eine Nullfolge in E derart, dass $y := \lim_{n\to\infty} Px_n \in E$ existiert. Da $V = \operatorname{Bild} P$ in E abgeschlossen ist, folgt $y \in V$. Da ferner $W = \operatorname{Bild}(I - P)$ in E abgeschlossen ist, folgt $y = -\lim_{n\to\infty}(I - P)x_n \in W$. Somit ist $y \in V \cap W = \{0\}$, d.h. $y = 0$. Gemäß Bemerkung 3.20 folgt die Behauptung. $\square$

4. Räume messbarer Funktionen

4.1. Präkompaktheit für Mengen stetiger Abbildungen

Seien stets X, Y metrische Räume und E ein normierter Raum.

4.1 Bemerkung. Ist X kompakt, so ist $C(X,Y) = C_b(X,Y)$ nach Bemerkung 2.41(b) und Bemerkung 2.42(a). Insbesondere ist dann also $C(X) = C_b(X)$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_\infty$ nach Bemerkungen und Beispiele 2.34(f).

4.2 Definition. Eine Teilmenge $H \subseteq C(X,Y)$ heißt

(a) *gleichgradig stetig in* $a \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$ für alle $f \in H$.

(b) *gleichgradig stetig*, wenn (a) für alle $a \in X$ gilt.

Eine Folge $(f_n)_n$ in $C(X,Y)$ heißt *gleichgradig stetig* (*in* $a \in X$), wenn dies für die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt.

4.3 Bemerkung und Beispiel. (a) Gleichgradige Stetigkeit vererbt sich auf Teilmengen von gleichgradig stetigen Mengen von Funktionen.

(b) Sei $L > 0$ fest gewählt und

$$H := \{f \in C(X,Y) \mid d(f(x), f(y)) \leq L\,\mathrm{d}(x,y) \quad \text{für alle } x, y \in X\}.$$

Dann ist H gleichgradig stetig.

(c) Sei $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ und sei die Funktionenfolge $(f_n)_n$ in $C(X,Y)$ definiert durch $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie man leicht sieht, ist diese Folge gleichgradig stetig in jedem Punkt $x \in [0,1)$. Sie ist allerdings nicht gleichgradig stetig in $x = 1$: Für festes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ gilt nämlich

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

aber

$$|f_n(\varepsilon^{\frac{1}{n}}) - f_n(1)| = 1 - \varepsilon > \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also existiert kein $\delta > 0$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation

$$|x - 1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(1)| < \varepsilon$$

gilt.

4.4 Definition und Satz. Sei $\ell^\infty(X,E) \coloneqq \{f\colon X \to E \mid f(X) \subseteq E \text{ beschränkt}\}$. Dann gilt:

(a) $\ell^\infty(X,E)$ ist ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in X}\|f(x)\|$ für $f \in \ell^\infty(X,E)$.

(b) $C_b(X,E)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\ell^\infty(X,E)$.

(c) Ist X kompakt, so ist $C(X,E) = C_b(X,E)$.

(d) Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$E \text{ Banachraum} \iff \ell^\infty(X,E) \text{ Banachraum} \iff C_b(X,E) \text{ Banachraum}$$

Beweis. (a)–(c) wie für $E = \mathbb{K}$. (d): leichte Übung. □

Ende der Videos von 2021-05-04

4.5 Satz (von Arzelà und Ascoli). *Ist X kompakt, so ist eine Teilmenge $H \subseteq C(X,E)$ genau dann präkompakt, wenn H gleichgradig stetig ist und wenn für alle $a \in X$ die Menge $H(a) \coloneqq \{f(a) \mid f \in H\}$ in E präkompakt ist.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Da H gleichgradig stetig ist, existiert zu jedem $a \in X$ ein $\delta_a > 0$ mit $f(U_{\delta_a}(a)) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(a))$ für alle $f \in H$. Da $X = \bigcup_{a\in X} U_{\delta_a}(a)$ kompakt ist, existieren $a_1,\ldots,a_n$ derart, dass

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_i \qquad \text{mit } U_i \coloneqq U_{\delta_{a_i}}(a_i) \text{ gilt.}$$

Da die Mengen $H(a_i) \subseteq E$, $i = 1,\ldots,n$ präkompakt sind, existiert eine endliche Menge $M \subseteq E$ mit $\bigcup_{i=1}^n H(a_i) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{6}}(M)$. Definiert man für $v = (v_1,\ldots,v_n) \in M^n$ also

$$L_v \coloneqq \Big\{ f \in H \;\Big|\; \|f(a_i) - v_i\| \le \frac{\varepsilon}{6} \text{ für } i = 1,\ldots,n \Big\},$$

so folgt nach Konstruktion $H \subseteq \bigcup_{v\in M^n} L_v$. Da es sich hier um eine endliche Vereinigung handelt, reicht es gemäß Bemerkung 2.42(b) nun, zu zeigen:

$$\operatorname{diam} L_v \le \varepsilon \text{ in } C(X,E) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty \text{ für alle } v \in M^n. \tag{4.1}$$

Seien dazu $f, g \in L_v$, und sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $x \in U_i$ für ein $i \in \{1,\ldots,n\}$, und somit

$$\|f(x) - g(x)\| \le \underbrace{\|f(x) - f(a_i)\|}_{\le\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f(a_i) - v_i\|}_{\le\frac{\varepsilon}{6}} + \underbrace{\|v_i - g(a_i)\|}_{\le\frac{\varepsilon}{6}} + \underbrace{\|g(a_i) - g(x)\|}_{\le\frac{\varepsilon}{3}} \le \varepsilon.$$

Es folgt $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$, und damit ist $\operatorname{diam} L_v \le \varepsilon$.

„$\Longrightarrow$“: Seien $a \in X$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq H$ mit

$$H \subseteq \bigcup_{f \in M} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(f) \qquad \text{in } C(X,E) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty. \tag{4.2}$$

Da M endlich ist, existiert zudem $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta(a)) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(a))$ für alle $f \in M$ gilt. Sei nun $g \in H$ beliebig. Dann existiert $f \in M$ mit $\|g - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$, und somit gilt für $y \in U_\delta(a)$:

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(a)\| &\leq \|g(y) - f(y)\| + \|f(y) - f(a)\| + \|f(a) - g(a)\| \\ &\leq 2\|f - g\|_\infty + \|f(y) - f(a)\| \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt $g(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(g(a))$, und dies liefert die gleichgradige Stetigkeit von H in a. Nach Definition von $\|\cdot\|_\infty$ liefert (4.2) aber auch direkt die Inklusion

$$H(a) \subseteq \bigcup_{f \in M} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(f(a)) \qquad \text{in } E \text{ bzgl. } \|\cdot\|;$$

also ist $H(a)$ in E präkompakt. $\square$

4.6 Korollar. *Seien X kompakt und $(f_n)_n$ eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge in $C(X)$. Dann hat $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $H := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(X)$. Dann ist H gleichgradig stetig und $H(a) = \{f(a) \mid f \in H\} \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt und damit auch präkompakt für alle $a \in X$. Mit Satz 4.5 folgt, dass H in $C(X)$ präkompakt und somit auch relativ kompakt ist (nach Bemerkung 2.42(c), da $C(X)$ vollständig ist). Also hat $(f_n)_n$ eine in $\overline{H}$ konvergente Teilfolge. $\square$

4.2. Der Satz von Stone-Weierstraß

Im Folgenden sei (X, d) stets ein kompakter metrischer Raum.

4.7 Bemerkung. Im Folgenden wollen wir ein hinreichendes Kriterium dafür herleiten, dass eine Teilmenge im normierten Raum $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ dicht liegt. Dabei nutzen wir die Tatsache, dass dieser Raum auch eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins ist, d.h.:

- $C(X)$ ist abgeschlossen unter der (punktweisen) Multiplikation $\cdot$ von Funktionen, und diese ist assoziativ, distributiv (bzgl. der Addition in $C(X)$) und kommutativ.
- Die konstante Einsfunktion $1 = 1_X$ ist ein Einselement für die Multiplikation.
- Die Skalarmultiplikation verträgt sich mit der Multiplikation von Funktionen, d.h. es gilt $\lambda(f \cdot g) = (\lambda f) \cdot g = f \cdot (\lambda g)$ für $f, g \in C(X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ein Unterraum $A \subseteq C(X)$ heißt *Teilalgebra* von $C(X)$ (mit 1), wenn gilt:

- $1 \in A$
- Sind $f, g \in A$, so ist auch $f \cdot g \in A$.

4.8 Satz (von Stone-Weierstraß)**.** *Sei A eine Teilalgebra von $C(X) = C(X, \mathbb{K})$ mit folgenden Eigenschaften.*

(i) *A trennt die Punkte von X, d.h. für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert eine Funktion $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

(ii) *Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist A abgeschlossen unter komplexer Konjugation, d.h. für $f \in A$ ist auch $\overline{f} \in A$.*

Dann liegt A dicht in $C(X)$.

Um dies zu beweisen, benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze:

4.9 Hilfssatz (Spezialfall der binomischen Reihe)**.** *Für $s \in [-1, 1]$ gilt*

$$\sqrt{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \tag{4.3}$$

mit

$$a_n = (-1)^n \binom{1/2}{n} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\frac{3}{2} - j}{j} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.4}$$

und die Reihe konvergiert absolut.

Beweis. Die aus der Analysis bekannte binomische Reihenentwicklung zur Potenz $\frac{1}{2}$ liefert (4.3) zunächst für $s \in (-1, 1)$. Wir zeigen nun die Abschätzung

$$|a_n| \leq n^{-\frac{3}{2}} \qquad \text{für } n \geq 1. \tag{4.5}$$

Dies ist klar für $a_1 = -\frac{1}{2}$. Für $n \geq 2$ gilt zudem

$$\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \left| \frac{\frac{3}{2} - n}{n} \right| = 1 - \frac{3}{2n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Hier haben wir die Konvexität der Funktion $(-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (1+t)^{\frac{3}{2}}$ verwendet (diese liefert die Ungleichung $(1+t)^{\frac{3}{2}} \geq 1 + \frac{3}{2}t$ für $t \in (-1, \infty)$). Per Induktion folgt also für $n \geq 2$:

$$|a_n| \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} |a_{n-1}| \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\frac{3}{2}} (n-1)^{-\frac{3}{2}} = n^{-\frac{3}{2}}.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe in (4.3) für alle $s \in [-1, 1]$ absolut, und mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt, dass Hilfssatz 4.9 auch für $s = \pm 1$ gilt. (Randbemerkung: Es gilt $a_n < 0$ für $n \geq 1$.) $\square$

4.10 Hilfssatz. *Sei A eine Teilalgebra von $C(X,\mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Der Abschluss $\overline{A}$ von A ist auch eine Teilalgebra von $C(X,\mathbb{R})$.*

(b) *Ist A abgeschlossen in $C(X,\mathbb{R})$, so gilt:*

   (i) *Ist $f \in A$ mit $f \geq 0$, so ist auch $\sqrt{f} \in A$.*

   (ii) *Sind $f, g \in A$, so sind auch die Funktionen $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} \in A$.*

Beweis. (a) Wegen $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ für $f, g \in C(X)$ ist die Multiplikation in $C(X)$ stetig (überlegen!). Das liefert $fg \in \overline{A}$ für $f, g \in \overline{A}$ (man approximiere f und g aus A heraus!). Da ferner $1 \in A \subseteq \overline{A}$ gilt, folgt die Behauptung.

(b)(i) Ohne Einschränkung sei $0 \leq f \leq 1$ (sonst normalisiere man f). Dann gilt $g = 1 - f \in A$ und $0 \leq g \leq 1$. Gemäß Hilfssatz 4.9 gilt

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{1-g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n(x) \qquad \text{für } x \in X \tag{4.6}$$

mit den Binomialkoeffizienten aus (4.4). Da A abgeschlossen ist und weil $\sum_{n=0}^{N} a_n g^n \in A$ gilt für $N \in \mathbb{N}$, reicht es, zu zeigen, dass die Reihe in (4.6) bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ von $C(X,\mathbb{R})$ konvergiert; dann ist $\sqrt{f} \in A$. Wegen $\|g^n\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n g^n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|g\|_\infty^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

gemäß Hilfssatz 4.9, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$ konvergiert absolut im Banachraum $C(X,\mathbb{R})$. Nach Satz 2.37 konvergiert sie dann auch.

(b)(ii) Wegen (b)(i) liegt mit f auch f^2 und somit $|f| = \sqrt{f^2}$ in A. Mit $f, g \in A$ sind also auch

$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\left(f + g - |f-g|\right) \quad \text{und} \quad \max\{f,g\} = -\min\{-f,-g\}$$

Funktionen in A. □

Beweis von Satz 4.8. Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $f \in C(X,\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es reicht, zu zeigen, dass $g \in \overline{A}$ existiert mit $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Zur Konstruktion der Funktion g betrachten wir zunächst beliebige $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Nach Voraussetzung existiert eine Funktion $h = h_{x,y} \in A$ mit $h(x) \neq h(y)$. Mit dieser Wahl definieren wir nun $g_{x,y} \in A$ durch

$$g_{x,y}(z) := f(y) + (f(x) - f(y)) \frac{h(z) - h(y)}{h(x) - h(y)} \qquad \text{für } z \in X;$$

dann gilt $g_{x,y}(x) = f(x)$ und $g_{x,y}(y) = f(y)$. Ferner definieren wir die konstante Funktion $g_{x,x} \in A$, $g_{x,x} \equiv f(x)$ für $x \in X$. Sei nun $x \in X$ fest gewählt. Für $y \in X$ betrachten wir dann die offene Umgebung

$$U_y \coloneqq \{z \in X \mid g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

von y. Aufgrund der Kompaktheit von X existieren $y_1, \ldots, y_n \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^n U_{y_j}$. Ferner liegt wegen Hilfssatz 4.10 die Funktion $g_x \coloneqq \min\{g_{x,y_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ in $\overline{A}$. Dabei gilt $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(z) < f(z) + \varepsilon$ für alle $z \in X$. Daher ist $V_x \coloneqq \{z \in X \mid g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von x. Wiederum aufgrund der Kompaktheit von X existieren $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Ferner ist auch $g \coloneqq \max\bigl\{g_{x_j} \bigm| j = 1, \ldots, m\bigr\} \in \overline{A}$, und es gilt

$$f(z) - \varepsilon < g < f(z) + \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in X.$$

Es folgt $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$, wie benötigt.

Wir betrachten schließlich den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $A_0 \coloneqq \{\operatorname{Re} f \mid f \in A\}$ gilt dann: 1. Für $f \in A$ ist auch $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in A$, und somit folgt $A_0 \subseteq A$. 2. Für $f \in A$ ist $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-\mathrm{i}f) \in A_0$. Aus 1. und 2. folgt die Mengengleichheit

$$A = A_0 + \mathrm{i}A_0, \tag{4.7}$$

und diese impliziert insbesondere, dass A_0 die Punkte von X trennt. Ferner ist A_0 eine Teilalgebra von $C(X, \mathbb{R})$, denn: Für $\operatorname{Re} f, \operatorname{Re} g \in A_0$ mit $f, g \in A$ ist

$$\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} g = \operatorname{Re}\bigl(f \operatorname{Re} g\bigr) \quad \in A_0,$$

da nach 1. auch $\operatorname{Re} g$ und somit $f \operatorname{Re} g$ in A liegt. Ferner ist offensichtlich $1 \in A_0$. Wie bereits gezeigt, liegt A_0 also dicht in $C(X, \mathbb{R})$, und somit liegt A wegen (4.7) auch dicht in $C(X, \mathbb{C})$. □

Ende der Videos von 2021-05-07

4.11 Korollar. (a) *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt. Dann liegen die Polynomfunktionen in $x_1, \ldots, x_N$ (mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$) dicht in $C(X, \mathbb{K})$.*

(b) *Sei $X \subseteq \mathbb{C}^N$ kompakt. Dann liegen die Polynomfunktionen in $z_1, \ldots, z_N$, $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_N$ mit komplexen Koeffizienten dicht in $C(X, \mathbb{C})$.*

Beweis. (a) Offensichtlich bilden die genannten Funktionen eine Teilalgebra von $C(X, \mathbb{K})$, welche die Punkte von X trennt, da zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in \mathbb{R}^N$ eine affin lineare Funktion $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ existiert mit $g(x) \neq g(y)$ (z.B. die Funktion $z \mapsto g(z) = (z - y) \cdot (x - y)$, $z \in \mathbb{R}^N$). Also folgt die Behauptung aus den Satz von Stone-Weierstraß.

(b) Die Behauptung folgt wie (a) aus Satz 4.8, wenn man zusätzlich beachtet, dass die hier betrachteten Funktionen eine Teilalgebra bilden, welche auch unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist. □

4.12 Definition und Korollar. Sei $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ der Vektorraum der stetigen 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Dann liegt der Teilraum T der trigonometrischen Polynome dicht in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Dabei heißt eine Funktion $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *trigonometrisches Polynom*, wenn es $n\in\mathbb{N}$ und $a_k\in\mathbb{C}$, $k=-n,\dots,n$, gibt mit $f(t)=\sum_{k=-n}^{n}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ für $t\in\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $S^1:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}\subseteq\mathbb{C}$ der Einheitskreis. Dann ist die Abbildung

$$T\colon C(S^1,\mathbb{C})\to C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\qquad (Tf)(t):=f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$$

ist ein isometrischer Isomorphismus (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$), welcher Polynome in z und $\bar z$ genau auf trigonometrische Polynome abbildet. Die Behauptung folgt also durch Anwendung von Korollar 4.11(b) auf $X:=S^1\subseteq\mathbb{C}$. $\square$

4.13 Korollar. *Ist (X,d) ein kompakter metrischer Raum, so ist $C(X)$ separabel.*

Beweis. Da X separabel ist (siehe Bemerkung 2.42), existieren $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$ derart, dass $\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ in X dicht liegt. Für $n\in\mathbb{N}$ sei nun $\varphi_n\in C(X)$ definiert durch $\varphi_n(x):=d(x,x_n)$. Sei ferner $A\subseteq C(X)$ die kleinste Teilalgebra, welche die Funktionen φ_n, $n\in\mathbb{N}$ enthält. Als Vektorraum ist $A=\operatorname{span}M$, wobei M die Menge der endlichen Produkte $\varphi_{n_1}\cdot\dots\cdot\varphi_{n_m}$ mit $m\in\mathbb{N}_0$ und $n_l\in\mathbb{N}$, $l=1,\dots,m$ ist (leeres Produkt ist die Einsfunktion). Offensichtlich ist M abzählbar. Ferner trennt die Algebra A die Punkte von X: Sind nämlich $x,y\in X$ mit $x\neq y$, so existiert $n\in\mathbb{N}$ mit $\varphi_n(x)=d(x,x_n)<\frac{d(x,y)}{2}$. Es folgt dann

$$\varphi_n(y)=d(y,x_n)>d(y,x)-d(x,x_n)>\frac{d(x,y)}{2}>\varphi_n(x).$$

Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ist A zudem abgeschlossen unter komplexer Konjugation, da die Funktionen φ_n, $n\in\mathbb{N}$ reellwertig sind. Also folgt mit dem Satz von Stone-Weierstraß, dass A in $C(X)$ dicht liegt. Somit ist M eine abzählbare totale Teilmenge von $C(X)$, und damit ist $C(X)$ separabel nach Satz 2.20. $\square$

4.3. L^p-Räume

Stets sei im Folgenden $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ ein (reeller) Maßraum. Ferner verwenden wir die Vereinbarung $\frac{r}{\infty}=0$ für $r\in\mathbb{R}$. Wir wiederholen zunächst zentrale Begriffe der Maß- und Integrationstheorie und Konvergenzsätze, welche größtenteils aus der Integrationstheorie bekannt sind.

4.14 Definition. Seien (Y,d) ein metrischer Raum und $f\colon\Omega\to Y$ eine Funktion.

- f heißt *μ-messbar* (oder einfach *messbar*), wenn für jede offene Teilmenge $U\subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(U)\subseteq\Omega$ μ-messbar ist.
- Ist f μ-messbar und nimmt f nur endlich viele Werte an, so nennt man f eine *Stufenfunktion* (auch *Treppenfunktion* oder *Elementarfunktion*).

Wir schreiben:

$$\mathcal{M}(\Omega, Y) := \{f : \Omega \to Y \mid f \ \mu\text{-messbar}\};$$
$$\mathcal{E}(\Omega, Y) := \{f : \Omega \to Y \mid f \ \text{Stufenfunktion}\}.$$

Im Fall $Y = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) schreiben wir auch $\mathcal{M}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{E}(\Omega)$. Im Fall $Y = \mathbb{R}$ gilt insbesondere

$$f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \iff \quad \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \text{ ist messbar für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Wir werden im Folgenden (nicht-endliche) Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *μ-messbar* nennen, wenn sie die Bedingung auf der rechten Seite von (4.8) erfüllen. Auch für solche Funktionen schreiben wir dann $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

4.15 Bemerkung. Für $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ gilt $f = \sum_{y \in \mathbb{K}} y 1_{\{f=y\}}$, wobei wir hier und im Folgenden die Kurzschreibweise $\{f = y\} := f^{-1}(y) = \{x \in \Omega \mid f(x) = y\} \subseteq \Omega$ verwenden.

4.16 Definition und Bemerkung. (a) Für eine μ-messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt offenbar:

$$\int_\Omega f^\pm \, \mathrm{d}\mu < \infty \qquad \iff \qquad \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty. \tag{4.9}$$

Hier seien $f^+ := \max\{f, 0\}$ bzw. $f^- := -\min\{f, 0\}$ der Positiv- bzw. Negativteil von f. Es gilt also u.a. $f^\pm \geq 0$ und $f = f^+ - f^-$. Die Funktion f heißt *μ-integrierbar*, falls die Bedingungen in (4.9) gelten. In diesem Fall setzt man

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu \quad \in \mathbb{R}.$$

(b) Eine μ-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *μ-integrierbar*, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ-integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_\Omega \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) Die Menge der μ-integrierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ oder $\mathfrak{L}^1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$.

4.17 Satz. (a) *Ist $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so existiert eine Folge $(f_k)_k$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ mit*

$$0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega, \ k \in \mathbb{N}$$

und $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.

(b) *Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{C})$, so existiert eine Folge in $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{C})$ mit $|f_k| \leq |f|$ in Ω für alle k und $f_k \to f$ für $k \to \infty$ punktweise in Ω.*

4.18 Bemerkung. Ist $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ mit μ-messbaren Teilmengen M_k und $\mu(M_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so können die Folgen $(f_k)_k$ in Satz 4.17(a) und (b) derart gewählt werden, dass gilt:

$$\mu(\{f_k \neq 0\}) < \infty \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dies gilt insbesondere im Fall $\Omega = \mathbb{R}^N$ und $\mu = \lambda$ (Lebesguemaß).

4.19 Satz (von der monotonen Konvergenz)**.** (a) *Seien $f_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ nicht-negative Funktionen mit $f_k \leq f_{k+1}$ f.ü. auf Ω für alle k, und sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ f.ü. definiert durch $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt: $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$.*

(b) *Seien $f_k \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$ $\mathbb{R}$-wertige Funktionen für $k \in \mathbb{N}$ mit $f_k \leq f_{k+1}$ f.ü. auf Ω für alle k, und sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ f.ü. definiert durch $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt: Ist die Folge der Integrale $\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$ beschränkt, so ist f integrierbar und $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$.*

4.20 Lemma (von Fatou)**.** *Sei $(f_k)_k \subseteq \mathfrak{L}^1(\Omega)$ eine Folge $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen.*

(a) *Ist $\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und existiert $g \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f_k \geq g$ f.ü. auf Ω für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $f := \liminf_{k\to\infty} f_k$ integrierbar und $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$.*

(b) *Ist $\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ und existiert $g \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f_k \leq g$ f.ü. auf Ω für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $f := \limsup_{k\to\infty} f_k$ integrierbar und $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$.*

4.21 Satz (von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue))**.** *Seien $f_k \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ derart, dass der punktweise Grenzwert $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ punktweise f.ü. auf Ω existiert. Ferner existiere eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion $g \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_k| \leq g$ f.ü. auf Ω gilt. Dann ist $f \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$, und es gilt $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$.*

Jetzt kommen wir zur Definition der L^p-Räume.

4.22 Definition und Bemerkung. Für eine μ-messbare Funktion $u\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid u \leq t \text{ f.ü. auf } \Omega\} \qquad (\textit{wesentliches Supremum von } u).$$

Man sieht leicht, dass stets $u \leq \operatorname{ess\,sup}_\Omega u$ f.ü. auf Ω gilt.

4.23 Satz und Definition. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Menge $\mathfrak{L}^p(\Omega)$ aller messbaren Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{K}$ mit*

$$\begin{cases} \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty, & \textit{im Fall } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| < \infty, & \textit{im Fall } p = \infty, \end{cases}$$

ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und durch

$$\|u\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{im Fall } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|, & \textit{im Fall } p = \infty, \end{cases}$$

wird eine Halbnorm auf $\mathfrak{L}^p(\Omega)$ definiert.

Beweis. Die Vektorraumeigenschaften sieht man sehr ähnlich wie in Definition und Satz 2.7. Sei nun

$$A_p := \begin{cases} \left\{ u \in \mathfrak{L}^p(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\mu \le 1 \right\} & \text{im Fall } p < \infty, \\ \left\{ u \in \mathfrak{L}^p(\Omega) \;\middle|\; \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u| \le 1 \right\} & \text{im Fall } p = \infty. \end{cases}$$

Offensichtlich ist A_p dann absolut konvex und absorbierend in $\mathfrak{L}^p(\Omega)$, und gemäß Satz 2.6 definiert

$$u \mapsto \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; \frac{u}{t} \in A_p \right\} = \|u\|_p.$$

eine Halbnorm auf $\mathfrak{L}^p(\Omega)$. □

4.24 Satz (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, d.h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien ferner $u \in \mathfrak{L}^p(\Omega)$ und $v \in \mathfrak{L}^q(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}\mu \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

Beweis. Die Ungleichung ist klar im Fall $p \in \{1, \infty\}$. Sei also nun $1 < p < \infty$, also auch $1 < q < \infty$. Ohne Einschränkung können wir $\|u\|_p, \|v\|_q > 0$ annehmen, denn andernfalls ist $uv = 0$ f.ü. in Ω und die Ungleichung ist trivialerweise erfüllt. Mit der Youngschen Ungleichung (vgl. Bemerkung 2.8(b)) folgt dann mit $s = \|u\|_p$, $t = \|v\|_q$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}\mu = st \int_\Omega \left|\frac{u}{s}\right| \left|\frac{v}{t}\right| \,\mathrm{d}\mu &\le st \int_\Omega \left(\frac{1}{p} \left|\frac{u}{s}\right|^p + \frac{1}{q} \left|\frac{v}{t}\right|^q \right) \mathrm{d}\mu \\ &= st \left(\frac{1}{p} \left\|\frac{u}{s}\right\|_p^p + \frac{1}{q} \left\|\frac{v}{t}\right\|_q^q \right) = st \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = st, \end{aligned}$$

wie behauptet. □

4.25 Bemerkung (verallgemeinerte Höldersche Ungleichung)**.** Seien $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$ mit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p}$ für ein $p \in [1, \infty]$. Seien ferner $u_i \in \mathfrak{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ gegeben. Dann gilt

$$u := u_1 \cdot \dots \cdot u_n \in \mathfrak{L}^p(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \|u\|_p \le \|u_1\|_{p_1} \cdot \dots \cdot \|u_n\|_{p_n}.$$

Dies folgt aus Satz 4.24 per Induktion (Übung).

4.26 Bemerkung und Beispiel. Sei $1 \le p < q \le \infty$.

(a) Ist $u \in \mathfrak{L}^p(\Omega) \cap \mathfrak{L}^q(\Omega)$, so ist auch $u \in \mathfrak{L}^s(\Omega)$ für $s \in (p, q)$, wobei gilt:

$$\|u\|_s \le \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha} \qquad \text{mit } \alpha := \frac{p(q-s)}{s(q-p)}.$$

Merkregel: $\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

(b) Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist $\mathfrak{L}^q(\Omega) \subseteq \mathfrak{L}^p(\Omega)$ und

$$\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q \qquad \text{für alle } u \in \mathfrak{L}^q(\Omega).$$

(c) Ist $\mu = \lambda$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^N$, so gilt

$$\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^N) \setminus \mathfrak{L}^q(\mathbb{R}^N) \neq \varnothing \neq \mathfrak{L}^q(\mathbb{R}^N) \setminus \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}^N).$$

Beweis. (a) Nach Voraussetzung ist $|u|^\alpha \in \mathfrak{L}^{p/\alpha}(\Omega)$ und $|u|^{1-\alpha} \in \mathfrak{L}^{q/(1-\alpha)}(\Omega)$. Ferner gilt

$$\frac{1}{p/\alpha} + \frac{1}{q/(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} = \frac{1}{s}$$

nach Voraussetzung. Gemäß Bemerkung 4.25 ist also $|u| = |u|^\alpha |u|^{1-\alpha} \in \mathfrak{L}^s(\Omega)$, also

$$u \in \mathfrak{L}^s(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad \|u\|_s \leq \big\||u|^\alpha\big\|_{\frac{p}{\alpha}} \big\||u|^{1-\alpha}\big\|_{\frac{q}{1-\alpha}} = \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha}.$$

(b) Sei $u \in \mathfrak{L}^q(\Omega)$. Wir schreiben $u = u \cdot 1_\Omega$. Mit $\beta \coloneqq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1}$ ist dann $1_\Omega \in \mathfrak{L}^\beta$ mit

$$\|1_\Omega\|_\beta = \left(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/\beta} = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Ferner ist $\frac{1}{q} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p}$, und somit folgt mit Bemerkung 4.25:

$$u \in \mathfrak{L}^p(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad \|u\|_p \leq \|1_\Omega\|_\beta \|u\|_q = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q.$$

(c) Übung. □

Ende der Videos von 2021-05-11

4.27 Definition und Satz (L^p-Raum)**.** Sei $Z \coloneqq \{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{K}) \mid u = 0 \text{ f.ü. auf } \Omega\}$, und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $Z \subseteq \mathfrak{L}^p(\Omega)$ ein Unterraum, und der Faktorraum $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{K}) \coloneqq \mathfrak{L}^p(\Omega)/Z$ ist ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_p$ gegeben durch

$$\|u + Z\|_p \coloneqq \|u\|_p \quad \text{für } u \in \mathfrak{L}^p(\Omega).$$

Beweis. Es ist klar, dass Z ein linearer Unterraum von $\mathfrak{L}^p$ ist. Die Integrationstheorie liefert für $u \in \mathfrak{L}^p(\Omega)$, dass $\|u\|_p = 0$ genau dann gilt, wenn u in Z liegt. Daraus folgt sofort, dass durch die Definition eine Norm gegeben ist. □

4.28 Bemerkung (u.a. zur Notation)**.** (a) Man schreibt anstelle von $u + Z$ oder $[u]$ (Äquivalenzklasse von u) oft nur $u \in L^p(\Omega)$. Man betrachtet die Elemente von $L^p(\Omega)$ also als Funktionen, die nur bis auf Abänderung auf Nullmengen eindeutig definiert sind.

(b) Angenommen, Ω ist ein metrischer Raum mit der Eigenschaft

$$\text{Ist } V \subseteq \Omega \text{ eine Nullmenge, so ist } \Omega \setminus V \text{ dicht in } \Omega$$

(z.B. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen mit Lebesgue-Maß). Sind dann $u, v \in \mathfrak{L}^p(\Omega)$ *stetige* Funktionen mit $u = v$ f.ü. auf Ω, so gilt $u = v$ auf ganz Ω. Es folgt also, dass dann die Abbildung

$$\mathfrak{L}^p(\Omega) \cap C(\Omega) \to L^p(\Omega), \qquad u \mapsto u + Z$$

injektiv ist.

4.29 Satz. *Sei $1 \le p \le \infty$.*

(a) *$L^p(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

(b) *Seien $u, u_k \in L^p(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben mit $\|u_k - u\|_p \to 0$ für $k \to \infty$. Dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_j$, welche punktweise f.ü. auf Ω gegen u konvergiert.*

Beweis. (a) Gemäß Satz 2.37 reicht es, zu zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe in $L^p(\Omega)$ auch konvergiert. Seien also $u_k \in L^p(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben mit

$$C_m := \sum_{k=m}^{\infty} \|u_k\|_p \to 0 \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Wir betrachten im Folgenden die Hilfsfunktionen

$$h_m := \sum_{k=m}^{\infty} |u_k| \colon \Omega \to [0, \infty], \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst:

$$h_m \in L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad \|h_m\|_p \le C_m \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Für festes $m \in \mathbb{N}$ und $j > m$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\Big\| \sum_{k=m}^{j} |u_k| \Big\|_p \le \sum_{k=m}^{j} \|u_k\|_p \le C_m.$$

Im Fall $p < \infty$ folgt dann aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_\Omega |h_m|^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{k=m}^{j} |u_k| \right)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \Big\| \sum_{k=m}^{j} |u_k| \Big\|_p^p \le C_m^p$$

und somit (4.10). Im Fall $p = \infty$ folgt ebenfalls

$$h_m = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=m}^{j} |u_k| \le C_m \qquad \text{f.ü. in } \Omega$$

und somit wiederum (4.10). Hier haben wir verwendet, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|u_k| \leq \|u_k\|_\infty$ f.ü. und dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Aus (4.10) folgt insbesondere:

$$h_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty \qquad \text{f.ü. auf } \Omega,$$

denn im Fall von $p < \infty$ gilt $|h_1|^p \in L^1(\Omega)$. Somit existiert $u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \in \mathbb{K}$ für fast alle $x \in \Omega$. Sei u trivial (also durch 0) auf ganz Ω fortgesetzt; dann ist u μ-messbar und $|u| \leq h_1$ auf Ω. Gemäß (4.10) gilt also $u \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_p \leq C_1$. Sei schließlich $g_m := u - \sum_{k=1}^{m-1} u_k$ für $m \geq 2$. Dann gilt $|g_m| \leq h_m$ f. ü. in Ω, und wegen (4.10) folgt

$$\|g_m\|_p \leq C_m \to 0 \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ gegen u.

(b) Wähle sukzessive $k_j \in \mathbb{N}$ mit $k_{j+1} > k_j$ und derart, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|v_j\|_p \leq 2^{-j} \qquad \text{für } v_j := u_{k_{j+1}} - u_{k_j} \in L^p(\Omega).$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{j \in \mathbb{N}} v_j$ absolut in $L^p(\Omega)$. Wie im Beweis von (a) folgt daher, dass sie sowohl bzgl. $\|\cdot\|_p$ als auch punktweise f.ü. auf Ω gegen eine Funktion $v \in L^p(\Omega)$ konvergiert. Nach Voraussetzung gilt aber auch

$$\left\| u - u_{k_1} - \sum_{j=1}^{m} v_j \right\|_p = \|u - u_{k_{m+1}}\|_p \to 0 \qquad \text{für } m \to \infty,$$

und somit folgt $v = u - u_{k_1}$. Es gilt also

$$u_{k_m} = \sum_{j=1}^{m-1} v_j + u_{k_1} \to v + u_{k_1} = u \quad \text{für } m \to \infty \text{ punktweise fast überall auf } \Omega,$$

d.h. die Teilfolge (u_{k_m}) hat die gewünschte Eigenschaft. □

4.30 Beispiel (wandernder Buckel)**.** Der Übergang zu einer Teilfolge in Satz 4.29(b) ist i.A. notwendig. Um dies einzusehen, betrachten wir $1 \leq p < \infty$ und $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}]; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier seien $k, \nu \in \mathbb{N}_0$ die jeweils eindeutig bestimmten Zahlen mit $n = 2^\nu + k$ und $k < 2^\nu$. Dann ist $f_n \in L^p([0,1])$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$; aber in keinem Punkt $x \in [0,1]$ konvergiert die Folge $(f_n(x))_n$ gegen 0.

4.31 Definition und Satz. Auf $L^2(\Omega)$ ist ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für } f, g \in L^2(\Omega)$$

(Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erübrigt sich hierbei natürlich die komplexe Konjugation). Dabei ist $\|\cdot\|_2$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm. Nach Satz 4.29 ist $L^2(\Omega)$ also ein Hilbertraum.

Beweis. Die Skalarprodukteigenschaften rechnet man problemlos nach. □

4.32 Satz. *Sei $1 \le p < \infty$, und sei $u \in L^p(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(u_k)_k \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$ mit $|u_k| \le |u|$ in Ω und $\mu(\{u_k \neq 0\}) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{k\to\infty}\|u_k - u\|_p = 0$.*

Beweis. Nach Satz 4.17 existieren $u_k \in \mathcal{E}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit $|u_k| \le |u|$ für alle k und $u_k \to u$ punktweise. Für festes k existiert dabei $c = c(k) > 0$ mit $|u_k| \ge c$ auf der Menge $\{u_k \neq 0\}$, und somit folgt

$$\mu(\{u_k \neq 0\})c^p \le \int_\Omega |u_k|^p\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Dies zeigt $\mu(\{u_k \neq 0\}) < \infty$. Sei nun $g_k \coloneqq |u_k - u|^p$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(g_k)_k$ punktweise gegen 0, wobei

$$|g_k| \le (|u_k| + |u|)^p \le 2^p|u|^p \qquad \text{auf } \Omega \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Mit dem Satz von Lebesgue (siehe Satz 4.21) folgt daher

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

und dies liefert $\lim_{k\to\infty}\|u_k - u\|_p = 0$. □

Bisher haben wir noch nicht geklärt, unter welchem Umständen die Räume $L^p(\Omega)$ separabel sind. Ist darüber hinaus Ω ein metrischer Raum, so ist es in Anwendung oft sehr nützlich, zu wissen, inwieweit stetige Funktionen in $L^p(\Omega)$ dicht liegen. Diese Fragen wollen wir im Folgenden erörtern. Dazu ist der folgende Satz sehr nützlich; des Weiteren benötigen wir einige Sachverhalte über Borel- und Radonmaße.

4.33 Satz (von Egorov (und Severini))**.** *Sei Y ein separabler metrischer Raum, und seien $u_n\colon \Omega \to Y$ messbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}$, welche punktweise f.ü. gegen eine Funktion $u\colon \Omega \to Y$ konvergieren. Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare Teilmenge $A \subseteq \Omega$ mit $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon$ und derart, dass $(u_n)_n$ auf A gleichmäßig gegen u konvergiert.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und für $n, k \in \mathbb{N}$ sei

$$E_{n,k} \coloneqq \bigcup_{m=n}^{\infty}\left\{x \in \Omega \;\middle|\; d(u_m(x), u(x)) \ge \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann gilt $E_{n+1,k} \subseteq E_{n,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Da ferner $(u_n)_n$ punktweise f.ü. gegen u konvergiert und $\mu(E_{1,k}) \leq \mu(\Omega) < \infty$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \mu\bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k}\bigg) = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Somit existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E_{n_k,k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Sei nun

$$A := \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k,k}.$$

Für $x \in A$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $x \notin E_{n_k,k}$, also

$$d(u_m(x), u(x)) < \frac{1}{k} \qquad \text{für } m \geq n_k.$$

Es folgt, dass die Folge $(u_n)_n$ auf A gleichmäßig gegen u konvergiert. Ferner gilt

$$\mu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k,k}) < \varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkung: Die Separabilität von Y wird im obigen Beweis benötigt, um die Messbarkeit der Mengen $E_{n,k}$ sicherzustellen.

——————————— Ende der Videos von 2021-05-14 ———————————

4.4. Approximation in L^p durch stetige Funktionen

Wir benötigen zunächst einige ergänzende Begriffsbildungen zur Kompaktheit. Sei im Folgenden (Ω, d) ein metrischer Raum.

4.34 Definition. Seien E ein normierter Raum und $U \subseteq E$ eine Teilmenge mit $0 \in U$. Mit $C_c(\Omega, U)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to U$ derart, dass der Träger

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega$$

kompakt ist. Im Fall $U = E$ ist diese Menge ein (i.A. nicht abgeschlossener!) Unterraum des normierten Raums $C_b(\Omega, E)$. Kurzschreibweise: $C_c(\Omega)$ anstelle von $C_c(\Omega, \mathbb{K})$.

4.35 Definition. Ω heißt

(a) *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in \Omega$ eine kompakte Umgebung besitzt.

(b) *σ-kompakt*, wenn kompakte Mengen $K_j \subseteq \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ existieren mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

4.36 Bemerkungen und Beispiele. (a) Ist Ω lokal kompakt und $K \subseteq \Omega$ kompakt, so besitzt K eine kompakte Umgebung. Ferner existiert in diesem Fall eine Funktion $u \in C_c(\Omega, [0, 1])$ mit $u \equiv 1$ in einer offenen Umgebung von K.

(b) Ist Ω σ-kompakt, so ist Ω separabel: Sind nämlich $K_j \subseteq \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ kompakt mit $\Omega := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, so sind die Mengen K_j separabel nach Bemerkung 2.42 und somit auch Ω (als abzählbare Vereinigung separabler Mengen).

(c) Ein normierter Raum E ist lokal kompakt genau dann, wenn E endlichdimensional ist (vgl. Satz 2.45).

(d) Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist σ-kompakt.

(e) Der Raum $\mathcal{F} \subseteq \ell^\infty$ der finiten $\mathbb{K}$-wertigen Folgen (versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$) ist σ-kompakt, denn es ist $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, wobei $K_j \subseteq \mathcal{F}$ die kompakte Teilmenge der Folgen $x = (x_\ell)_\ell \in \mathcal{F}$ mit $\|x\|_\infty \leq j$ und $x_\ell = 0$ für $\ell \geq j$ sei. $\mathcal{F}$ ist aber nicht lokal kompakt, da $\dim \mathcal{F} = \infty$ gilt.

4.37 Satz. *Sei Ω lokal kompakt und σ-kompakt. Dann gilt:*

(a) *Es existiert eine Folge kompakter Teilmengen M_j, $j \in \mathbb{N}$ von Ω derart, dass jede kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ in einer der Mengen M_j enthalten ist.*

(b) *Der Raum $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.*

Beweis. (a) Seien $K_j \subseteq \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ kompakt mit $\Omega := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Gemäß Bemerkungen und Beispiele 4.36(a) existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine kompakte Umgebung L_j von K_j. Setze $M_j := \bigcup_{i=1}^{j} L_i$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Mengen $U_j := \mathring{M}_j$, $j \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von Ω mit $U_j \subseteq U_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ existiert somit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq U_j \subseteq M_j$, wie behauptet.

(b) Sei M_j, $j \in \mathbb{N}$ wie in (a), und sei

$$C_j := \{f \in C_c(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subseteq M_j\} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Dabei ist C_j also isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $C(M_j)$ vermöge der isometrischen Einbettung $C_j \to C(M_j),\ f \mapsto f|_{M_j}$. Gemäß Korollar 4.13 ist dabei $C(M_j)$ separabel bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und wegen Satz 2.18 auch C_j. Ferner ist $C_c(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$ wegen (a), und somit ist $C_c(\Omega)$ ebenfalls separabel. □

4.38 Bemerkung. In Satz 4.37 kann die Bedingung der lokalen Kompaktheit nicht weggelassen werden, wie ein mit Hilfe von Bemerkungen und Beispiele 4.36(e) einfach zu konstruierendes Gegenbeispiel zeigt (Übung).

4.39 Definition. (a) Für ein Mengenteilsystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ definiert man $\langle \mathcal{O} \rangle^\sigma$ als den Schnitt aller σ-Algebren, welche $\mathcal{O}$ enthalten. Man nennt $\langle \mathcal{O} \rangle^\sigma$ dann die *von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra.*

(b) Ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ das System aller offenen Teilmengen von Ω, so nennt man $\mathcal{B}(\Omega) := \langle \mathcal{O} \rangle^\sigma$ die *Borelalgebra von* Ω, und die Elemente von $\mathcal{B}(\Omega)$ heißen *Borelmengen.*

(c) Ist μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{M}_\mu$ auf Ω mit $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}_\mu$, so nennt man μ ein *Borelmaß auf* Ω. Vorsicht: In Teilen der Literatur wird bei einem Borelmaß μ noch zusätzlich die Eigenschaft verlangt, dass μ lokal endlich ist, d.h. das jeder Punkt in Ω eine offene Umgebung U besitzt mit $\mu(U) < \infty$ (vgl. Definition 4.41(c)).

4.40 Beispiele (und Bemerkung zur Notation)**.** (a) Bekanntermaßen ist (nach Konstruktion, s. Vorlesung Integrationstheorie) das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^N$ ein Borelmaß. Ferner ist z.B. das Diracmaß δ_x zu $x \in \Omega$, gegeben durch

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases} \qquad \text{für } A \subseteq \Omega$$

ein Borelmaß.

(b) Ist im Folgenden von einem Borelmaß μ auf Ω die Rede, so betrachten wir μ stets auf einer gegebenen, zugehörigen σ-Algebra $\mathcal{M}_\mu \supseteq \mathcal{B}(\Omega)$, deren Elemente wir im Folgenden μ-messbar nennen.

4.41 Definition. Sei μ ein Borelmaß auf Ω.

(a) μ heißt *von außen regulär*, wenn für jede μ-messbare Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ offen}, A \subseteq U\}.$$

(b) μ heißt *von innen regulär*, wenn für jede μ-messbare Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq A\}.$$

(c) μ heißt *lokal endlich*, wenn jeder Punkt $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U besitzt mit $\mu(U) < \infty$.

(d) μ heißt *Radon-Maß auf* Ω, wenn μ von innen regulär und lokal endlich ist.

Bemerkung: Ist Ω lokal kompakt, so ist (c) offensichtlich äquivalent zur Eigenschaft

$$\mu(K) < \infty \qquad \text{für jede kompakte Teilmenge } K \subseteq \Omega. \tag{4.11}$$

4.42 Satz. *Sei Ω σ-kompakt, und sei μ ein von außen reguläres und lokal endliches Borelmaß auf Ω. Dann gilt:*

(a) *μ ist auch von innen regulär und somit ein Radon-Maß.*

(b) *Für jede μ-messbare Teilmenge $A \subseteq \Omega$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren eine offene Menge $U \subseteq \Omega$ und eine abgeschlossene Menge $V \subseteq \Omega$ mit $V \subseteq A \subseteq U$ und $\mu(U \setminus V) < \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ mit kompakten Teilmengen $K_j \subseteq \Omega$. Ohne Einschränkung können wir dabei $K_j \subseteq K_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$ annehmen. Sei $A \subseteq \Omega$ μ-messbar. Wir zeigen zunächst (b) für A.

1. Behauptung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $U \subseteq \Omega$ offen mit $A \subseteq U$ und $\mu(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zum Beweis sei $A_j := A \cap K_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $A_j \subseteq K_j$ und somit $\mu(A_j) \leq \mu(K_j) < \infty$ gemäß (4.11). Da μ von außen regulär ist, existieren nun offene Mengen $U_j \subseteq \Omega$ mit $A_j \subseteq U_j$ und $\mu(U_j) < \mu(A_j) + \varepsilon 2^{-j-1}$, somit also

$$\mu(U_j \setminus A_j) = \mu(U_j) - \mu(A_j) < \varepsilon 2^{-j-1} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Mit $U := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ folgt $U \setminus A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (U_j \setminus A_j)$ und

$$\mu(U \setminus A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(U_j \setminus A_j) < \frac{\varepsilon}{2},$$

wie behauptet. Anwendung der 1. Behauptung auf die μ-messbare Menge $\Omega \setminus A$ liefert nun auch $W \subseteq \Omega$ offen mit $\Omega \setminus A \subseteq W$ und $\mu(W \setminus (\Omega \setminus A)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $V := \Omega \setminus W$. Dann ist V abgeschlossen in Ω mit $V \subseteq A$; ferner gilt $W \setminus (\Omega \setminus A) = W \cap A = A \setminus V$ und daher

$$\mu(U \setminus V) = \mu(U \setminus A) + \mu(A \setminus V) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit ist (b) gezeigt.

Nun zu (a). Wir müssen zeigen:

$$\mu(A) \leq \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq A\}; \tag{4.12}$$

die umgekehrte Ungleichung ist offensichtlich. Für die oben definierten Mengen $A_j := A \cap K_j$ gilt $A_j \subseteq A_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, somit also

$$\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Anwendung von (b) liefert abgeschlossene Mengen $V_j \subseteq \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ mit $V_j \subseteq A_j$ und $\mu(A_j \setminus V_j) < \varepsilon$, d.h $\mu(A_j) \leq \mu(V_j) + \varepsilon$. Ferner ist V_j kompakt, da $V_j \subseteq K_j$ gilt. Es folgt

$$\mu(A) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu(V_j) + \varepsilon \leq \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq A\} + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

4.43 Beispiel. Bekannterweise ist das Lebesguemaß λ auf $\mathbb{R}^N$ ein von außen reguläres und lokal endliches Borelmaß. Somit ist λ ein Radonmaß.

4.44 Hilfssatz. *Sei Ω lokal kompakt und μ ein lokal endliches Borelmaß auf Ω. Dann existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Umgebung L von K mit $\mu(L \setminus K) < \varepsilon$.*

Beweis. Übung. Man zeige zunächst, dass $B_{\frac{1}{n}}(K)$ für ausreichend großes n kompakt ist. $\square$

4.45 Satz (von Lusin)**.** *Sei μ ein Radon-Maß auf Ω. Sei ferner $u\colon \Omega \to \mathbb{K}$ μ-messbar. Dann gilt:*

(a) *Ist $A \subseteq \Omega$ μ-messbar mit $\mu(A) < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ und derart, dass $u|_K$ stetig ist.*

(b) *Ist Ω lokal kompakt und $\mu(\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}) < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u_\varepsilon \in C_c(\Omega)$ mit*

$$\mu(\{x \in \Omega \mid u(x) \neq u_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon \qquad \textit{und} \qquad \sup_{x\in\Omega}|u_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Beweis. (a) Ohne Einschränkung sei $u \equiv 0$ in $\Omega \setminus A$ (sonst betrachte $u1_A$ anstelle von u). 1. Spezialfall: u ist eine Elementarfunktion, d.h. $u = \sum_{k=1}^n a_k 1_{B_k}$ mit μ-messbaren disjunkten Teilmengen $B_k \subseteq A$ und $a_k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $k = 1, \dots, n$. Sei ferner $B_0 :=$ $\{x \in A \mid u(x) = 0\}$. Wegen $\mu(B_k) \leq \mu(A) < \infty$ und der inneren Regularität von μ existieren dann kompakte Teilmengen $C_k \subseteq B_k$ mit $\mu(B_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{n+1}$ für $k = 0, \dots, n$. Dabei gilt $\min_{k\neq j} \operatorname{dist}(C_k, C_j) > 0$, da es sich um disjunkte kompakte Mengen handelt. Sei nun $K := \bigcup_{k=0}^n C_k \subseteq A$. Dann ist K kompakt. Ferner ist u lokal konstant und somit stetig auf K. Schließlich ist $A \setminus K$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $B_k \setminus C_k$ und somit

$$\mu(A \setminus K) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k \setminus C_k) < \varepsilon.$$

2. Allgemeiner Fall: Gemäß Satz 4.17 existiert eine Folge von Elementarfunktionen u_n mit $|u_n| \leq |u|$ für alle n und $u_n \to u$ punktweise in Ω für $n \to \infty$. Nach dem Spezialfall existieren ferner kompakte Teilmengen $K_n \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon 2^{-n-1}$ und derart, dass $u_n|_{K_n}$ stetig ist. Ferner existiert gemäß Satz 4.33 eine μ-messbare Teilmenge $L \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus L) < \frac{\varepsilon}{4}$ und $u_n \to u$ gleichmäßig auf L für $n \to \infty$. Schließlich existiert aufgrund der inneren Regularität von μ eine kompakte Teilmenge $K_0 \subseteq L$ mit $\mu(L \setminus K_0) < \frac{\varepsilon}{4}$, also

$$\mu(A \setminus K_0) \leq \mu(A \setminus L) + \mu(L \setminus K_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $K := \bigcap_{n=0}^\infty K_n$. Dann ist $K \subseteq A$ kompakt und

$$\mu(A \setminus K) \leq \sum_{n=0}^\infty \mu(A \setminus K_n) < \varepsilon \sum_{n=0}^\infty 2^{-n-1} = \varepsilon.$$

In K sind ferner alle Funktionen u_n, $n \in \mathbb{N}$ stetig; ferner gilt $u_n \to u$ gleichmäßig auf K. Es folgt, dass $u|_K$ stetig ist.

(b) Anwendung von (a) auf $A := \{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ liefert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$ und derart, dass $u|_K$ stetig ist. Der Fortsetzungssatz von Tietze (aus der mengentheoretischen Topologie) besagt, dass sich $u|_K$ zu einer stetigen Funktion $\tilde{u}\colon \Omega \to \mathbb{K}$ fortsetzen lässt mit $\|\tilde{u}\|_\infty \leq \sup_{x\in K}|u(x)|$. Gemäß Hilfssatz 4.44

existiert ferner eine kompakte Umgebung L von K mit $\mu(L \smallsetminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun

$$\xi \in C_{\mathrm{c}}(\Omega, [0,1]) \quad \text{definiert durch} \quad \xi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \Omega \smallsetminus L)}{\operatorname{dist}(x, K) + \operatorname{dist}(x, \Omega \smallsetminus L)},$$

und sei $u_\varepsilon \coloneqq \xi \tilde{u} \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Dann ist $\xi \equiv 1$ auf K und $\xi \equiv 0$ auf $\Omega \smallsetminus L$. Nach Konstruktion ist also

$$\{x \in \Omega \mid u(x) \neq u_\varepsilon(x)\} \subseteq (A \cup L) \smallsetminus K = (A \smallsetminus K) \cup (L \smallsetminus K)$$

und somit

$$\mu(\{x \in \Omega \mid u(x) \neq u_\varepsilon(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ferner ist

$$\sup_{x \in \Omega} |u_\varepsilon(x)| \leq \|\tilde{u}\|_\infty \leq \sup_{x \in K} |u(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

wie gewünscht. □

Ende der Videos von 2021-05-18

4.46 Beispiel. Sei $\Omega = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, versehen mit der Betragsmetrik. Das Lebesguemaß λ auf Ω erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes von Lusin. Wir betrachten die Dirichletfunktion

$$u \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

geben uns $\varepsilon > 0$ vor und konstruieren eine kompakte Menge $K \subseteq [0,1]$ mit $\lambda([0,1] \smallsetminus K) < \varepsilon$ so, dass $u|_K$ stetig ist: Sei $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $U_n \coloneqq U_{\varepsilon 2^{-n-2}}(q_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei ferner

$$K \coloneqq [0,1] \smallsetminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Dann ist K kompakt, $u \equiv 0$ auf K (und somit dort stetig) sowie

$$\lambda([0,1] \smallsetminus K) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(U_n) = \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

4.47 Satz. *Seien Ω ein lokal kompakter metrischer Raum und μ ein Radon-Maß auf Ω. Sei ferner $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

(a) *$C_{\mathrm{c}}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ ist dicht.*

(b) *Ist Ω ferner σ-kompakt, so ist $L^p(\Omega)$ separabel.*

Beweis. (a) Sei $u \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 4.32 existiert $v \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $|v| \leq |u|$ in Ω, $\mu(\{v \neq 0\}) < \infty$ und $\|u - v\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Ohne Einschränkung sei dabei $v \neq 0$, d.h. $\|v\|_\infty > 0$. Nach dem Satz von Lusin (Satz 4.45(b)) existiert nun $w \in C_c(\Omega)$ mit $\|w\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ und $\mu(\{w \neq v\}) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4\|v\|_\infty}\right)^p$, also

$$\|w - v\|_p^p = \int_\Omega |w - v|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(\{w \neq v\}) 2^p \|v\|_\infty^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Es folgt $\|v - w\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $\|u - w\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - w\|_p < \varepsilon$.

(b) Gemäß Satz 4.37(a) existieren kompakte Mengen $M_j \subseteq \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ und derart, dass jede kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ in einer der Mengen M_j enthalten ist. Wie im Beweis von Satz 4.37(b) setzen wir

$$C_j := \{f \in C_c(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subseteq M_j\} \subseteq C(M_j) \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Gemäß Korollar 4.13 ist $C(M_j)$ und somit auch C_j separabel bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Daher existieren abzählbare und dichte Teilmengen $A_j \subseteq C_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir zeigen: Die abzählbare Menge $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$. Sei dazu $u \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Gemäß (a) existiert $v \in C_c(\Omega)$ mit $\|u - v\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$; dabei ist $v \in C_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Somit existiert $w \in A_j$ mit $\mu(M_j)^{\frac{1}{p}} \|v - w\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist

$$\|w - v\|_p^p = \int_\Omega |w - v|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(M_j) \|v - w\|_\infty^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

und somit $\|w - v\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $\|u - w\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - w\|_p < \varepsilon$. Also ist A dicht in $L^p(\Omega)$, wie behauptet. □

4.48 Bemerkung. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbar, so ist $L^p(\Omega)$ nach Satz 2.18 separabel, da man $L^p(\Omega)$ als eine Teilmenge des gemäß Satz 4.47 separablen Raums $L^p(\mathbb{R}^N)$ auffassen kann (vermöge trivialer Fortsetzung).

4.49 Satz. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbar mit $\lambda(\Omega) > 0$, so ist $L^\infty(\Omega)$ (definiert bzgl. des Lebesgue-Maßes) nicht separabel.*

Beweisskizze. Für $r \geq 0$ sei $\Omega_r := B_r(0) \cap \Omega$. Mit dem Satz von Lebesgue (siehe Satz 4.21) sieht man, dass die monoton wachsende Funktion

$$g \colon [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad g(r) = \lambda(\Omega_r)$$

stetig ist. Ferner ist $g(0) = 0$ und $\lim_{r\to\infty} g(r) = \lambda(\Omega)$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe Satz 4.19). Für $s \in (0, \lambda(\Omega))$ existiert nach dem Zwischenwertsatz also ein $r_s \in [0, \infty)$ mit $g(r_s) = s$. Betrachte nun die Menge

$$M := \left\{ 1_{\Omega_{r_s}} \;\middle|\; 0 < s < \lambda(\Omega) \right\} \subseteq L^\infty(\Omega).$$

Für $0 < s < t < \lambda(\Omega)$ ist dann $r_s < r_t$, also $\Omega_{r_s} \subseteq \Omega_{r_t}$ sowie $\lambda(\Omega_{r_t} \setminus \Omega_{r_s}) = t - s > 0$; somit also $\|1_{\Omega_{r_s}} - 1_{\Omega_{r_t}}\|_\infty = 1$. Daher besteht $U_{1/3}(M)$ aus überabzählbar vielen paarweise disjunkten offenen Teilmengen von $L^\infty(\Omega)$. Es folgt, dass $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel ist. □

4.50 Definition und Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega) \coloneqq \{f \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{K}) \mid \operatorname{supp} f \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Dann liegt $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$, aber (offensichtlich) nicht dicht in $L^{\infty}(\Omega)$. Hierbei sei das Lebesguemaß auf Ω zugrunde gelegt.

Beweisskizze. Sei $u \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.47 existiert $v \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ mit $\|u - v\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen v trivial auf $\mathbb{R}^N$ fort. Wir betrachten ferner den Glättungskern

$$\rho \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^N), \qquad \rho(x) \coloneqq \begin{cases} c\ \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases}$$

wobei $c > 0$ so gewählt sei, dass $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$ gilt. Für $h > 0$ sei ferner

$$\rho_h \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^N), \qquad \rho_h(x) = \frac{1}{h^N} \rho\left(\frac{x}{h}\right).$$

Dann ist $\operatorname{supp} \rho_h = B_h(0)$ und es gilt ebenfalls $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_h = 1$ für $h > 0$. Nun definieren wir

$$v_h \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad v_h(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_h(x - y) v(y) \,\mathrm{d}y,$$

für $0 < h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$. Dann ist $v_h \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{supp} v_h \subseteq B_h(\operatorname{supp} v) \subseteq \Omega$. Ferner gilt mit

$$\varepsilon_h \coloneqq \sup\bigl\{|v(x) - v(y)| \bigm| x, y \in \Omega,\ |x - y| \le h\bigr\}$$

die Abschätzung

$$|v_h(x) - v(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho_h(x - y)|v(y) - v(x)| \,\mathrm{d}y \le \varepsilon_h \int_{\mathbb{R}^N} \rho_h(x - y) \,\mathrm{d}y = \varepsilon_h \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Da v gleichmäßig stetig ist, gilt $\lim_{h \to 0} \varepsilon_h = 0$. Es folgt $v_h \to v$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty}$ in Ω und somit auch $\|v_h - v\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ für $h \to 0$, da $\operatorname{supp} v_h$ für $h \le 1$ in der kompakten Menge $B_1(\operatorname{supp} v)$ enthalten ist (vgl. Bemerkung und Beispiel 4.26(b)). Die Einschränkung $w_h \coloneqq v_h|_{\Omega} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ erfüllt also $\|w_h - u\|_p \le \|w_h - v\|_p + \|v - u\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für $0 < h < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$ genügend klein gewählt. $\square$

5. Hilberträume

5.1. Orthogonalität

Stets sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$.

5.1 Satz und Definition. *Sei $C \subsetneq H$ konvex, abgeschlossen und nichtleer. Dann existiert zu jedem $x \in H$ genau ein $y \in C$ mit $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, C)$. Wir setzen $y = P(x)$ und nennen $P\colon H \to H$ die* (abstandsminimierende) Projektion auf C.

Beweis. Zur Existenz: Sei $x \in H$ und $\alpha \coloneqq \operatorname{dist}(x, C)$. Sei ferner $(y_n)_n \subseteq C$ eine Folge mit

$$\|x - y_n\| \to \alpha \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{5.1}$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$ aufgrund der Konvexität von C, also

$$\begin{aligned} 4\alpha^2 \le 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 &= \|x - y_m + x - y_n\|^2 \\ &= 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - \|\underbrace{x - y_m - (x-y_n)}_{y_n-y_m}\|^2 \end{aligned}$$

und somit wegen (5.1)

$$\sup_{m\ge n}\|y_m - y_n\|^2 \le 2\sup_{m\ge n}(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4\alpha^2 \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Es folgt, dass $(y_n)_n \subseteq C$ eine Cauchyfolge ist. Ferner ist C als abgeschlossene Teilmenge des Hilbertraums H nach Satz 2.32 vollständig, also existiert $y \coloneqq \lim_n y_n \in C$. Ferner gilt $\|x-y\| = \lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = \alpha$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $y' \in C$ mit $\|x-y'\| = \alpha = \|x-y\|$. Dann erfüllt die Folge $(y, y', y, y', \ldots)$ Bedingung (5.1) und ist daher nach obigem Argument eine Cauchyfolge. Dies liefert $y = y'$. □

5.2 Satz. *Sind $C \subsetneq H$ und $P\colon H \to H$ wie in Satz und Definition 5.1 und $Q \coloneqq \operatorname{id} - P\colon H \to H$, so gilt:*

(a) $P|_C = \operatorname{id}_C$.

(b) *Für alle $x \in H$, $y \in C$ ist* $\operatorname{Re}\langle Q(x), P(x) - y\rangle \ge 0$.

(c) $\|P(x_1) - P(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ *für alle* $x_1, x_2 \in H$*, insbesondere ist* P *Lipschitz-stetig.*

Beweis. (a) ist klar nach Definition.

(b) Für $\varepsilon \in (0,1)$ ist $z_\varepsilon := P(x) + \varepsilon(y - P(x)) \in C$(da C konvex), also

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - z_\varepsilon\|^2 - \operatorname{dist}(x,C)^2 &= \|Q(x) + \varepsilon(P(x) - y)\|^2 - \|Q(x)\|^2 \\ &= 2\varepsilon \operatorname{Re}\langle Q(x), P(x) - y\rangle + \varepsilon^2 \|P(x) - y\|^2 =: t(\varepsilon) \end{aligned}$$

und somit

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{t(\varepsilon)}{2\varepsilon} = \operatorname{Re}\langle Q(x), P(x) - y\rangle.$$

(c) Es ist wegen (b)

$$\begin{aligned} &\|x_1 - x_2\|^2 \\ &\quad = \|Q(x_1) - Q(x_2) + P(x_1) - P(x_2)\|^2 \\ &\quad = \|Q(x_1) - Q(x_2)\|^2 + \|P(x_1) - P(x_2)\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Q(x_1) - Q(x_2), P(x_1) - P(x_2)\rangle \\ &\quad \geq \|P(x_1) - P(x_2)\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Q(x_1), P(x_1) - P(x_2)\rangle + 2\operatorname{Re}\langle Q(x_2), P(x_2) - P(x_1)\rangle \\ &\quad \geq \|P(x_1) - P(x_2)\|^2. \end{aligned}$$

□

5.3 Bemerkung. Satz und Definition 5.1 und Satz 5.2 gelten auch, wenn $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $C \subseteq H$ nichtleer, konvex und vollständig ist, insbesondere also dann, wenn die abgeschlossene, nichtleere und konvexe Teilmenge C in einem endlichdimensionalen Teilraum des Prähilbertraums H enthalten ist.

5.4 Beispiel. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue-messbar, $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ sowie $C := \{u \in L^2(\Omega) \mid u \geq 0 \text{ f.ü. auf } \Omega\}$. Man sieht leicht, dass C eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von H ist. Wir zeigen nun, dass die Projektion P von H auf C gegeben ist durch $P(u) = u^+ = \max\{0, u\}$ für $u \in H$. Tatsächlich ist $u^+ \in C$ für alle $u \in H$, und für $v \in C$ gilt

$$\begin{aligned} \|v - u\|_2^2 = \int_\Omega (v-u)^2 \geq \int_{\{u<0\}} (v-u)^2 \\ \geq \int_{\{u<0\}} u^2 = \int_\Omega (u^+ - u)^2 = \|u^+ - u\|_2^2. \end{aligned}$$

Also ist u^+ das zu u abstandsminimierende Element in C, d.h. $P(u) = u^+$ gemäß Satz und Definition 5.1.

———— Ende der Videos von 2021-05-21 ————

5.5 Definition und Satz. Für $M \subseteq H$ sei $M^\perp := \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in M\}$. Dann gilt:

(a) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H

(b) $M^\perp = (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$

Beweis. (a) folgt direkt aus der Linearität und Stetigkeit des Skalarprodukts in der ersten Komponente.

Zu (b): Offensichtlich gilt für Teilmengen $A \subseteq B \subseteq H$ die Inklusionsumkehrung $B^\perp \subseteq A^\perp$. Wegen $M \subseteq \overline{\operatorname{span} M}$ folgt also $(\overline{\operatorname{span} M})^\perp \subseteq M^\perp$. Sei umgekehrt $x \in M^\perp$, und sei zunächst $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n \in \operatorname{span} M$ mit $y_i \in M$, $\alpha_i \in K$ gegeben. Dann ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \langle x, y_i \rangle = 0.$$

Ist schließlich $y \in \overline{\operatorname{span} M}$ und $(y^n)_n$ eine Folge in $\operatorname{span} M$ mit $\lim_{n\to\infty} y^n = y$, so folgt $\langle x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y^n \rangle = 0$. Somit ist $x \in (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$, und insgesamt folgt $M^\perp = (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$. □

5.6 Satz und Definition. *Sind $V, W \subseteq H$ Unterräume mit $H = V + W$ und $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $v \in V$, $w \in W$, so gilt:*

(a) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ *für alle $v \in V$, $w \in W$ („Satz des Pythagoras").*

(b) $W = V^\perp$ *und* $V = W^\perp$. *Insbesondere sind V, W abgeschlossen in H nach Definition und Satz 5.5*(a).

(c) $H = V \oplus_{\text{top}} W$.

Wir schreiben dann $H = V \oplus_\perp W$, nennen diese Zerlegung orthogonal *und die Räume V und W* orthogonale Komplementärräume.

Beweis. (a) Für alle $v \in V, w \in W$ ist

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re} \underbrace{\langle v, w \rangle}_{=0} = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

(b) Nach Voraussetzung ist $W \subseteq V^\perp$ und $V \subseteq W^\perp$. Sei nun $w \in V^\perp$. Da $H = V + W$ ist, existieren $v \in V$ und $\tilde{w} \in W$ mit $w = v + \tilde{w}$, also

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \underbrace{w - \tilde{w}}_{\in V^\perp}, v \rangle = 0.$$

Es folgt $w = \tilde{w} \in W$. Dies zeigt $W = V^\perp$. Genauso folgt $V = W^\perp$.

(c) Es gilt $V \cap W = \{0\}$, da $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$ für alle $x \in V \cap W$. Also gilt: $H = V \oplus W$. Da V, W gemäß (b) in H abgeschlossen sind, folgt $H = V \oplus_{\text{top}} W$ nach Satz 3.24(b). □

5.7 Satz und Definition. *Sei V ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann gilt $H = V \oplus_\perp V^\perp$, und die (abstandsminimierende) Projektion P auf V aus Satz und Definition 5.1 erfüllt:*

(a) $P \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$ *und Bild* $P = V$, *Kern* $P = V^\perp$

(b) $\|P\| = 1$ *falls* $V \neq \{0\}$

Man nennt P *die* orthogonale Projektion auf V.

Beweis. Wir zeigen zunächst: Für $x \in H$ ist

$$Q(x) := x - P(x) \in V^\perp. \tag{5.2}$$

Nach Satz 5.2(b) gilt für alle $y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq \mathrm{Re}\langle Q(x), P(x) - \underbrace{(-\overline{\alpha}y + P(x))}_{\in V}\rangle = \mathrm{Re}\langle Q(x), \overline{\alpha}y\rangle = \mathrm{Re}\big(\alpha\langle Q(x), y\rangle\big).$$

Durch Wahl von $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ folgt $\mathrm{Re}\langle Q(x), y\rangle = 0$ für alle $y \in V$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so folgt durch Wahl von $\alpha = \pm i$ auch

$$0 \leq \mathrm{Re}\big(\pm \mathrm{i}\langle Q(x), y\rangle\big) = \mp \mathrm{Im}\langle Q(x), y\rangle, \quad \text{also} \quad \mathrm{Im}\langle Q(x), y\rangle = 0 \qquad \text{für alle } y \in V.$$

Insgesamt folgt $\langle Q(x), y\rangle = 0$ für alle $y \in V$, und somit ist $Q(x) \in V^\perp$, wie behauptet. Aus (5.2) folgt nun $x = P(x) + Q(x) \in V + V^\perp$ für alle $x \in H$, also $H = V + V^\perp$. Nach Satz und Definition 5.6 ist also $H = V \oplus_\perp V^\perp$. Sei nun $\widetilde{P} \in \mathcal{L}(H)$ die Projektion auf V längs $V^\perp$ im Sinne von Definition 3.22. Dann gilt für alle $x \in H$:

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x, V)^2 = \|x - P(x)\|^2 &= \|\underbrace{x - \widetilde{P}(x)}_{\in V^\perp} + \underbrace{\widetilde{P}(x) - P(x)}_{\in V}\|^2 \\ &\overset{\text{Satz und Definition 5.6(a)}}{=} \|x - \widetilde{P}(x)\|^2 + \|\widetilde{P}(x) - P(x)\|^2 \geq \|x - \widetilde{P}(x)\|^2 \geq \mathrm{dist}(x, V)^2.\end{aligned}$$

Dies erzwingt $\|\widetilde{P}(x) - P(x)\|^2 = 0$, also $\widetilde{P}(x) = P(x)$ für alle $x \in H$. Insbesondere ist $P \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$ sowie $\mathrm{Bild}\, P = V$ und $\mathrm{Kern}\, P = V^\perp$. Weiterhin ist $\|Px\| \leq \|x\|$ für $x \in H$ nach Satz 5.2(c) und $\|Px\| = \|x\|$ für $x \in V$. Dies liefert $\|P\| = 1$, falls $V \neq \{0\}$. □

5.8 Korollar. *Für* $M \subseteq H$ *gelten:*

(a) $M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span}\, M}$.

(b) M *total in* $H \iff M^\perp = \{0\}$.

Beweis. (a) Setze $V = \overline{\mathrm{span}\, M}$. Dann ist $H = V \oplus_\perp V^\perp$ nach Satz und Definition 5.7, also $V = V^{\perp\perp} = M^{\perp\perp}$ wegen Definition und Satz 5.5(b).

(b) Ist M total, so ist $M^\perp = \overline{\mathrm{span}\, M}^\perp = H^\perp = \{0\}$ wegen Definition und Satz 5.5(b). Ist umgekehrt $M^\perp = \{0\}$, so ist $H = \{0\}^\perp = M^{\perp\perp} \overset{\text{(a)}}{=} \overline{\mathrm{span}\, M}$. Also ist M total. □

5.9 Definition und Bemerkung. Für $x \in H$ sei

$$\varphi_x \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{K}) \qquad \text{definiert durch} \quad \varphi_x(y) := \langle y, x \rangle \quad \text{für } y \in H.$$

Die Linearität von φ_x ist offensichtlich. Da ferner

$$|\varphi_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \le \|y\| \, \|x\| \quad \text{für alle } y \in H \qquad \text{und} \qquad |\varphi_x(x)| = \|x\|^2,$$

ist φ_x in der Tat auch stetig mit

$$\|\varphi_x\| = \|x\|. \tag{5.3}$$

Es folgt, dass die Abbildung $J\colon H \to H'$, $x \mapsto J(x) := \varphi_x$ eine Isometrie ist und damit insbesondere injektiv. Man beachte ferner: J ist antilinear, d.h. es gilt

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2) \qquad \text{und} \qquad J(\lambda x) = \overline{\lambda} J(x) \quad \text{für alle } x, x_1, x_2 \in H,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

5.10 Satz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** (a) *Für alle $\varphi \in H'$ existiert $x \in H$ mit $\varphi = \varphi_x$. Die Abbildung $J\colon H \to H'$ aus Definition und Bemerkung 5.9 ist also bijektiv.*

(b) *Die Operatornorm auf H' wird induziert von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, gegeben durch*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_* := \langle J^{-1}(\psi), J^{-1}(\varphi) \rangle \qquad \textit{für alle } \varphi, \psi \in H'.$$

Insbesondere ist $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$ ein Hilbertraum.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in H' \setminus \{0\}$. Dann ist $V := \operatorname{Kern} \varphi$ ein abgeschlossener Unterraum von H. Nach Satz und Definition 5.7 ist also $H = V \oplus_\perp V^\perp$, und $\varphi|_{V^\perp}\colon V^\perp \to \mathbb{K}$ ist linear, injektiv, hat $\operatorname{Bild}(\varphi|_{V^\perp}) = \operatorname{Bild} \varphi \neq \{0\}$. Daher gilt $\dim \operatorname{Bild}(\varphi|_{V^\perp}) = 1$, $\varphi|_{V^\perp}$ ist bijektiv und daher $\dim V^\perp = 1$. Es existiert also $x_0 \in V^\perp \setminus \{0\}$ mit $V^\perp = \operatorname{span}\{x_0\}$. Setze $x := \frac{\overline{\varphi(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$. Dann gilt für alle $y = v + \lambda x \in H$ mit $v \in V$:

$$\varphi_x(y) = \langle y, x \rangle = \langle v, x \rangle + \lambda \|x\|^2 = \lambda \|x\|^2$$
$$\text{und} \quad \varphi(y) = \lambda \varphi(x) = \lambda \frac{|\varphi(x_0)|^2}{\|x_0\|^2} = \lambda \|x\|^2.$$

Es folgt $\varphi = \varphi_x$.

(b) Die Skalarprodukt-Eigenschaften von $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ folgen direkt aus denen von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ferner gilt für $\varphi \in H'$ mit $x = J^{-1}(\varphi)$:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_* \overset{\text{Def.}}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \overset{(5.3)}{=} \|\varphi\|^2.$$

Somit induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ also die Operatornorm auf H'. $\square$

5.2. Anwendung auf ein Neumann-Randwertproblem

Wir betrachten stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\Omega = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$. Gegeben seien Funktionen $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, wobei $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a > 0$ sei. Wir suchen eine Lösung des Neumann-Randwertproblems

$$\text{(NP)} \qquad \begin{cases} -u'' + a(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u'(1) = u'(-1) = 0. \end{cases}$$

Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

5.11 Definition. (a) Sei $u \in L^2(\Omega)$. Wir nennen $v \in L^2(\Omega)$ eine *schwache Ableitung von u*, wenn gilt:

$$\text{(5.4)} \qquad \int_\Omega vw = -\int_\Omega uw' \qquad \text{für alle } w \in C_\mathrm{c}^1(\Omega).$$

Dadurch ist v eindeutig bestimmt, denn gilt (5.4) auch für $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$, so ist

$$\langle v - \tilde{v}, w\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (v - \tilde{v})w = -\int_\Omega (u-u)w' = 0 \quad \text{für alle } w \in C_\mathrm{c}^1(\Omega).$$

Da $C_\mathrm{c}^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ dicht liegt, folgt $v - \tilde{v} \in C_\mathrm{c}^1(\Omega)^\perp = \{0\}$. Wir schreiben u' anstelle von v.

(b) Wir setzen

$$H^1(\Omega) := \big\{ u \in L^2(\Omega) \;\big|\; u \text{ besitzt eine schwache Ableitung } u' \in L^2(\Omega) \big\}$$

und versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u_1, u_2\rangle_{H^1} := \langle u_1, u_2\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u_1', u_2'\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Die induzierte Norm sei mit $\|\cdot\|_{H^1}$ bezeichnet. H^1 gehört zu der Klasse der sogenannten Sobolevräume.

5.12 Bemerkung und Beispiel. (a) Ist $u \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit klassischer Ableitung $u' \in L^2(\Omega)$, so ist u' auch die schwache Ableitung von u. Dies folgt aus der gewöhnlichen Regel zur partiellen Integration. Dies gilt insbesondere dann, wenn $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist.

(b) Sei $u \in L^2(\Omega)$ definiert durch $u(x) = |x|^\alpha$ für ein $\alpha > \frac{1}{2}$. Dann ist $u \in H^1(\Omega)$ mit schwacher Ableitung

$$v = u' \in L^2(\Omega), \qquad v(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x \quad \text{für } x \neq 0.$$

In der Tat ist $v \in L^2(\Omega)$, denn wegen $2(\alpha - 1) > -1$ ist

$$\int_\Omega |v|^2 = \alpha^2 \int_\Omega |x|^{2(\alpha-1)} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Ferner ist $v(x) = u'(x)$ im klassischen Sinne für $x \neq 0$, und es folgt für $w \in C_\mathrm{c}^1(\Omega)$ mit dem Satz von Lebesgue (Satz 4.21) wegen $vw, uw' \in L^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega vw &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} u'w + \int_\varepsilon^1 u'w \right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left((uw)(-\varepsilon) - \int_{-1}^{-\varepsilon} uw' - (uw)(\varepsilon) - \int_\varepsilon^1 uw' \right) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} uw' + \int_\varepsilon^1 uw' \right) = -\int_\Omega uw'.\end{aligned}$$

Dies zeigt $u' = v$ im schwachen Sinne. Wir werden weiter unten in Satz 5.14 sehen, dass die oben definierte Funktion im Fall $\alpha < \frac{1}{2}$ nicht mehr in $H^1(\Omega)$ liegt.

Ende der Videos von 2021-05-25

5.13 Satz. *$H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Die Skalarprodukteigenschaften sind klar. Sei $(u_k)_k$ eine Cauchyfolge in $H^1(\Omega)$. Nach Definition des Skalarprodukts ist $(u_k)_k$ dann eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$ und $(u_k')_k$ ist eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$. Somit gilt

$$u_k \to u \in L^2(\Omega) \quad \text{und} \quad u_k' \to v \in L^2(\Omega) \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Ferner gilt für alle $w \in C_\mathrm{c}^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega vw = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k' w = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k w' = -\int_\Omega uw'.$$

Somit ist also $u \in H^1(\Omega)$ mit $u' = v$, und

$$\|u_k - u\|_{H^1}^2 = \|u_k - u\|_2^2 + \|u_k' - v\|_2^2 \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Dies zeigt die Vollständigkeit von $H^1(\Omega)$. □

5.14 Satz. *Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann gilt:*

(a) *Ist $u' \equiv 0$, so besitzt u einen konstanten Repräsentanten.*

(b) *Die Funktion u lässt sich (nach Wahl eines geeigneten Repräsentanten) zu einer stetigen Funktion auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen, welche*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u' \qquad \text{für alle } x, y \in \overline{\Omega} \tag{5.5}$$

erfüllt.

(c) *Es gilt* $|u(x)-u(y)| \le \|u'\|_2 |x-y|^{\frac{1}{2}}$ *für* $x, y \in \overline{\Omega}$ *und* $\|u\|_\infty \le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}$.

Beweis. Zu (a): Sei $\psi \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ mit $\int_\Omega \psi = 1$ fest gewählt. Sei ferner $w \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ beliebig, und sei

$$f_w := w - \left(\int_\Omega w\right)\psi \in C_{\mathrm{c}}(\Omega).$$

Diese Funktion besitzt eine Stammfunktion gegeben durch

$$F_w \in C_{\mathrm{c}}^1(\Omega), \qquad F_w(x) = \int_{-1}^x f_w,$$

und somit gilt (nach Voraussetzung und Definition der schwachen Ableitung)

$$\begin{aligned} 0 = -\int_\Omega u' F_w = \int_\Omega u f_w = \int_\Omega uw - \left(\int_\Omega w\right)\left(\int_\Omega u\psi\right) \\ = \int_\Omega \Big(u - c_u\Big) w \qquad \text{mit } c_u := \int_\Omega u\psi. \end{aligned}$$

Da $w \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ beliebig gewählt war, folgt $u - c_u \in (C_{\mathrm{c}}(\Omega))^\perp$ bzgl. des L^2-Skalarprodukts, also $u - c_u = 0$ in $L^2(\Omega)$ aufgrund der Dichtheit von $C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Somit gilt $u \equiv c_u$ f.ü. in Ω.

(b): Sei $u \in H^1(\Omega)$, und sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = \int_0^x u'$. Für $x, y \in \Omega$ gilt dann

$$|v(x)-v(y)| = \left|\int_y^x u'\right| \le |x-y|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} (u')^2\right)^{\frac{1}{2}} \le |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2. \tag{5.6}$$

Insbesondere ist v gleichmäßig stetig und lässt sich somit zu einer stetigen Funktion auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen, welche dann (5.6) sogar für $x, y \in \overline{\Omega}$ erfüllt. Insbesondere ist $v \in L^2(\Omega)$. Wir zeigen nun, dass v die schwache Ableitung u' besitzt. Sei dazu $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^1(\Omega)$. Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi' v &= \int_{-1}^1 \varphi'(x) \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^0 \varphi'(x) \int_x^0 u'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi'(x) \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^0 u'(t) \int_{-1}^t \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^1 u'(t) \int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^0 u'\varphi - \int_0^1 u'\varphi = -\int_{-1}^1 u'\varphi. \end{aligned}$$

Dies zeigt $v' = u'$ im schwachen Sinne. Somit ist die Funktion $u - v$ gemäß (a) nach

Übergang zu einem geeigneten Repräsentanten konstant, und dies liefert die Behauptung; insbesondere ist

$$u(y) - u(x) = v(y) - v(x) = \int_x^y u' \qquad \text{für alle } x, y \in \overline{\Omega}.$$

Zu (c): Sei u der stetige Repräsentant nach (b), also $u \in C(\overline{\Omega})$. Die erste Ungleichung folgt direkt aus (5.6). Ist zudem $y \in \overline{\Omega}$ mit $|u(y)| = \min_{\overline{\Omega}}|u|$ gewählt, so folgt mit (b):

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2 + |u(y)| \leq \sqrt{2}\|u'\|_2 + \min_{\overline{\Omega}}|u|,$$

wobei

$$\Big(\min_{\overline{\Omega}}|u|\Big)^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 = \frac{\|u\|_2^2}{2}$$

gilt. Es folgt $\|u\|_\infty \leq \sqrt{2}\|u'\|_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_2 \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1}$, wie behauptet. □

5.15 Bemerkung. (a) Aus Satz 5.14(c) folgt, dass $H^1(\Omega)$ stetig in $C(\overline{\Omega})$ eingebettet ist. Wegen der Faktorisierung

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

mit stetigen Einbettungen, wobei hier $C^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ den Raum der $\frac{1}{2}$-Hölder-stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ bezeichne, gilt sogar, dass jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ eine in $C(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge besitzt (Übung).

(b) Besitzt $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Ableitung $u' \in C(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$ (nach Wahl eines geeigneten Repräsentanten). Dies folgt unmittelbar aus (5.5) und dem klassischen Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

5.16 Definition und Satz. Seien Funktionen $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ gegeben.

(a) Wir nennen $u \in H^1(\Omega)$ eine *schwache Lösung des Randwertproblems* (NP), wenn

$$\langle u, w\rangle_* = \int_\Omega fw \qquad \text{für alle } w \in H^1(\Omega)$$

gilt, wobei

$$\langle u, w\rangle_* := \int_\Omega (u'w' + auw)$$

sei.

(b) Ist $a_0 := \operatorname{ess\,inf}_\Omega a > 0$, so ist durch

$$(u, w) \mapsto \langle u, w\rangle_*$$

ein Skalarprodukt definiert mit der Eigenschaft, dass die induzierte Norm $\|\cdot\|_*$

äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist. Insbesondere ist $(H^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_*)$ ebenfalls ein Hilbertraum.

Beweis von (b). Offensichtlich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ eine symmetrische Bilinearform auf $H^1(\Omega)$, und für $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$a_0\|u\|_2^2 \le \int_\Omega au^2 \le \|a\|_\infty \|u\|_2^2,$$

also

$$\min\{a_0, 1\}\|u\|_{H^1}^2 \le \langle u, u\rangle_* \le \max\{\|a\|_\infty, 1\}\|u\|_{H^1}^2.$$

Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ ein Skalarprodukt derart, dass die induzierte Norm $\|\cdot\|_*$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ ist. □

5.17 Satz. *Sind $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ mit $a_0 := \operatorname{ess\,inf}_\Omega a > 0$ gegeben, so besitzt das Randwertproblem* (NP) *genau eine schwache Lösung.*

Beweis. Sei $H := H^1(\Omega)$, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$, und sei $\varphi \in H'$ definiert durch $\varphi(w) := \int_\Omega fw$. Die Stetigkeit von φ folgt aus der Abschätzung

$$|\varphi(w)| = |\langle f, w\rangle_{L^2(\Omega)}| \le \|f\|_2\|w\|_2 \le \|f\|_2 \left(\frac{1}{a_0}\int_\Omega aw^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{a_0}}\|f\|_2\|w\|_*.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 5.10) existiert nun genau ein $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\langle u, w\rangle_* = \varphi(w) = \int_\Omega fw \qquad \text{für alle } w \in H^1(\Omega).$$

Also ist $u \in H^1(\Omega)$ die gesuchte eindeutige schwache Lösung von (NP). □

5.18 Bemerkung. Seien Funktionen $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ gegeben.

(a) Ist u eine schwache Lösung von (NP), so folgt

$$\int_\Omega u'w' = -\int_\Omega (au - f)\, w \qquad \text{für alle } w \in C^1(\overline{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega), \tag{5.7}$$

also insbesondere für $w \in C_c^1(\Omega)$. Somit ist

$$u' \in H^1(\Omega) \qquad \text{mit schwacher Ableitung} \quad u'' = au - f.$$

Insbesondere folgt mit Bemerkung 5.15(a) (nach Wahl eines geeigneten Repräsentanten) $u' \in C(\overline{\Omega})$, und mit Bemerkung 5.15(b) folgt $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(b) Sind sogar $a, f \in C(\overline{\Omega})$, so folgt $u'' = au - f \in C(\overline{\Omega})$ für die schwache Ableitung von u', d.h. $u' \in C^1(\overline{\Omega})$ gemäß Bemerkung 5.15(b). In diesem Fall ist also $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und die Differentialgleichung $u'' = au - f$ ist im klassischen Sinne in Ω erfüllt. Aus

(5.7) folgt dann durch partielle Integration für alle $w \in C^1(\overline{\Omega})$ die Gleichung

$$u'(1)w(1) - u'(-1)w(-1) = \int_\Omega (u'w)' = \int_\Omega (u'w' + u''w) \overset{(5.7)}{=} 0,$$

und dies liefert die Neumann-Randbedingungen

$$\text{(NR)} \qquad u'(1) = u'(-1) = 0.$$

(c) Die Bedingungen (NR) sind auch ohne die Zusatzvoraussetzung $a, f \in C(\overline{\Omega})$ erfüllt. Tatsächlich gilt (Übung): Ist $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ und existiert $C > 0$ mit

$$\left| \int_\Omega \tilde{u}w' \right| \le C\|w\|_2 \qquad \text{für alle } w \in C^1(\overline{\Omega}),$$

so ist $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$, und für den Repräsentanten $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ gilt $\tilde{u}(1) = \tilde{u}(-1) = 0$.

Ende der Videos von 2021-05-28

5.3. Orthonormalsysteme und abstrakte Fourierreihen

Nun sei wieder $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum.

5.19 Definition. (a) Eine Menge $A \subseteq H$ heißt *Orthonormalsystem* (kurz: ONS) falls gilt:

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ 1, & x = y, \end{cases} \qquad \text{für alle } x, y \in A.$$

(b) Ein totales Orthonormalsystem A heißt *Orthonormalbasis* (kurz: ONB) oder *Hilbertbasis*. Man beachte, dass dies nicht bedeutet, dass A eine Basis im Sinne der Linearen Algebra ist.

5.20 Satz. *Sei $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches ONS in H. Dann gelten:*

(a) *Sind $c_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n \in H$ existiert, so gilt $c_n = \langle x, e_n\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Ist $(c_n)_n \in \ell^2$ gegeben, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ in H.*

Beweis. (a) Aus der Stetigkeit und Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument folgt

$$\langle x, e_n\rangle = \left\langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k c_j e_j, e_n \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k c_j \underbrace{\langle e_j, e_n\rangle}_{=\delta_{jn}} = c_n.$$

(b) Sei $s_n := \sum_{k=1}^n c_k e_k$. Dann gilt

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^m c_k e_k \Big\|^2 = \sum_{i,j=n+1}^m c_i \overline{c_j} \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Da ferner $(c_k)_k \in \ell^2$ ist, folgt

$$\sup_{m \geq n} \|s_m - s_n\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^\infty |c_k|^2 \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Also ist $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge in H und die Behauptung folgt. $\square$

5.21 Satz. *Sei $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ein endliches ONS, $V = \operatorname{span} A$ und $P \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf V. Dann gelten für alle $x, y \in H$:*

(a) $Px = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$.

(b) $\langle Px, Py \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$.

Beweis. (a) Sei $z := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. Dann ist

$$\langle x - z, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Also gilt $x - z \in A^\perp = V^\perp = \operatorname{Kern} P$. Es folgt

$$Px = Pz + P(x - z) = Pz = z,$$

da z in V liegt.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \langle Px, Py \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \Big\rangle \\ &= \sum_{k,j=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}. \end{aligned}$$ $\square$

5.22 Definition. Für ein fest gewähltes, abzählbares ONS $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ in H und $x \in H$ nennen wir

(a) $\hat{x}(n) := \langle x, e_n \rangle$ den *n-ten Fourierkoeffizienten von x* (*bzgl. A*),

(b) $\sum_n \hat{x}(n) e_n$ die (*abstrakte*) *Fourierreihe von x* (*bzgl. A*).

5.23 Satz. *Sei $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches ONS in H. Sei ferner $V := \overline{\operatorname{span} A}$ und $P \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf V. Dann gelten für alle $x, y \in H$:*

(a) $Px = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)e_n$,

(b) $\langle Px, Py\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung).

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n}|\hat{x}(k)|^2 \overset{\text{Satz 5.21(b)}}{=} \|P_n x\|^2 \overset{\text{Satz und Definition 5.7(b)}}{\leq} \|x\|^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt (c) und $(\hat{x}(n))_n \in \ell^2$. Gemäß Satz 5.20(b) existiert somit $z := \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)e_n \in H$ (d.h. die Reihe konvergiert). Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt

$$\langle x - z, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)\langle e_n, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \hat{x}(j) = 0 \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N},$$

also $x - z \in A^\perp = V^\perp$ und somit $Px = Pz + P(x - z) = Pz = z$. Dies liefert (a).

Zu (b):

$$\langle Px, Py\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)e_n, \sum_{k=1}^{\infty} \hat{y}(k)e_k \right\rangle = \sum_{n,k=1}^{\infty} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(k)}\langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)}.$$

Hier haben wir wieder die Stetigkeit des Skalarprodukts verwendet. □

5.24 Korollar. *Sei $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches ONS in H. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist eine ONB.*

(ii) *Für alle $x \in H$ gilt $x = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}(k)e_k$.*

(iii) *Für alle $x \in H$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(k)|^2$.*

(iv) *Für alle $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}$* (Parsevalsche Gleichung).

Beweis. Sei $V := \overline{\operatorname{span} A}$ und $P \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf V. Dann gilt:

$$A \text{ total} \iff V = H \iff P = I.$$

Somit erhalten wir die Implikationen:

$$\text{(i)} \overset{\text{Satz 5.23}}{\Longrightarrow} \text{(ii)} \overset{\text{Stet. d. SKP}}{\Longrightarrow} \text{(iv)} \overset{\text{trivial}}{\Longrightarrow} \text{(iii)}.$$

Gilt (iii), so folgt für alle $x \in H$:

$$\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \overset{\text{Satz und Definition 5.6(a)}}{=} \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(k)|^2 \overset{\text{Satz 5.23(b)}}{=} \|Px\|^2,$$

also $x = Px \in V$. Also ist $H = V$ und somit A total, d.h. (i) gilt. $\square$

5.25 Bemerkung. Ist A ein abzählbar unendliches ONS und existiert eine totale Teilmenge $M \subseteq H$ mit

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 \qquad \text{für alle } x \in M, \tag{5.8}$$

so ist A bereits eine ONB.

Beweis. Sei wieder $V := \overline{\operatorname{span} A}$. Wie im Beweisschritt (iii) auf (i) in Korollar 5.24 erhält man mit (5.8) die Implikation: $x \in M \Longrightarrow x \in V$. Somit gilt $M \subseteq V$ und damit $H = \overline{\operatorname{span} M} \subseteq V$. Es folgt, dass A eine ONB ist. $\square$

5.26 Satz. *Äquivalent sind:*

(i) *H ist unendlich-dimensional und separabel.*

(ii) *H besitzt eine abzählbar unendliche ONB.*

(iii) *H ist isometrisch isomorph zu ℓ^2.*

Man beachte: Die Aussagen gelten insbesondere im Fall $H = L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-messbare Menge mit $\lambda(\Omega) > 0$ sei (vgl. Bemerkung 4.48).

Beweis. Aus (ii) folgt (iii): Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{F}\colon H \to \ell^2$, $\mathcal{F}x := (\hat{x}(k))_k$. Aus Korollar 5.24(iii) folgt

$$\|\mathcal{F}x\|_2 = \|x\|_H \qquad \text{für alle } x \in H.$$

Die Surjektivität von $\mathcal{F}$ folgt aus Satz 5.20(b). Somit ist $\mathcal{F}$ ein isometrischer Isomorphismus.

Aus (iii) folgt (i), da ℓ^2 separabel ist. Noch zu zeigen: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei dazu $M = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq H$ eine abzählbar unendliche totale Menge. Wir erzeugen hieraus eine ONB mittels des *Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens*: Ohne Einschränkung gelte $a_1 \neq 0$ und $a_{k+1} \notin W_k := \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Sei $P_k \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf W_k für $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $e_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$ und

$$e_k := \frac{a_k - P_{k-1}a_k}{\|a_k - P_{k-1}a_k\|} \in W_k \cap W_{k-1}^{\perp} \qquad \text{für } k \geq 2.$$

Nach Konstruktion ist $A := \{e_1, e_2, \dots\}$ ein ONS in H. Per Induktion sieht man ferner: $W_k = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\operatorname{span} M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k = \operatorname{span} A,$$

also ist A total und somit eine ONB. Es folgt (ii). $\square$

5.4. Klassische Fourierreihen

Im Folgenden betrachten wir den Hilbertraum $H \coloneqq L^2[0,2\pi] = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ (bezüglich des Lebesguemaßes) mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f\overline{g} \qquad \text{für } f,g\in H.$$

5.27 Definition und Satz. Für $k\in\mathbb{Z}$ sei $e_k\in H$ definiert durch $e_k(t) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Dann ist $A \coloneqq \{e_k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ eine ONB von H. Die Fourierkoeffizienten von $f\in H$ bzgl. A sind dann gegeben durch

$$\hat{f}(k) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{für } k\in\mathbb{Z}.$$

Beweis. Es ist

$$\langle e_k,e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}_{=1}\,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{Z},$$

und

$$\langle e_k,e_j\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\mathrm{i}(k-j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad \text{für } k\neq j.$$

Es folgt, dass A ein ONS in $H = L^2([0,2\pi])$ ist. Ferner ist A total in H, da die Menge der trigonometrischen Polynome dicht in H liegt. Die letzte Aussage ist eine leichte Folgerung aus Definition und Korollar 4.12 und Satz 4.47 (Übung). □

5.28 Bemerkung. Aus Definition und Satz 5.27 folgt, dass für jedes $f\in H$ die Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e_k$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert. Weiterhin gelten:

(a) Die Fourierreihe konvergiert punktweise f.ü. gegen f (Satz von Carleson, 1966).

(b) Ist $(\hat{f}(k))_k \in \ell^1(\mathbb{Z})$, so konvergiert die Fourierreihe in $(C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$, also gleichmäßig. Es folgt dann, dass f (nach Wahl eines geeigneten Repräsentanten) zu einem Element in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ fortgesetzt werden kann.

(c) Ist $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, so muss die Fourierreihe i.A. trotzdem nicht punktweise gegen f konvergieren.

Beweis. (b) Weil die Folge $(\hat{f}(k))_k$ in $\ell^1(\mathbb{Z})$ liegt, gilt für alle $t\in[0,2\pi]$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)e_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)| < \infty,$$

d.h. die Funktionenreihe $\tilde{f} \coloneqq \sum_k \hat{f}(k)e_k$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium absolut und gleichmäßig. Zudem liegen alle Funktionen e_k in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$; dies gilt also auch für $\tilde{f}$. Wegen (a) ist dann $\tilde{f}$ ein Repräsentant von f in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Skizze des Beweises von (c): Sei $t_0 \in [0, 2\pi]$, und sei im Folgenden $C_{2\pi} \coloneqq C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Wir zeigen, dass ein $f \in C_{2\pi}$ existiert derart, dass die Fourierreihe von f in t_0 nicht gegen f konvergiert. Wir verwenden den Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit. Dazu definieren wir die Operatoren

$$S_n \in \mathcal{L}(C_{2\pi}), \qquad S_n f \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k$$

mit e_k wie in Definition und Satz 5.27. Dann gilt für alle $t \in [0, 2\pi]$:

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-s)} \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d_n(t-s) f(s) \, \mathrm{d}s$$

mit dem n-ten Dirichletkern

$$\tau \mapsto d_n(\tau) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\tau} = \begin{cases} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\tau\right)}{\sin\frac{\tau}{2}}, & \tau \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}; \\ 2n+1, & \tau \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Die letztere Darstellung des Kerns kann man dabei z.B. mit der geometrischen Summenformel herleiten (Übung). Wir betrachten nun die stetigen Linearformen

$$T_n \in C'_{2\pi}, \qquad T_n(f) \coloneqq (S_n f)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d_n(t_0 - s) f(s) \, \mathrm{d}s.$$

Ähnlich wie in Beispiel 2.29(c) sieht man, dass für die zugehörige Operatornorm dann

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |d_n|$$

gilt (Übung). Allerdings gilt wegen (5.9) auch

$$\int_0^{2\pi} |d_n| \to \infty \qquad \text{für } n \to \infty$$

(Übung). Somit ist die Folge der Linearformen T_n, $n \in \mathbb{N}$, nicht beschränkt. Nach Hauptsatz 3.8 ist sie damit auch nicht punktweise beschränkt, d.h. es existiert ein $f \in C_{2\pi}$ derart, dass die im Punkt t_0 ausgewerteten Partialsummen

$$T_n f = (S_n f)(t_0), \qquad n \in \mathbb{N},$$

der Fourierreihe von f eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$ bilden und somit nicht konvergieren. □

Ende der Videos von 2021-06-01

5.5. Der Satz von Lax-Milgram mit Anwendungen

Stets sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

5.29 Definition. Eine Abbildung $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ heißt *sesquilinear*, falls gilt:

(i) $a(\cdot, y)\colon H \to \mathbb{K}$ ist linear für alle $y \in H$.

(ii) $a(x, \cdot)\colon H \to \mathbb{K}$ ist antilinear für alle $x \in H$, d.h. $a(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} a(x, y) + a(x, z)$ für alle $x, y, z \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Wir setzen $\operatorname{Sql}(H) := \{a\colon H \times H \to \mathbb{K} \mid a \text{ sesquilinear}\}$.

5.30 Satz und Definition. *Zu $T \in \mathcal{L}(H)$ sei $a_T \in \operatorname{Sql}(H)$ definiert durch $a_T(x, y) := \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in H$. Dann gelten:*

(a) $|a_T(x, y)| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|$ *für alle $x, y \in H$.*

(b) *Existiert $c_1 > 0$ mit $|a_T(x, x)| \geq c_1 \|x\|^2$ für alle $x \in H$, so ist T ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. (a) $|a_T(x, y)| = |\langle x, Ty \rangle| \leq \|x\| \, \|Ty\| \leq \|x\| \, \|T\| \, \|y\|$ für alle $x, y \in H$.
(b) Für alle $x \in H$ ist $c_1 \|x\|^2 \leq |\langle x, Tx \rangle| \leq \|Tx\| \, \|x\|$, also

$$\|x\| \leq \frac{1}{c_1} \|Tx\|. \tag{5.10}$$

Somit ist T injektiv. Sei $V := \operatorname{Bild} T$. Wir behaupten, dass V abgeschlossen ist. Um das zu zeigen, seien $(x_n)_n \subseteq H$ und $y \in H$ mit $Tx_n \to y$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\sup_{m \geq n} \|x_m - x_n\| \overset{(5.10)}{\leq} \frac{1}{c_1} \sup_{m \geq n} \|Tx_m - Tx_n\| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Also ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge, und somit existiert $x := \lim_{n \to \infty} x_n \in H$. Da T stetig ist, gilt $y = Tx \in V$. Es folgt die Behauptung. Für $y \in V^\perp$ gilt nun $c_1 \|y\|^2 \leq |\langle y, Ty \rangle| = 0$, also $V^\perp = \{0\}$. Es folgt $V = \overline{V} = V^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H$, d.h. T ist surjektiv. Schließlich gilt wegen (5.10) $\|T^{-1} y\| \leq \frac{1}{c_1} \, \|T(T^{-1} y)\| = \frac{1}{c_1} \|y\|$ für alle $y \in H \implies$, d.h. $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ und $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c_1}$. □

5.31 Satz (von Lax-Milgram)**.** *Seien $a \in \operatorname{Sql}(H)$ und $c_0 > 0$ mit*

$$|a(x, y)| \leq c_0 \|x\| \, \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in H \tag{5.11}$$

gegeben. Dann gelten:

(a) *Es existiert genau ein $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $a = a_T$, d.h. mit $a(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in H$.*

(b) *Existiert ferner eine Konstante* $c_1 > 0$ *mit*

$$|a(x,x)| \geq c_1 \|x\|^2 \qquad \textit{für alle } x \in H, \tag{5.12}$$

so ist T *ein topologischer Isomorphismus.*

(c) *Sind* (5.11) *und* (5.12) *erfüllt, so existiert zu jedem* $f \in H$ *genau ein* $y \in H$ *mit*

$$a(x,y) = \langle x, f \rangle \qquad \textit{für alle } x \in H. \tag{5.13}$$

(d) *Sind* (5.11) *und* (5.12) *erfüllt, so existiert zu jedem* $\varphi \in H'$ *genau ein* $y \in H$ *mit*

$$a(x,y) = \varphi(x) \qquad \textit{für alle } x \in H.$$

Beweis. (a) Sei $J\colon H \to H'$ die antilineare isometrische Bijektion aus dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 5.10). Für $y \in H$ sei ferner $\psi_y\colon H \to \mathbb{K}$ definiert durch $\psi_y(x) := a(x,y)$. Dann ist ψ_y linear und stetig mit $\|\psi_y\| \leq c_0 \|y\|$, denn wegen (5.11) gilt $|\psi_y(x)| \leq c_0 \|x\| \, \|y\|$ für alle $x \in H$. Gilt $a = a_T$ für ein $T \in \mathcal{L}(H)$, so folgt

$$\langle x, Ty \rangle = a_T(x,y) = \psi_y(x) \qquad \text{für alle } y, x \in H,$$

also notwendigerweise

$$Ty = J^{-1}\psi_y \qquad \text{für alle } y \in H. \tag{5.14}$$

Insbesondere ist T eindeutig bestimmt. Ist T durch (5.14) definiert, so gilt für $y_1, y_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda y_1 + y_2) = J^{-1}\psi_{\lambda y_1 + y_2} &\overset{a \in \mathrm{Sql}(H)}{=} J^{-1}(\overline{\lambda}\psi_{y_1} + \psi_{y_2}) \\ &= \lambda J^{-1}\psi_{y_1} + J^{-1}\psi_{y_2} = \lambda T y_1 + T y_2. \end{aligned}$$

Also ist T ist linear. Ferner gilt

$$\|Ty\| = \|J^{-1}\psi_y\| \overset{\text{Satz 5.10}}{=} \|\psi_y\| \leq c_0 \|y\| \qquad \text{für alle } y \in H,$$

also $T \in \mathcal{L}(H)$.

(b) Dies folgt direkt aus (a) und Satz und Definition 5.30(b).

(c) Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ gemäß (a) gewählt, so ist (5.13) äquivalent zu

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, f \rangle \qquad \text{für alle } x \in H, \tag{5.15}$$

wobei T gemäß (b) ein topologischer Isomorphismus ist. Also existiert genau ein $y \in H$, welches (5.15) erfüllt, und dieses ist gegeben durch $y := T^{-1}f$.

(d) folgt aus (c) und dem Darstellungssatz von Riesz, Satz 5.10. $\square$

5.32 Bemerkung. Der Vorteil der Aussage Satz 5.31(d) gegenüber dem Rieszschen Darstellungssatz (wo die betrachtete Sesquilinearform a das Skalarprodukt ist) liegt darin, dass hier keine Symmetrie von a verlangt wird.

5.33 Beispiel. Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\Omega = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Gegeben seien Funktionen $h, b \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, wobei $\operatorname{ess\,inf}_\Omega h > 0$ und

$$\frac{\|b\|_\infty}{2} < \min\{1, \operatorname*{ess\,inf}_\Omega h\} \tag{5.16}$$

sei. Wir suchen eine Lösung des Neumann-Randwertproblems

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u' + h(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u'(1) = u'(-1) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Ähnlich wie in Definition und Satz 5.16 nennen wir $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (5.17), wenn gilt:

$$a(w, u) := \int_\Omega (u'w' + bu'w + huw) = \int_\Omega fw \quad \text{für alle } w \in H^1(\Omega).$$

Dabei ist $a\colon H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform (wegen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ also auch eine Sesquilinearform) mit

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\le \|u'\|_2 \|w\|_2 + \|b\|_\infty \|u'\|_2 \|w\|_2 + \|h\|_\infty \|u\|_2 \|w\|_2 \\ &\le (1 + \|b\|_\infty + \|h\|_\infty) \|u\|_{H^1} \|w\|_{H^1} \end{aligned}$$

für alle $u, w \in H^1(\Omega)$. Umgekehrt haben wir

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &\ge \|u'\|_2^2 - \|b\|_\infty \|u'\|_2 \|u\|_2 + \left(\operatorname*{ess\,inf}_\Omega h\right) \|u\|_2^2 \\ &\ge \left(1 - \frac{\|b\|_\infty}{2}\right) \|u'\|_2^2 + \left(\operatorname*{ess\,inf}_\Omega h - \frac{\|b\|_\infty}{2}\right) \|u\|_2^2 \ge c_1 \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

für $u \in H^1(\Omega)$ mit $c_1 := \min\{1, \operatorname{ess\,inf}_\Omega h\} - \frac{\|b\|_\infty}{2} > 0$ wegen (5.16). Somit erfüllt die Bilinearform a auf $H^1(\Omega)$ die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram. Ähnlich wie im Beweis von Satz 5.17 betrachten wir nun die Linearform

$$\varphi \in H^1(\Omega)', \quad \varphi(w) := \int_\Omega fw.$$

Nach Satz 5.31(d) existiert genau ein $u \in H^1(\Omega)$ mit $a(w, u) = \varphi(w)$ für alle $w \in H^1(\Omega)$, d.h. genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (5.17). Für diese schwache Lösung kann man analoge Regularitätsaussagen wie in Bemerkung 5.18 erhalten. Man beachte: Die hier definierte Bilinearform a ist nicht symmetrisch; man kann die (eindeutige) Existenz schwacher Lösungen daher nicht allein aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgern.

5.34 Bemerkung. Selbst das einfachere Problem

$$\begin{cases} -u'' + h(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u'(1) = u'(-1) = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

(vgl. Abschnitt 5.2) ohne den Term erster Ordnung kann auf eine nicht symmetrische Bilinearform führen, wenn man eine komplexwertige Funktion $x \mapsto h(x)$ betrachtet. Analog wie in Satz 5.17 kann man dann die Existenz genau einer schwachen Lösung aus dem Satz von Lax-Milgram folgern, wenn $\operatorname{ess\,inf}_\Omega \operatorname{Re} h > 0$ gilt. Hierzu betrachtet man $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ und einen analog definierten komplexwertigen Sobolevraum $H^1(\Omega) = H^1(\Omega, \mathbb{C})$.

5.35 Beispiel. Seien $h, f \in C([0,1], \mathbb{C})$ Funktionen mit $\operatorname{Re} h > 0$ auf $[0,1]$. Wir zeigen, dass das Dirichletproblem

$$-u'' + hu = f \qquad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{5.19}$$

eine Lösung $u \in C^2([0,1], \mathbb{C})$ besitzt. Man kann diese Gleichung ähnlich wie das Neumannsche Randwertproblem lösen, muss dann aber im Abschluss des Raumes $C_c^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ statt in $H^1(\Omega)$ (wie in Abschnitt 5.2) arbeiten, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Wir beschreiten hier einen anderen Weg. Dazu setzen wir $H := L^2([0,1], \mathbb{C})$ und schreiben das Problem in der Form

$$u = K(f - hu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad K\tilde{u} + \frac{\tilde{u}}{h} = Kf, \;\; \tilde{u} = hu, \tag{5.20}$$

mit dem Integraloperator

$$K \colon H \to H, \qquad (Kv)(t) := \int_0^1 G(t,s) v(s) \, \mathrm{d}s \quad \text{für } t \in [0,1]$$

zur Greenfunktion

$$G \in C([0,1]^2), \qquad G(t,s) = \begin{cases} (1-s)t, & t \le s; \\ (1-t)s, & t > s \end{cases}$$

aus Kapitel 1. Da G beschränkt ist, liegt K in $\mathcal{L}(H)$. Ferner definieren wir $a \in \operatorname{Sql}(H)$ durch

$$a(w,v) := \int_0^1 w \overline{\Big(Kv + \frac{v}{h}\Big)} \qquad \text{für } v, w \in H.$$

Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen G und $\frac{1}{h}$ sieht man leicht, dass dann die Voraussetzung (5.11) aus Satz 5.31 erfüllt ist. Betrachtet man ferner $v \in C_c(0,1)$ und setzt $w := Kv$, so ist $w \in C^2[0,1]$ eine Lösung von

$$-w'' = v \qquad \text{in } (0,1), \qquad w(0) = w(1) = 0,$$

(Übung) und somit folgt mit partieller Integration

$$\int_0^1 v\overline{(Kv)} = -\int_0^1 w''\overline{w} = \int_0^1 w'\overline{w}' = \int_0^1 |w'|^2 \geq 0,$$

also

$$\operatorname{Re} a(v,v) \geq \operatorname{Re} \int_0^1 v\overline{\Big(\frac{v}{h}\Big)} \geq c_1 \int_0^1 |v|^2 = c_1 \|v\|_2^2$$

mit

$$c_1 := \min_{t\in[0,1]} \operatorname{Re} \frac{1}{h(t)} > 0$$

nach Voraussetzung. Da $C_c(0,1)$ gemäß Satz 4.47 in H dicht liegt, erhält man durch Approximation auch

$$|a(v,v)| \geq \operatorname{Re} a(v,v) \geq c_1 \|v\|_2^2 \qquad \text{für alle } v \in H.$$

Also erfüllt a die Voraussetzungen (5.11) und (5.12) von Satz 5.31, und somit existiert gemäß Satz 5.31(c) zu $Kf \in H$ genau ein $\tilde{u} \in H$ mit

$$a(w,\tilde{u}) = \langle w, Kf\rangle \qquad \text{für alle } w \in H,$$

d.h.

$$\int_0^1 w\overline{\Big(K\tilde{u} + \frac{\tilde{u}}{h} - Kf\Big)} = 0 \qquad \text{für } w \in H.$$

Dies liefert $K\tilde{u} + \frac{\tilde{u}}{h} - Kf \in H^{\perp} = \{0\}$, d.h. $u := \frac{\tilde{u}}{h}$ erfüllt (5.20). Aus Eigenschaften der Greenfunktion G (Übung) erhält man dann, dass $u \in C^2([0,1])$ eine Lösung von (5.19) ist.

Ende der Videos von 2021-06-04

5.6. Der Adjungierte Operator

5.36 Satz und Definition. *Zu jedem $T \in \mathcal{L}(H)$ existiert genau ein $T^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ für alle $x, y \in H$. Man nennt T^* den* zu T adjungierten Operator*.*

Beweis. Definiere $a \in \operatorname{Sql}(H)$ durch $a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$. Dann ist

$$|a(x,y)| \leq \|Tx\|\,\|y\| \leq \|T\|\,\|x\|\,\|y\| \qquad \text{für } x, y \in H,$$

also gilt (5.11) von Satz 5.31 mit $c_0 := \|T\|$. Somit existiert genau ein $T^* \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\langle Tx, y\rangle = a(x,y) = \langle x, T^*y\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in H. \qquad \square$$

5.37 Satz. *Für alle $S, T \in \mathcal{L}(H)$ gilt:*

(a) $T^{**} = T$

(b) $(\lambda S + \mu T)^* = \overline{\lambda} S^* + \overline{\mu} T^*$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(c) $(ST)^* = T^* S^*$

(d) *Ist* T *ein topologischer Isomorphismus, so auch* T^**; und dann gilt* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(e) $\|T^*\| = \|T\|$

(f) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Beweis. (a)–(c): Leichte Übung, z.B. (c): Für alle $x, y \in H$ ist $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$, und mit Satz und Definition 5.36 (Eindeutigkeit) folgt $(ST)^* = T^*S^*$.

Zu (d): Gemäß (c) ist $(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I^* = I$ und analog $T^*(T^{-1})^* = I$. Somit folgt die Behauptung.

Zu (e) und (f): Für alle $x \in H$ ist

$$\|Tx\|^2 = \langle x, T^*Tx\rangle \le \|T^*Tx\| \; \|x\| \le \|T^*T\| \; \|x\|^2,$$

also

$$\|T\|^2 = (\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|)^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T^*\| \; \|T\|. \tag{5.21}$$

Es folgt $\|T\| \le \|T^*\|$, und dann auch $\|T^*\| \le \|T^{**}\| = \|T\|$. Somit ist $\|T\| = \|T^*\|$, und aus (5.21) folgt nun $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

5.38 Definition. $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt

- *normal*, falls $TT^* = T^*T$ gilt.
- *hermitesch* oder *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$ gilt.
- *unitär*, falls $TT^* = I = T^*T$, also $T^* = T^{-1}$ gilt.

5.39 Beispiel (Multiplikationsoperatoren)**.** Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ (Lebesgue-)messbar, $H := L^2(\Omega)$, $q \in L^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{L}(H)$ definiert durch $(Tf)(x) := q(x)f(x)$ für $f \in H$ und $x \in \Omega$. Wegen

$$\|Tf\|_2^2 = \int_\Omega |qf|^2 \le \|q\|_\infty^2 \|f\|_2^2 \qquad \text{für alle } f \in H$$

ist T tatsächlich stetig mit $\|T\| \le \|q\|_\infty$. Dabei gilt:

$$\langle f, T^*g\rangle = \langle Tf, g\rangle = \int_\Omega qf\overline{g} = \int_\Omega f\overline{\overline{q}g} = \langle f, \overline{q}g\rangle.$$

Also ist $T^* \in \mathcal{L}(H)$ gegeben durch $T^*g = \overline{q}g$. Beachte: T ist normal, denn $TT^*g = T^*Tg = |q|^2 g$ für alle $g \in H$. Ferner gilt:

- T unitär $\iff$ $|q| = 1$ f.ü. auf Ω;
- T selbstadjungiert $\iff$ q f.ü. auf Ω reellwertig.

Randbemerkung: T definiert ebenfalls einen stetigen Operator $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ für $1 \le p \le \infty$, wobei auch dann $\|T\| \le \|q\|_\infty$ gilt.

5.40 Beispiel (Integraloperatoren)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ (Lebesgue-)messbar und $H := L^2(\Omega)$. Sei ferner $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Der Integraloperator $K \in \mathcal{L}(H)$ zur Kernfunktion k ist definiert durch

$$(Kf)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{für } f \in H \text{ und } x \in \Omega \text{ (f.ü.)}.$$

K ist wohldefiniert, denn: Da $\int_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2 d(x,y) < \infty$ ist, gilt nach dem Satz von Fubini:

- $\int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y < \infty$ für fast alle $x \in \Omega$;
- $x \mapsto \int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y$ ist integrierbar.

Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist somit $(Kf)(x)$ für $f \in H$ und fast alle $x \in \Omega$ wohldefiniert, und es gilt

$$|(Kf)(x)|^2 = \left| \int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \le \|f\|_2^2 \int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y.$$

Es folgt

$$\|Kf\|_2^2 = \int_\Omega |(Kf)(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \|f\|_2^2 \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2 \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2,$$

also $K \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|K\| \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

Es gilt dann: $K^* \in \mathcal{L}(H)$ ist der Integraloperator zur Kernfunktion

$$k^* \in L^2(\Omega \times \Omega), \qquad k^*(x,y) := \overline{k(y,x)},$$

denn für $f, g \in H$ gilt nach Tonelli und Fubini:

$$\begin{aligned} \langle Kf, g \rangle &= \int_\Omega \left(\int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \right) \overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(y) \overline{\left(\int_\Omega \overline{k(x,y)} g(x)\,\mathrm{d}x \right)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega f(y) \overline{\left(\int_\Omega k^*(y,x) g(x)\,\mathrm{d}x \right)}\,\mathrm{d}y = \langle f, K^* g \rangle. \end{aligned}$$

5.41 Satz. *Für alle $T \in \mathcal{L}(H)$ gilt* $\operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\perp$ *und* $\overline{\operatorname{Bild} T^*} = (\operatorname{Kern} T)^\perp$.

Beweis. Für $y \in H$ gilt

$$y \in \operatorname{Kern} T^* \iff \langle x, T^* y \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in H$$

$$\iff \quad \langle Tx, y\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in H \quad \iff \quad y \in (\operatorname{Bild} T)^\perp.$$

Damit folgt $\operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\perp$. Weiterhin gilt

$$\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^{**} = (\operatorname{Bild} T^*)^\perp, \text{ also } (\operatorname{Kern} T)^\perp = (\operatorname{Bild} T^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Bild} T^*}. \qquad \square$$

5.42 Satz. *$P \in \mathcal{L}(H)$ ist eine orthogonale Projektion genau dann, wenn $P^2 = P = P^*$ gilt.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Da $P^2 = P$ gilt, ist P eine Projektion. Ferner ist $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Kern}(I - P)$ abgeschlossen, da P stetig ist. Da schließlich $P^* = P$ ist, folgt aus Satz 5.41 $\operatorname{Kern} P = \operatorname{Kern} P^* = (\operatorname{Bild} P)^\perp$. Somit ist P eine orthogonale Projektion.

„$\Longrightarrow$“: Nach Satz und Definition 5.7 gilt $P^2 = P$, und für $Q = I - P$ gilt Bild $Q = (\operatorname{Bild} P)^\perp$. Also gilt für alle $x, y \in H$:

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + Qy\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + Qx, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$$

Mit Satz und Definition 5.36 folgt $P = P^*$. $\square$

5.43 Bemerkung. Für $T \in \mathcal{L}(H)$ ist T genau dann unitär, wenn T eine surjektive Isometrie ist.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&T \text{ surjektive Isometrie} \iff \\
&T \text{ surjektiv und } \|Tx\| = \|x\| \text{ für alle } x \in H \iff \\
&T \text{ bijektiv und } \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in H \iff \\
&T \text{ bijektiv und } T^*T = I, \text{ also } T^{-1} = T^* \iff \\
&T \text{ unitär.}
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Äquivalenz haben wir die Polarisationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\
\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}
\end{aligned}$$

(Übung) verwendet. $\square$

5.44 Bemerkung. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$, so ist T^* bereits durch

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle \qquad \text{für alle } x \in H \tag{5.22}$$

eindeutig festgelegt.

Beweis. Seien $x, y \in H$. Anwendung von (5.22) auf $x + \mathrm{i}y$ und $x + y$ liefert die Gleichung $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ (Übung!). $\square$

Ende der Videos von 2021-06-08

6. Konvexität

6.1. Der Satz von Hahn-Banach

Zur Motivation halten wir ein Ergebnis über die stetige Fortsetzbarkeit von auf dichten Teilmengen definierten Abbildungen fest:

6.1 Satz. (a) *Seien X und Y metrische Räume. Ist Y vollständig, $D \subseteq X$ dicht und $f_0 \colon D \to Y$ gleichmäßig stetig, so hat f_0 genau eine stetige Fortsetzung $f \colon X \to Y$. Ist ferner f_0 eine Isometrie, so ist f ebenfalls eine Isometrie.*

(b) *Seien E und G normierte Räume über $\mathbb{K}$, G vollständig, $F \subseteq E$ ein dichter linearer Teilraum und $T_0 \in \mathcal{L}(F, G)$ gegeben. Dann existiert genau eine Fortsetzung $T \in \mathcal{L}(E, G)$ von T_0, d.h. es existiert genau ein $T \in \mathcal{L}(E, G)$ mit $T|_F = T_0$. Dabei gilt $\|T\| = \|T_0\|$.*

Beweis. (a) Ist $x \in X$ und $(x_n)_n$ eine Folge in D mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$, so ist $(f_0(x_n))_n$ eine Cauchyfolge in Y, da f gleichmäßig stetig ist. Da Y vollständig ist, existiert somit $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) \in Y$. Diese Definition ist auch unabhängig von der Wahl der Folge $(x_n)_n$, wie ein Folgenmischverfahren zeigt. Ferner ist die so definierte Funktion $f \colon X \to Y$ offensichtlich die einzig stetige Funktion mit $f|_D = f_0$ (da $D \subseteq X$ dicht liegt). Man sieht leicht, dass f eine Isometrie ist, falls dies für f_0 gilt.
(b) Übung (man verwende (a)). □

Seien $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $F \subseteq E$ ein Unterraum und $\varphi \in F'$ eine stetige Linearform auf F bzgl. $\|\cdot\|$. Ein Ziel dieses Kapitels ist es, die Existenz einer stetigen Fortsetzung $\psi \in E'$ von φ auf E mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$ nachzuweisen. Unter den folgenden Zusatzvoraussetzungen können wir dies bereits:

(1) $F \subseteq E$ ist dicht. Dann existiert genau eine solche Fortsetzung ψ gemäß Satz 6.1.

(2) E ist ein Hilbertraum. Dann kann man mit Satz 6.1 zunächst φ auf $\overline{F} \subseteq E$ fortsetzen und dann $\psi \coloneqq \varphi \circ P \in E'$ betrachten, wobei P die orthogonale Projektion auf $\overline{F}$ sei. Dann hat ψ die gewünschten Eigenschaften.

(3) In einem beliebigen normierten Raum E reicht es, mit demselben Argument wie in (2), dass $\overline{F}$ in E stetig projiziert ist.

Im Folgenden betrachten wir nun einen allgemeinen Rahmen für die skalarwertige Version dieses Problems, zunächst ohne die Stetigkeit zu berücksichtigen, aber stattdessen mit einer (absolut) konvexen dominierenden Funktion. Die Existenz einer dominierten

Fortsetzung wird noch eine wichtige Rolle spielen. Speziell in normierten Räumen liefert sie stetige Fortsetzungen.

6.2 Satz (von Hahn-Banach, 1. Version)**.** *Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum, $p\colon V \to \mathbb{R}$ konvex und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\varphi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\psi\colon V \to \mathbb{R}$ von φ mit $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in V$.*

Beweis. 1. Fall: $V = U \oplus \operatorname{span}\{z\}$ für ein $z \in V \setminus U$. Dann ist jede lineare Fortsetzung ψ von φ auf V durch $\psi(z)$ bereits festgelegt, da dann

$$\psi(x + \mu z) = \varphi(x) + \mu\psi(z) \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } \mu \in \mathbb{R} \text{ gilt.} \tag{6.1}$$

Seien $x, y \in U$ und $\alpha, \beta > 0$, und sei $\lambda \coloneqq \frac{\beta}{\beta+\alpha}$. Dann ist $0 < \lambda < 1$ und $1 - \lambda = \frac{\alpha}{\beta+\alpha}$, also

$$\begin{aligned}\beta\varphi(x) + \alpha\varphi(y) &= \varphi(\beta x + \alpha y) = (\alpha+\beta)\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &\leq (\alpha+\beta)p(\lambda(x - \alpha z) + (1-\lambda)(y + \beta z))\\ &\leq \beta p(x - \alpha z) + \alpha p(y + \beta z)\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{\alpha}(\varphi(x) - p(x - \alpha z)) \leq \frac{1}{\beta}(p(y + \beta z) - \varphi(y)).$$

Also existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{\substack{x\in U\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}(\varphi(x) - p(x - \alpha z)) \leq c \leq \inf_{\substack{x\in U\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}(p(x + \alpha z) - \varphi(x))$$

Definiere ψ nun durch (6.1) mit $\psi(z) \coloneqq c$. Dann gilt

$$\psi(x \pm \alpha z) = \varphi(x) \pm \alpha c \leq p(x \pm \alpha z) \qquad \text{für } x \in U \text{ und } \alpha > 0,$$

und für $\alpha = 0$ gilt dies nach Voraussetzung. Also hat ψ die gewünschten Eigenschaften.

2. Allgemeiner Fall: Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Paare (W, ψ), wobei $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $U \subseteq W$ und $\psi\colon W \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist mit

$$\psi|_U = \varphi \qquad \text{und} \qquad \psi(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in W.$$

Dann ist eine Halbordnung auf $\prec$ auf $\mathcal{Z}$ definiert durch

$$(W_1, \psi_1) \prec (W_2, \psi_2) \qquad :\iff \qquad W_1 \subseteq W_2 \quad \text{und} \quad \psi_2|_{W_1} = \psi_1.$$

Dabei besitzt jede Kette (d.h. totalgeordnete Teilmenge) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$ eine obere Schranke gegeben durch (W_0, ψ_0) mit

$$W_0 \coloneqq \{x \in V \mid \text{es gibt } (W, \psi) \in \mathcal{N} \text{ mit } x \in W\}$$

und $\psi_0\colon W_0 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi_0(x) \coloneqq \psi(x)$ falls $(W, \psi) \in \mathcal{N}$ und $x \in W$. Aus der

Ketteneigenschaft erhält man, dass $W_0 \subseteq V$ ein Unterraum und ψ_0 eine wohldefinierte lineare Abbildung mit $\psi|_U = \varphi$ und $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in W$ ist. Das Zornsche Lemma besagt nun, dass die Menge $\mathcal{Z}$ ein maximales Element (W, ψ) bezüglich der Halbordnung $\prec$ besitzt. Dabei muss $W = V$ sein, denn sonst könnte man $z \in V \setminus W$ wählen und ψ entsprechend dem ersten Fall unter Erhalt der Abschätzung $\psi \leq p$ auf $W \oplus \operatorname{span}\{z\}$ fortsetzen, was der Maximalität von (W, ψ) widerspräche. Es folgt, dass $\psi\colon V \to \mathbb{R}$ die gewünschten Eigenschaften hat. $\square$

6.3 Satz (von Hahn-Banach, 2. Version)**.** *Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum, $p\colon V \to \mathbb{R}$ absolut konvex und $\varphi\colon U \to \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit $|\varphi(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine $\mathbb{K}$-lineare Fortsetzung $\psi\colon V \to \mathbb{K}$ von φ mit $|\psi(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in V$.*

Beweis. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt dies aus Satz 6.2: Hat man nämlich eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\psi\colon V \to \mathbb{R}$ gefunden mit $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in V$, so gilt auch

$$-\psi(x) = \psi(-x) \leq p(-x) = p(x) \qquad \text{für alle } x \in V$$

und damit $|\psi| \leq p$. Sei daher im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ angenommen. Wir betrachten $\gamma \coloneqq \operatorname{Re}\varphi\colon U \to \mathbb{R}$. Dann ist γ $\mathbb{R}$-linear und es gilt:

$$\gamma(\mathrm{i}x) = \operatorname{Re}(\mathrm{i}\varphi(x)) = -\operatorname{Im}\varphi(x), \quad \text{also} \quad \varphi(x) = \gamma(x) - \mathrm{i}\gamma(\mathrm{i}x) \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Ferner gilt $\gamma(x) \leq |\varphi(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in U$, und nach Satz 6.2 besitzt γ eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\Gamma\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(x) \leq p(x)$ für alle $x \in V$. Sei nun $\psi\colon V \to \mathbb{C}$ definiert durch $\psi(x) \coloneqq \Gamma(x) - \mathrm{i}\Gamma(\mathrm{i}x)$. Dann ist ψ eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von φ. Ferner gilt $\psi(\mathrm{i}x) = \Gamma(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\Gamma(-x) = \mathrm{i}(\Gamma(x) - \mathrm{i}\Gamma(\mathrm{i}x)) = \mathrm{i}\psi(x)$, d.h. ψ ist sogar $\mathbb{C}$-linear. Schließlich existiert für jedes $x \in V$ ein $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ mit $|\psi(x)| = a\psi(x) = \psi(ax) \in \mathbb{R}$ und somit

$$|\psi(x)| = \Gamma(ax) \leq p(ax) = p(x).$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Sei im Folgenden $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

6.4 Satz (von Hahn-Banach, 3. Version)**.** *Sind ein linearer Teilraum F von E und $\varphi \in F'$ gegeben, so existiert eine Fortsetzung $\psi \in E'$ von φ auf E mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Beweis. Sei $p\colon E \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(x) \coloneqq \|\varphi\|\|x\|$. Dann ist p absolut konvex und $|\varphi| \leq p$ auf F. Nach Satz 6.3 existiert eine $\mathbb{K}$-lineare Fortsetzung $\psi\colon E \to \mathbb{K}$ von φ mit $|\psi(x)| \leq p(x) = \|\varphi\|\|x\|$ für alle $x \in E$, also $\psi \in E'$ und $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. Da ferner $\psi|_F = \varphi$ gilt, folgt $\|\psi\| = \|\varphi\|$. $\square$

Bemerkung: Ist E separabel, so kann man Satz 6.4 auch ohne Verwendung des Zornschen Lemmas beweisen.

6.5 Korollar. *Zu $x \in E \setminus \{0\}$ existiert ein $\psi \in E'$ mit $\psi(x) = \|x\|$ und $\|\psi\| = 1$.*

Beweis. Seien $F \coloneqq \operatorname{span}\{x\} \subseteq E$ und $\varphi \in F'$ definiert durch $\varphi(\lambda x) \coloneqq \lambda\|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Satz 6.4 existiert $\psi \in E'$ mit $\psi|_F = \varphi$ und $\|\psi\| = \|\varphi\| = 1$. $\square$

6.2. Dualität

Sei wieder $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

6.6 Definition. Wir setzen $E'' := (E')' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ und definieren die Abbildung $i_E \colon E \to E''$ durch

$$i_E(x)(\varphi) := \varphi(x) \qquad \text{für } x \in E \text{ und } \varphi \in E'.$$

6.7 Satz. *$i_E \colon E \to E''$ ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Die Linearität von i_E ist einfach zu sehen. Ferner gilt für $x \in E$ und $\varphi \in E'$:

$$|i_E(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|, \qquad \text{also} \qquad \|i_E(x)\| \leq \|x\|.$$

Sei nun $x \in E \setminus \{0\}$. Nach Korollar 6.5 existiert $\psi \in E'$ mit $\|\psi\| = 1$ und $\psi(x) = \|x\|$, also $|i_E(x)(\psi)| = |\psi(x)| = \|x\|\|\psi\|$. Es folgt $\|i_E(x)\| \geq \|x\|$, und insgesamt folgt Gleichheit. Also ist i_E eine Isometrie. □

6.8 Korollar. *Jeder normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist isometrisch und dicht in einem Banachraum $\hat{E}$ eingebettet, welcher bis auf isometrische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man nennt $\hat{E}$ die* Vervollständigung *von E.*

Beweis. Wähle $\hat{E} := \overline{\operatorname{Bild} i_E} \subseteq E''$. Da E'' ein Banachraum ist, ist $\hat{E}$ dies auch. Ferner ist $i_E \colon E \to E''$ eine Isometrie und $\operatorname{Bild} i_E$ dicht in $\hat{E}$, wie gewünscht. Die Eindeutigkeit von $\hat{E}$ bis auf Isomorphie folgt mit einem einfachen Folgenargument aus der Voraussetzung, dass die Einbettungen lineare Isometrien sind. □

Im Folgenden sei $(F, \|\cdot\|)$ stets ein weiterer normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

6.9 Definition und Satz. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ist der *duale Operator* $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ wohldefiniert durch

$$(T'\varphi)(x) := \varphi(Tx) \qquad \text{für } \varphi \in F' \text{ und } x \in E.$$

Ferner sei $T'' := (T')' \in \mathcal{L}(E'', F'')$

Beweis der Wohldefiniertheit und Stetigkeit von T'. Für $\varphi \in F'$ und $x \in E$ ist

$$|(T'\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leq \|\varphi\|\|T\|\|x\|,$$

also $T'\varphi \in E'$ mit $\|T'\varphi\| \leq \|T\|\|\varphi\|$. Da T' offensichtlich linear ist, folgt $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ mit $\|T'\| \leq \|T\|$. □

6.10 Satz. *Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ gilt*

(a) $\|T\| = \|T'\|$

(b) *Das Diagramm* $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle i_E}\big\downarrow & & {\scriptstyle i_F}\big\downarrow \\ E'' & \xrightarrow{T''} & F'' \end{array}$ *kommutiert, d.h. es gilt* $i_F \circ T = T'' \circ i_E$.

Beweis. Zuerst zu (b): Für $x \in E$ und $\varphi \in F'$ gilt

$$i_F(Tx)(\varphi) = \varphi(Tx) = (T'\varphi)(x) = i_E(x)(T'\varphi) = (T''i_E(x))(\varphi),$$

also $(i_F \circ T)(x) = (T'' \circ i_E)(x)$. Dies zeigt (b).

Nun zu (a): Der Beweis von Definition und Satz 6.9 zeigt direkt: $\|T\| \geq \|T'\| \geq \|T''\|$. Da i_E und i_F Isometrien sind, ist andererseits

$$\|T''\| \geq \|T'' \circ i_E\| \overset{\text{(b)}}{=} \|i_F \circ T\| = \|T\|.$$

Es folgt: $\|T''\| = \|T\| = \|T'\|$. ☐

6.11 Satz. *Sei* $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) *Ist* $(G, \|\cdot\|)$ *ein weiterer normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $S \in \mathcal{L}(F, G)$, *so gilt* $(ST)' = T'S' \in \mathcal{L}(G', E')$.

(b) *Ist* T *ein topologischer Isomorphismus, so auch* T', *und es gilt* $(T')^{-1} = (T^{-1})' \in \mathcal{L}(E', F')$.

Beweis. (a) Für $\varphi \in G'$ und $x \in E$ ist

$$((ST)'(\varphi))(x) = \varphi(STx) = (S'\varphi)(Tx) = (T'S'\varphi)(x),$$

also $(ST)'(\varphi) = T'S'\varphi$ für $\varphi \in G'$ und somit $(ST)' = T'S' \in \mathcal{L}(G', E')$. (b) folgt direkt aus (a). ☐

Ende der Videos von 2021-06-11

6.12 Definition. Für $M \subseteq E$ und $N \subseteq E'$ sei

$$M^\perp := \{\varphi \in E' \mid \varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\},$$
$$N^\perp := \{x \in E \mid \varphi(x) = 0 \text{ für alle } \varphi \in N\}.$$

6.13 Bemerkung. (a) Die Notation in Definition 6.12 kann für Teilmengen von E' doppeldeutig sein: Es muss aus dem Zusammenhang klar werden, ob man das duale Paar (E, E') oder das duale Paar (E', E'') betrachtet. Falls nicht extra erwähnt, meinen wir hier immer das Paar (E, E').

(b) Ist E ein Hilbertraum und identifiziert man E' mit E mittels des Rieszschen Darstellungssatzes, d.h. vermöge der Abbildung $E \to E', x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$, so stimmt die obige Definition der „Orthogonalkomplemente“ mit der in Kapitel 5 überein.

6.14 Satz. *Für $M \subseteq E$ gilt:*

(a) *$M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von E'.*

(b) *$M^\perp = (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$.*

Für $N \subseteq E'$ gelten analoge Aussagen.

Beweis. Leichte Übung. □

6.15 Satz. (a) *Für $M \subseteq E$ gilt $M^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} M}$.*

(b) *Für $N \subseteq E'$ gilt $\overline{\operatorname{span} N} \subseteq N^{\perp\perp}$.*

(c) *Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$, so gilt* $\operatorname{Kern} T' = (\operatorname{Bild} T)^\perp$ *und* $\operatorname{Kern} T = (\operatorname{Bild} T')^\perp$.

6.16 Bemerkung. In (b) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit, siehe Beispiele 6.17(d). Wählt man in (c) insbesondere $E = F$ und $T = I$, so erhält man $\{0_{E'}\} = E^\perp$ und $\{0_E\} = (E')^\perp$.

Beweis von Satz 6.15. (a) „$\supseteq$": Wegen Satz 6.14 ist $M^\perp = (\overline{\operatorname{span} M})^\perp$; für $x \in \overline{\operatorname{span} M}$ und $\varphi \in M^\perp$ gilt also $\varphi(x) = 0$. Es folgt $\overline{\operatorname{span} M} \subseteq M^{\perp\perp}$. „$\subseteq$": Sei $x \notin F := \overline{\operatorname{span} M}$. Dann ist die Projektion $P\colon F \oplus \operatorname{span}\{x\} \to \operatorname{span}\{x\}$ mit $\operatorname{Kern} P = F$ stetig nach Satz 3.24(a). Sei nun $\varphi \in (F \oplus \operatorname{span}\{x\})'$ definiert durch $\varphi := h \circ P$, wobei die lineare Abbildung $h\colon \operatorname{span}\{x\} \to \mathbb{K}$ definiert sei durch $h(x) := 1$. Nach Satz 6.4 existiert eine Fortsetzung $\psi \in E'$ von φ, d.h. insbesondere ist $\psi|_M = \varphi|_M = 0$ und $\psi(x) = \varphi(x) = 1$. Also ist $\psi \in M^\perp$ und $x \notin M^{\perp\perp}$.

(b) Wegen Satz 6.14 ist $N^\perp = (\overline{\operatorname{span} N})^\perp$; für $\varphi \in \overline{\operatorname{span} N}$ und $x \in N^\perp$ gilt also $\varphi(x) = 0$. Es folgt $\overline{\operatorname{span} N} \subseteq N^{\perp\perp}$.

(c) Es gilt

$$\operatorname{Kern} T' = \{\varphi \in F' \mid 0 = (T'\varphi)(x) = \varphi(Tx) \text{ für alle } x \in E\} = (\operatorname{Bild} T)^\perp.$$

Ist ferner $x \in \operatorname{Kern} T$, d.h. $Tx = 0$, so gilt $0 = \varphi(Tx) = (T'\varphi)(x)$ für alle $\varphi \in F'$, also $x \in (\operatorname{Bild} T')^\perp$. Ist anderseits $x \notin \operatorname{Kern} T$, d.h. $Tx \neq 0$, so existiert nach Korollar 6.5 ein $\psi \in F'$ mit $0 \neq \psi(Tx) = (T'\psi)(x)$, also $x \notin (\operatorname{Bild} T')^\perp$. □

6.17 Beispiele. (a) Seien $U \subseteq E$ ein Unterraum und $j\colon U \to E$ die Inklusion. Dann ist $R := j'\colon E' \to U'$ die Restriktion, definiert durch $R\varphi := \varphi|_U$ für $\varphi \in E'$, da gilt:

$$(R\varphi)(x) = \varphi(j(x)) \qquad \text{für } x \in U,\ \varphi \in E'.$$

Dabei ist R surjektiv nach Satz 6.4. Ferner gilt

$$\operatorname{Kern} R = (\operatorname{Bild} j)^\perp = U^\perp.$$

(b) Sei $E \coloneqq \ell^1$. Für $x = (x_k)_k \in \ell^\infty$ ist dann eine stetige Linearform $\varphi_x \in (\ell^1)'$ definiert durch

$$\varphi_x(y) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad \text{für } y = (y_k)_k \in \ell^1.$$

Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\ell^\infty \to (\ell^1)', \qquad x \mapsto \varphi_x$$

ein isometrische Isomorphismus ist: Sei dazu zunächst $x \in \ell^\infty$. Wegen $|\varphi_x(y)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$ für $y \in \ell^1$ ist dann $\|\varphi_x\| \leq \|x\|_\infty$. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und $y \coloneqq \overline{x}_k e_k$ gilt

$$|x_k|^2 = \varphi_x(y) \leq \|\varphi_x\| \|y\|_1 = \|\varphi_x\| |x_k|, \qquad \text{also } \|\varphi_x\| \geq |x_k|.$$

Somit folgt $\|\varphi_x\| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_\infty$ und insgesamt $\|\varphi_x\| = \|x\|_\infty$. Es bleibt noch die Surjektivität der Abbildung zu zeigen. Sei dazu $\varphi \in (\ell^1)'$ beliebig und $x_k \coloneqq \varphi(e_k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Wie oben folgt dann

$$|x_k|^2 = \varphi(\overline{x}_k e_k) \leq \|\varphi\| |x_k|, \qquad \text{also } |x_k| \leq \|\varphi\|$$

und somit $\|x\|_\infty \leq \|\varphi\|$ für $x = (x_k)_k$. Also ist $x \in \ell^\infty$, und für $y \in \ell^1$ gilt

$$\varphi_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi(e_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k\right) = \varphi(y),$$

d.h. $\varphi = \varphi_x$.

(c) Die Abbildung $x \mapsto \varphi_x$ aus (b) definiert im Fall $p \in (1, \infty)$ auch einen isometrischen Isomorphismus $\ell^{p'} \to (\ell^p)'$ (Übung). Hier ist $p' = \frac{p}{p-1}$ wie üblich der konjugierte Exponent zu p. Im Fall $p = \infty$ ist die Abbildung

$$\ell^1 \to (\ell^\infty)', \qquad x \mapsto \varphi_x$$

zwar immer noch eine Isometrie, aber nicht mehr surjektiv (Übung).

(d) Wir zeigen, dass für $N \subseteq E'$ im Allgemeinen nicht $\overline{\operatorname{span} N} = N^{\perp\perp}$ gilt. Sei dazu $E = \ell^1$ und $\ell^\infty \to (\ell^1)', x \mapsto \varphi_x$ der isometrische Isomorphismus aus (b). Sei ferner

$$N \coloneqq \{\varphi_{e_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq (\ell^1)'.$$

Für $y = (y_k)_k \in N^\perp \subseteq \ell^1$ gilt dann

$$y_k = \varphi_{e_k}(y) = 0 \qquad \text{für alle } k,$$

also $y = 0$. Somit ist $N^\perp = \{0\}$, also $N^{\perp\perp} = (\ell^1)'$. Andererseits ist

$$\operatorname{span} N = \{\varphi_x \mid x \in \mathcal{F}\},$$

wobei $\mathcal{F}$ wie bisher den Raum der finiten Folgen bezeichne. Dies liefert wegen (b) dann

$$\overline{\operatorname{span} N} = \left\{\varphi_x \;\middle|\; x \in \overline{\mathcal{F}}^{\ell^\infty}\right\} = \{\varphi_x \mid x \text{ ist Nullfolge}\} \subsetneq \{\varphi_x \mid x \in \ell^\infty\} = (\ell^1)'.$$

Somit folgt $\overline{\operatorname{span} N} \subsetneq N^{\perp\perp}$.

6.3. Trennungssätze

Sei wieder $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

6.18 Definition und Satz. Sei $C \subseteq E$ konvex mit $0 \in \mathring{C}$, und sei $\gamma_C\colon E \to \mathbb{R}$ die *Eichfunktion*, definiert durch

$$\gamma_C(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tC\} = \inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \frac{x}{t} \in C\right\}.$$

Dann ist γ_C *sublinear*, d.h. für $x, y \in E$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\gamma_C(\lambda x) = \lambda\gamma_C(x) \qquad \text{und} \qquad \gamma_C(x+y) \leq \gamma_C(x) + \gamma_C(y).$$

Insbesondere ist γ_C also konvex, wie man leicht sieht.

Beweis. Komplett analog zum Beweis von Satz 2.6. □

6.19 Satz (Trennungssatz von Mazur)**.** *Sei $C \subseteq E$ konvex und offen, und sei $W \subseteq E$ ein Unterraum. Sei ferner $x_0 \in E$ mit $C \cap (x_0 + W) = \varnothing$ gegeben. Dann existieren $\psi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re}\psi(x) < \alpha \qquad \text{für } x \in C \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\psi|_{x_0+W} \equiv \alpha. \tag{6.2}$$

Beweis. Zuerst beweisen wir den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Fall: $0 \in C$. Dann ist $0 \notin x_0 + W$ und somit $x_0 \notin W$. Setze $U := W \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ und definiere die lineare Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(w + \lambda x_0) := \lambda$ für $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $w \in W$ und $\lambda > 0$ gilt nun $\frac{1}{\lambda}w + x_0 \notin C$, also $w + \lambda x_0 \notin \lambda C$ und somit (da 0 in C liegt und C konvex ist)

$$w + \lambda x_0 \notin tC \qquad \text{für } t \in [0, \lambda].$$

Es folgt

$$\gamma_C(w + \lambda x_0) = \inf\{t > 0 \mid w + \lambda x_0 \in tC\} \geq \lambda = \varphi(w + \lambda x_0)$$

Dies gilt offensichtlich auch für $\lambda \leq 0$, und somit ist $\varphi \leq \gamma_C$ auf ganz U. Nach Satz 6.2 und Definition und Satz 6.18 existiert also eine lineare Fortsetzung $\psi\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\psi \leq \gamma_C$ auf E. Insbesondere ist dann $\psi \equiv 1$ auf $x_0 + W$ und $\psi \leq \gamma_C < 1$ auf C nach Definition von γ_C, da C offen ist. Ferner ist ψ stetig, denn nach Voraussetzung existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq C$, und somit ist

$$\psi \leq \gamma_C \leq 1 \qquad \text{auf } B_\varepsilon(0).$$

Aufgrund der Linearität folgt dann $|\psi| \leq 1$ auf $B_\varepsilon(0)$ und somit $\sup_{B_1(0)}|\psi| \leq \frac{1}{\varepsilon}$; und dies liefert die Stetigkeit von ψ. Insgesamt folgt also die Behauptung für ψ mit $\alpha = 1$.

2. Fall: $0 \notin C$. Wähle dann $x_1 \in C$ und betrachte $C' := C - x_1$ sowie $x_0' := x_0 - x_1$. Der erste Fall liefert dann $\psi \in E'$ mit $\psi|_{C'} < 1$ und $\psi|_{x_0'+W} \equiv 1$. Mit $\alpha := 1 + \psi(x_1)$ folgt also

$$\psi|_C < \alpha \qquad \text{und} \qquad \psi|_{x_0+W} \equiv \alpha,$$

wie gewünscht.

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, dann ist E auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und W ist ein reell-linearer Teilraum von E. Mit dem Ergebnis von oben erhalten wir $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein stetiges reell lineares Funktional $\widetilde{\psi}\colon E \to \mathbb{R}$, so dass (6.2) erfüllt ist. Wir erhalten das gesuchte $\psi \in E'$, indem wir für $x \in E$ setzen: $\psi(x) := \widetilde{\psi}(x) - \mathrm{i}\widetilde{\psi}(\mathrm{i}x)$; siehe auch den Beweis von Satz 6.3. ☐

6.20 Korollar. *Seien $C_1, C_2 \subseteq E$ nichtleer und konvex mit $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.*

(a) *Ist C_1 offen, so existieren $\psi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re}\psi(x) < \alpha \text{ für } x \in C_1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re}\psi(x) \geq \alpha \text{ für } x \in C_2.$$

Ist zusätzlich C_2 offen, so ist die zweite Ungleichung ebenfalls strikt.

(b) *Ist C_1 kompakt und C_2 abgeschlossen, so existieren $\psi \in E'$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re}\psi(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < \operatorname{Re}\psi(y) \qquad \text{für } x \in C_1,\ y \in C_2.$$

Beweis. (a) Wir setzen $C := C_1 - C_2$. Dann ist C offen, konvex und $0 \notin C$, da $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ gilt. Anwendung von Satz 6.19 auf C, $W = \{0\}$ und $x_0 = 0$ liefert $\psi \in E'$ mit

$$\operatorname{Re}\psi(z) < \operatorname{Re}\psi(0) = 0 \qquad \text{für alle } z \in C,$$

also

$$\operatorname{Re}\psi(x) < \operatorname{Re}\psi(y) \qquad \text{für alle } x \in C_1,\, y \in C_2.$$

Für alle $x \in C_1$ ist somit $\operatorname{Re}\psi(x) \leq \alpha := \inf_{C_2} \operatorname{Re}\psi$. Da C_1 offen ist, folgt $\operatorname{Re}\psi(x) < \alpha$ (Übung, dieser Beweisschritt wird später ergänzt). Ist C_2 ebenfalls offen, so folgt genauso auch $\operatorname{Re}\psi(x) > \alpha$ für alle $x \in C_2$.

(b) Nach Voraussetzung existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(C_1) \cap C_2 = \varnothing.$$

Anwendung von (a) auf die konvexen Mengen $U_\varepsilon(C_1)$ und C_2 liefert $\psi \in E'$ mit

$$\operatorname{Re}\psi(C_1) \subseteq \operatorname{Re}\psi(U_\varepsilon(C_1)) \subseteq (-\infty, \alpha) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re}\psi(C_2) \subseteq [\alpha, \infty).$$

da $\operatorname{Re}\psi(C_1)$ kompakt ist, folgt die Behauptung. ☐

6.21 Bemerkung. Auf die Voraussetzung der Offenheit kann man in Korollar 6.20 im Allgemeinen nicht verzichten (Übung).

Ende der Videos von 2021-06-15

6.4. Schwache Konvergenz und schwach*-Konvergenz

Seien im Folgenden stets E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$.

6.22 Definition. Eine Folge $(x_n)_n \subseteq E$ heißt *schwach konvergent gegen* $x \in E$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \psi(x) \qquad \text{für alle } \psi \in E'.$$

Wir schreiben dann $x_n \rightharpoonup x$ und $x = \text{w-lim}_{n\to\infty} x_n$.

6.23 Bemerkungen und Beispiele. (a) Der schwache Grenzwert x einer schwach konvergenten Folge $(x_n)_n \subseteq E$ ist eindeutig bestimmt, denn gilt auch $x_n \rightharpoonup y \in E$, so folgt

$$\psi(y-x) = \psi(y) - \psi(x) = \lim_{n\to\infty} (\psi(x_n) - \psi(x_n)) = 0 \qquad \text{für alle } \psi \in E'$$

und somit $y - x = 0$ gemäß Korollar 6.5.

(b) Konvergenz in E impliziert schwache Konvergenz.

(c) Die schwach konvergenten Folgen bilden einen Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums aller Folgen in E, und die schwache Grenzwertbildung ist $\mathbb{K}$-linear.

(d) Seien $p, q > 1$ zueinander konjugierte Exponenten. Nach Beispiele 6.17(c) gilt dann $(\ell^p)' = \ell^q$. Es folgt mit dem dort definierten isometrischen Isomorphismus $\ell^q \to (\ell^p)'$, $x \mapsto \varphi_x$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_x(e_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{für alle } x \in \ell^q,$$

also $e_n \rightharpoonup 0$ in ℓ^p.

(e) Ist $(x_n)_n \subseteq \ell^1$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ in ℓ^1 so folgt $x_n \to x$ (Für einen Beweis siehe Schröder, Funktionalanalysis) .

(f) Sei H ein Hilbertraum. Dann ist H' isometrisch (antilinear) isomorph zu H vermöge der Abbildung $H \to H'$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$. Somit gilt für eine Folge $(x_n)_n \subseteq H$ und $x \in H$:

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \text{für alle } y \in H. \tag{6.3}$$

Ist $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in H, so gilt $e_n \rightharpoonup 0$, denn für alle $y \in H$ bilden die Fourierkoeffizienten $\overline{\langle e_n, y\rangle} = \langle y, e_n\rangle$ gemäß der Besselschen Ungleichung (Satz 5.23) eine Folge in ℓ^2, also eine Nullfolge.

(g) Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ (bzgl. des Lebesgue-Maßes), sei $u \in H \setminus \{0\}$ gegeben und sei $u_n \in H$ definiert durch $u_n(x) := u(x-n)$. Dann gilt $\|u_n\| = \|u\| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit $u_n \not\to 0$ für $n \to \infty$. Behauptung: $u_n \rightharpoonup 0$ für $n \to \infty$. Zum Beweis verwenden wir (6.3). Sei dazu $v \in H$ beliebig. Dann ist

$$\langle u_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x-n)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

Weil $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ in H dicht liegt, existieren zu beliebigem $\varepsilon \in (0,1)$ Funktionen $\tilde{u}, \tilde{v} \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ mit $\|v - \tilde{v}\| < \varepsilon$ und $\|u - \tilde{u}\| < \varepsilon$, also auch $\|u_n - \tilde{u}_n\| < \varepsilon$ für $\tilde{u}_n \in H$, definiert durch $\tilde{u}_n(x) := \tilde{u}(x-n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ferner gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\langle \tilde{u}_n, \tilde{v}\rangle = 0$, wegen (6.4) und weil für große n $\operatorname{supp}(\tilde{u}_n)$ und $\operatorname{supp}(\tilde{v})$ disjunkt sind. Somit folgt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |\langle u_n, v\rangle| = |\langle u_n, v\rangle - \langle \tilde{u}_n, \tilde{v}\rangle| \leq \|u_n\|\|v - \tilde{v}\| + \|u_n - \tilde{u}_n\|\|\tilde{v}\| \\ \leq \varepsilon\left(\|u\| + \|v\| + 1\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt.

6.24 Satz. *Sei $(x_n)_n \subseteq E$ eine Folge und $x \in E$. Dann gilt:*

(a) $x_n \rightharpoonup x \implies (x_n)_n$ *ist beschränkt in E.*

(b) *Ist $(x_n)_n \subseteq E$ beschränkt und $M \subseteq E'$ eine totale Menge mit*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \qquad \text{für alle } \varphi \in M,$$

so gilt $x_n \rightharpoonup x$.

Beweis. (a) Sei $i_E \colon E \to E''$ der isometrische Homomorphismus aus Definition 6.6. Dann ist für jedes $\psi \in E'$ die Menge $\{(i_E x_n)(\psi) = \psi(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt. Weil E' ein Banachraum ist ist, folgt aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit (Hauptsatz 3.8), dass die Menge $\{i_E x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in E'' und somit auch die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in E beschränkt ist, da i_E eine Isometrie ist.

(b) Offensichtlich gilt

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \qquad \text{für alle } \varphi \in G := \operatorname{span} M \subseteq E'.$$

Weil sowohl E' als auch E'' Banachräume sind und $(i_E x_n)$ in E'' beschränkt ist, liefert uns Korollar 3.9(c) ein $\Lambda \in E''$, so dass $i_E x_n \to \Lambda$ punktweise auf **ganz** E' gilt. Wegen

$$\Lambda\varphi = \lim_{n\to\infty} (i_E x_n)(\varphi) = (i_E x)(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \operatorname{span} M,$$

weil $\operatorname{span} M$ dicht in E' liegt und weil Λ und $i_E x$ auf E' stetig sind, folgt $\Lambda = i_E x$ und somit die Behauptung. $\square$

6.25 Satz. *Sei $C \subseteq E$ abgeschlossen und konvex, und sei $(x_n)_n$ eine Folge in C mit $x_n \rightharpoonup x \in E$. Dann ist $x \in C$.*

Beweis. Wäre $x \notin C$, so würden nach Korollar 6.20(b) ein $\psi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren mit $\operatorname{Re}\psi|_C > \alpha > \operatorname{Re}\psi(x)$, also

$$\operatorname{Re}\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\psi(x_n) \geq \alpha > \operatorname{Re}\psi(x),$$

ein Widerspruch. $\square$

6.26 Korollar. *Sei $(x_n)_n \subseteq E$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in E$. Dann gilt $\|x\| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|$.*

Beweis. Sei $r \coloneqq \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = r$ gilt. Wir geben nun zwei alternative Argumente zum Abschluss des Beweises: 1. Seien $\varepsilon > 0$ und $C_\varepsilon \coloneqq B_{r+\varepsilon}(0) \subseteq E$. Dann ist $C_\varepsilon \subseteq E$ abgeschlossen und konvex, und es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in C_\varepsilon$ für $n \geq n_0$. Mit Satz 6.25 folgt $x \in C_\varepsilon$, also $\|x\| \leq r + \varepsilon$. Es folgt $\|x\| \leq r$, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war. 2. Für alle $\varphi \in E'$ gilt

$$|(i_E x)(\varphi)| = |\varphi(x)| = \lim_{n\to\infty}|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = r\|\varphi\|,$$

also $\|i_E x\| \leq r$. Da i_E eine Isometrie ist, folgt $\|x\| \leq r$. $\square$

6.27 Satz. *Sei $(x_n)_n \subseteq E$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in E$.*

(a) *Ist $B \subseteq E'$ präkompakt, so ist die Konvergenz $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ gleichmäßig in $\varphi \in B$, d.h.*
$$\sigma_n \coloneqq \sup_{\varphi\in B}|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(b) *Ist $(\varphi_n)_n \subseteq E'$ eine Folge mit $\varphi_n \to \varphi$, so folgt $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.*

Beweis. (a) Sei $y_n \coloneqq x_n - x$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $y_n \rightharpoonup 0$. Sei ferner $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 6.24 ist $M \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|y_n\| < \infty$. Da B präkompakt ist, existieren $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in B$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{\varepsilon}{2M}}(\varphi_i)$. Ferner existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi_i(y_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $i = 1, \dots, k$ und $n \geq n_0$. Zu beliebigen $\varphi \in B$ existiert nun $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $\|\varphi - \varphi_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Für $n \geq n_0$ ist also
$$|\varphi(y_n)| \leq |(\varphi - \varphi_i)(y_n)| + |\varphi_i(y_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\|y_n\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$
und somit $\sigma_n = \sup_{\varphi\in B}|\varphi(y_n)| \leq \varepsilon$.

(b) Nach Voraussetzung ist $B \coloneqq \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq E'$ relativ kompakt, also präkompakt. Ferner gilt
$$\sigma_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

also

$$|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| \leq \underbrace{|\varphi_n(x_n) - \varphi_n(x)|}_{\leq \sigma_n} + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \qquad \square$$

6.28 Bemerkung. Sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Dann ist T auch „schwach folgenstetig": Ist $(x_n)_n \subseteq E$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in E$, dann gilt $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in F. Für alle $\psi \in F'$ haben wir nämlich mit $\varphi := \psi \circ T \in E'$:

$$\lim_{n\to\infty} \psi(Tx_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) = \psi(Tx).$$

6.29 Definition. Eine Folge $(\psi_n)_n \subseteq E'$ heißt *schwach*-konvergent gegen* $\psi \in E'$, wenn sie auf E punktweise gegen ψ konvergiert, d.h. wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) \qquad \text{für alle } x \in E.$$

Wir schreiben dann $\psi_n \overset{\mathrm{w}^*}{\rightharpoonup} \psi$ und $\psi = \mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \psi_n$.

6.30 Bemerkung und Beispiel. (a) Vermöge der Abbildung $\ell^\infty \to (\ell^1)', x \mapsto \varphi_x$ aus Beispiele 6.17 können wir ℓ^∞ mit $(\ell^1)'$ identifizieren. Sei $x^n = (x^n_k)_k \in \ell^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $x^n_k = 0$ für $k \leq n$ und $x^n_k = 1$ für $k > n$. Dann gilt $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, denn

$$\varphi_{x^n}(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \to 0 \qquad \text{für alle } y \in \ell^1.$$

Allerdings gilt $x^n \not\rightharpoonup 0$ in ℓ^∞ (Übung).

(b) Satz 6.25 gilt i.A. nicht für die schwach*-Konvergenz in E'. Um dies zu sehen, betrachten wir die konvexe und abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq \ell^\infty$ der gegen 1 konvergierenden Folgen. Für die Folge $(x^n) \subseteq C$ aus (a) haben wir dann $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, aber $0 \notin C$.

(c) Korollar 6.26 gilt analog auch für die schwach*-Konvergenz: Sei $(\psi_n)_n \subseteq E'$ eine Folge mit $\psi_n \overset{\mathrm{w}^*}{\rightharpoonup} \psi \in E'$. Dann gilt

$$|\psi(x)| = \lim_{n\to\infty} |\psi_n(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\| \|x\| \qquad \text{für } x \in E$$

und somit $\|\psi\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\psi_n\|$.

6.31 Hauptsatz. *Ist E separabel, so hat jede beschränkte Folge in E' eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(x_k)_k \subseteq E$ eine dichte Folge in E, und sei $(\varphi_n)_n$ eine beschränkte Folge in E'. Dann sind auch die Folgen $(\varphi_n(x_k))_n \subseteq \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ beschränkt. Insbesondere existiert eine Teilfolge $(\varphi^1_n)_n$ von $(\varphi_n)_n$ und $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^1_n(x_1) = \lambda_1.$$

Ferner existiert eine Teilfolge $(\varphi_n^2)_n$ von $(\varphi_n^1)_n$ und $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^2(x_2) = \lambda_2.$$

Sukzessive findet man für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ eine Teilfolge $(\varphi_n^k)_n$ von $(\varphi_n^{k-1})_n$ und $\lambda_k \in \mathbb{K}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^k(x_k) = \lambda_k.$$

Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(\psi_n)_n$ gegeben durch $\psi_n \coloneqq \varphi_n^n$. Für diese Folge gilt offensichtlich

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x_k) = \lambda_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Weil E' ein Banachraum ist, (ψ_n) in E' beschränkt ist und $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ in E dicht liegt, liefern Korollar 3.9(c) und (b) ein $\psi \in E'$ mit w*-$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$. Man beachte, dass die Vollständigkeit von E im Beweis von Korollar 3.9 nur verwendet wird, um die Beschränktheit der Operatorenfolge zu zeigen. Diese ist aber in der vorliegenden Aussage schon vorausgesetzt. $\square$

Ende der Videos von 2021-06-18

6.5. Reflexivität und gleichmäßige Konvexität

Sei stets $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$.

6.32 Notation. In Analogie zum Skalarprodukt in einem reellen Vektorraum führen wir für $x \in E$ und $\varphi \in E'$ die Schreibweise

$$\langle\!\langle x, \varphi \rangle\!\rangle \coloneqq \varphi(x)$$

ein. Diese Form ist im ersten und zweiten Argument linear, im Gegensatz zum Skalarprodukt in einem komplexen Vektorraum. Einige Rechnungen in diesem Abschnitt fallen in dieser Schreibweise übersichtlicher aus.

Wie in vielen Texten üblich werden wir ab jetzt häufig Argumente linearer Abbildungen nicht mehr in Klammern setzen und die Komposition linearer Abbildungen ohne das Symbol „∘" schreiben.

Für einen weiteren normierten Raum F, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, $\varphi \in E'$, $\psi \in F'$ und die lineare Isometrie i_E aus Definition 6.6 gelten dann

$$\langle\!\langle Tx, \psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, T'\psi \rangle\!\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\!\langle x, \varphi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \varphi, i_E x \rangle\!\rangle.$$

6.33 Definition. Der Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt *reflexiv*, wenn die lineare Isometrie i_E surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus ist.

6.34 Bemerkungen und Beispiele. (a) Ist H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$, so ist H reflexiv. Genauer gilt

$$i_H = J_{H'} J_H \colon H \to H' \to H'',$$

wobei $J_H \colon H \to H'$ und $J_{H'} \colon H' \to H''$ die (antilinearen) isometrischen Isomorphismen aus dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 5.10) bzgl. der Hilberträume H und H' (mit dem Skalarprodukt aus Satz 5.10(b)) sind.

(b) Ist E reflexiv und F topologisch isomorph zu E, so ist auch F reflexiv. Dies folgt direkt aus Satz 6.10(b) und Satz 6.11(b). Insbesondere ist jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv, da jeder solche Raum topologisch isomorph zu einem Hilbertraum ist.

(c) Seien p, q konjugierte Exponenten in $[1, \infty]$. Die Abbildungen $S \in \mathcal{L}(\ell^p, (\ell^q)')$ und $T \in \mathcal{L}(\ell^q, (\ell^p)')$, definiert durch

$$(Sx)y := \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k =: (Ty)x, \qquad x = (x_k)_k \in \ell^p, y = (y_k)_k \in \ell^q,$$

sind Isometrien (Übung). Mit $E := \ell^p$ gilt dabei $T' i_E = S \colon \ell^p \to (\ell^q)'$, denn für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ ist

$$\langle\!\langle y, T' i_E x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle Ty, i_E x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, Ty \rangle\!\rangle = \langle\!\langle y, Sx \rangle\!\rangle.$$

Sind nun speziell $p, q \in (1, \infty)$, so sind S und T Isomorphismen (Übung), also ist auch T' ein Isomorphismus nach Satz 6.11. In diesem Fall ist also $i_E = (T')^{-1} S$ ein Isomorphismus, und somit ist der Raum ℓ^p reflexiv.

(d) Jeder reflexive normierte Raum ist isometrisch isomorph zu E'' und somit ein Banachraum, da E'' stets ein Banachraum ist. Allerdings ist nicht jeder Banachraum E, welcher isometrisch isomorph zu E'' ist, auch reflexiv. Der sogenannte James-Raum E ist isometrisch isomorph zu E'', aber nicht vermöge der Abbildung i_E. Genauer hat $\operatorname{Bild} i_E$ Kodimension 1 in E''. Zur Definition von E und dem Nachweis der genannten Eigenschaften siehe Robert James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proceedings National Academy of Sciences, Bd.37, 1951, S.174-177.

6.35 Hilfssatz. (a) *Ist E' separabel, so auch E.*

(b) *Ist E reflexiv und separabel, so ist auch E' separabel.*

Beweis. (a) Sei $S := \{\varphi \in E' \mid \|\varphi\| = 1\}$. Dann ist S ebenfalls separabel, d.h. es existiert eine dichte Folge $(\varphi_k)_k \subseteq S$. Ferner existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in E$ mit $\|x_k\| \leq 1$ und $\langle\!\langle x_k, \varphi_k \rangle\!\rangle \geq \frac{1}{2}$ (insbesondere reellwertig). Wir zeigen nun, dass die Menge $M := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ in E total ist. Wäre $M^\perp \neq \{0\}$ und $\varphi \in S \cap M^\perp$, so würde $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $\|\varphi - \varphi_k\| < \frac{1}{2}$ und somit

$$\frac{1}{2} \leq \langle\!\langle x_k, \varphi_k \rangle\!\rangle = |\langle\!\langle x_k, \varphi_k - \varphi \rangle\!\rangle| \leq \|x_k\| \|\varphi_k - \varphi\| < \frac{1}{2},$$

ein Widerspruch. Es folgt also $M^\perp = \{0\}$ und somit $\overline{\operatorname{span} M} = M^{\perp\perp} = E$ nach Satz 6.15 und Bemerkung 6.16.

(b) Da E reflexiv ist, ist mit E auch E'' separabel, also auch E' gemäß (a). $\square$

6.36 Bemerkungen und Beispiele. (a) Aus der Separabilität von E folgt im Allgemeinen nicht die Separabilität von E'. Zum Beispiel ist ℓ^1 separabel, aber $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ ist nicht separabel (Übung). Insbesondere folgt mit Hilfssatz 6.35(b), dass ℓ^1 nicht reflexiv ist.

(b) Ist K ein überabzählbarer kompakter metrischer Raum, so ist $C(K)$ separabel nach Korollar 4.13. Allerdings ist der Dualraum $C(K)'$ nicht separabel, da die Diracmaße $\delta_x \in C(K)'$, $x \in K$, definiert durch $\delta_x(f) := f(x)$ für $f \in C(K)$, eine überabzählbare diskrete Teilmenge von $C(K)'$ bilden (Übung). Es folgt wiederum mit Hilfssatz 6.35(b), dass $C(K)$ nicht reflexiv ist.

6.37 Satz. *Seien E reflexiv und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist auch F reflexiv.*

Beweis. Sei $j\colon F \to E$ die Inklusion. Nach Satz 6.10 ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\;j\;} & E \\ {\scriptstyle i_F}\big\downarrow & & {\scriptstyle i_E}\big\downarrow \\ F'' & \xrightarrow{\;j''\;} & E'' \end{array}$$

kommutativ. Wir bemerken zunächst:

$$\operatorname{Kern} j'' = \{0\}. \tag{6.5}$$

Ist nämlich $\Phi \in \operatorname{Kern} j'' \subseteq F''$, so gilt

$$0 = \langle\!\langle \tau, j''\Phi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle j'\tau, \Phi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tau|_F, \Phi \rangle\!\rangle \qquad \text{für alle } \tau \in E'.$$

Nach Satz 6.4 ist die Restriktion $j'\colon E' \to F'$ stetiger linearer Funktionale auf F surjektiv. Es folgt $\Phi = 0$. Zum Beweis der Surjektivität von i_F sei nun $\Psi \in F''$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in E$ mit $i_E x = j''\Psi$. Wir zeigen zunächst: $x \in F^{\perp\perp}$. Für $\varphi \in F^\perp \subseteq E'$ ist nämlich $j'\varphi = \varphi|_F \in F'$ die Nullabbildung und somit

$$0 = \langle\!\langle j'\varphi, \Psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \varphi, j''\Psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \varphi, i_E x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, \varphi \rangle\!\rangle.$$

Es folgt $x \in F^{\perp\perp} = \overline{F} = F$ nach Satz 6.15(a), also $x = jx$. Für beliebiges $\varphi \in E'$ gilt

$$\langle\!\langle \varphi, i_E jx \rangle\!\rangle = \langle\!\langle jx, \varphi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, j'\varphi \rangle\!\rangle \overset{x\in F}{=} \langle\!\langle j'\varphi, i_F x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \varphi, j'' i_F x \rangle\!\rangle$$

und somit

$$j''\Psi = i_E jx = j'' i_F x, \qquad \text{also} \qquad j''(\Psi - i_F x) = 0.$$

Dies liefert $\Psi = i_F x$ wegen (6.5). $\square$

6.38 Hauptsatz. *Ist E reflexiv, so hat jede beschränkte Folge in E eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(x_n)_n \subseteq E$ eine beschränkte Folge und $F := \overline{\operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq E$. Dann ist F separabel, und F ist auch reflexiv nach Satz 6.37. Also ist auch F' separabel nach Hilfssatz 6.35(b). Sei nun $\Phi_n := i_F x_n \in F''$ für $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Hauptsatz 6.31 können wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen:

$$\Phi_n \xrightarrow{w*} \Phi \qquad \text{in } F'' = (F')'$$

Da F reflexiv ist, existiert $x \in F$ mit $i_F x = \Phi$, und für alle $\varphi \in E'$ gilt dann mit $\psi = \varphi|_F \in F'$:

$$\langle\!\langle x_n - x, \varphi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x_n - x, \psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \psi, \Phi_n - \Phi \rangle\!\rangle \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \qquad \square$$

6.39 Bemerkung. (a) Hauptsatz 6.38 liefert zusammen mit Korollar 6.26, dass in jedem reflexiven Raum die Einheitskugel „schwach folgenkompakt“ ist.

(b) Ist E separabel, so gilt sogar (ohne Beweis): E ist genau dann reflexiv, wenn jede beschränkte Folge in E eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

(c) Aus Hauptsatz 6.38 folgt insbesondere, dass in jedem Hilbertraum jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

6.40 Satz. (a) *Ist E reflexiv, so auch E'.*

(b) *Ist E ein Banachraum und E' reflexiv, so ist auch E reflexiv.*

Beweis. (a) Zu zeigen ist die Surjektivität von $i_{E'} \colon E' \to E'''$. Für beliebige $\Phi \in E'''$ und $x \in E$ gilt (mit $i'_E := (i_E)'$)

$$\langle\!\langle i_E x, i_{E'} i'_E \Phi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle i'_E \Phi, i_E x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, i'_E \Phi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle i_E x, \Phi \rangle\!\rangle.$$

Weil $i_E \colon E \to E''$ surjektiv ist, liefert dies $i_{E'} i'_E \Phi = \Phi$, und weil Φ in E''' beliebig gewählt war, folgt $i_{E'} i'_E = I_{E'''}$. Damit ist $i_{E'}$ surjektiv, also bijektiv, und es gilt $i_{E'} = (i'_E)^{-1}$.

(b) Ist E' reflexiv, so ist nach (a) auch E'' reflexiv. Da E vermöge i_E zu einem (nach Voraussetzung) vollständigen und somit abgeschlossenen Teilraum von E'' topologisch isomorph ist, folgt mit Satz 6.37 und Bemerkungen und Beispiele 6.34(b), dass auch E reflexiv ist. $\square$

6.41 Bemerkung. Aus Bemerkungen und Beispiele 6.36(a) und Satz 6.40(b) folgt insbesondere, dass ℓ^∞ nicht reflexiv ist.

Im Folgenden wollen wir ein praktisches hinreichendes Kriterium für Reflexivität herleiten, die sogenannte gleichmäßige Konvexität eines Banachraums. Zuvor benötigen wir aber zwei Hilfssätze, welche auch anderweitig nützlich sind.

6.42 Hilfssatz („komplexer“ Trennungssatz in Ergänzung zu Abschnitt 6.3)**.** *Sei $C \subseteq E$ absolut konvex und abgeschlossen, und sei $x_0 \in E \setminus C$. Dann existieren $\psi \in E'$ und $\alpha > 0$ mit*

$$|\psi(y)| < \alpha < |\psi(x_0)| \qquad \textit{für } y \in C.$$

Beweis. Gemäß Korollar 6.20(b) existieren $\varphi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re}\varphi(x_0) < -\alpha < \operatorname{Re}\varphi|_C$. Für $\psi := -\varphi$ gilt dann $\operatorname{Re}\psi|_C < \alpha < \operatorname{Re}\psi(x_0)$. Wegen $0 \in C$ (aufgrund der absoluten Konvexität) erzwingt dies $\alpha > 0$. Es folgt

$$|\psi(x_0)| \geq \operatorname{Re}\psi(x_0) > \alpha.$$

Für ein beliebiges $y \in C$ existiert $\beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ und

$$|\psi(y)| = \beta\psi(y) = \psi(\beta y) = \operatorname{Re}\psi(\beta y) < \alpha.$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus den Eigenschaften von ψ und weil βy wegen der Symmetrie von C auch in C liegt. $\square$

Im Rest des Kapitels bezeichne stets $B := B_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel des normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$.

6.43 Hilfssatz. *Seien $\Psi \in E''$ mit $\|\Psi\|_{E''} \leq 1$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ gegeben. Sei ferner $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in B$ mit*

$$|\Psi(\varphi_i) - \varphi_i(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Es reicht, zu zeigen, dass $\eta := (\Psi(\varphi_1), \ldots, \Psi(\varphi_n)) \in \mathbb{K}^n$ in der Menge

$$C := \overline{\{(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \mid x \in B\}} \subseteq \mathbb{K}^n$$

liegt. Angenommen, es wäre $\eta \notin C$. Da C absolut konvex und abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ ist, existiert gemäß Hilfssatz 6.42 ein $\tau \in (\mathbb{K}^n)'$ und $\alpha > 0$ mit

$$|\tau(y)| < \alpha \quad \text{für } y \in C \qquad \text{und} \qquad |\tau(\eta)| > \alpha.$$

Dabei lässt sich τ nach dem Rieszschen Darstellungssatz bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{K}^n$ schreiben als $\tau(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ für $y \in \mathbb{K}^n$ mit geeigneten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Sei nun

$$\widetilde{\tau} := \tau \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \in E'.$$

Dann gilt $|\widetilde{\tau}(x)| = |\tau(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))| < \alpha$ für alle $x \in B$, also $\|\widetilde{\tau}\| \leq \alpha$. Andererseits ist

$$|\Psi(\widetilde{\tau})| = \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi(\varphi_i)\right| = |\tau(\eta)| > \alpha.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung $\|\Psi\|_{E''} \leq 1$. Die Behauptung folgt. $\square$

6.44 Definition. Der Raum E heißt *gleichmäßig konvex*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $x, y \in B$ die Implikation gilt:

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|x - y\| < \varepsilon. \tag{6.6}$$

6.45 Beispiele. (a) Ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum, so ist H gleichmäßig konvex, denn es gilt

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \le 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \qquad \text{für alle } x, y \in B.$$

(b) Der Raum $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$ ist gemäß (a) gleichmäßig konvex; allgemeiner ist $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$ für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex. Die Räume $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_1)$ und $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_\infty)$ sind aber nicht gleichmäßig konvex.

6.46 Satz. *Sei E gleichmäßig konvex und $(x_n)_n$ eine Folge in E.*

(a) *Gilt $x_n \rightharpoonup x \in E$ und $\|x_n\| \to \|x\|$, so folgt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.*

(b) *Gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{m \ge n} \big| \|x_m + x_n\| - 2 \big| = 0$, so ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.*

Beweis. (a) Ohne Einschränkung sei $x \neq 0$ (sonst folgt offensichtlich die Normkonvergenz) und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ und $z := \frac{x}{\|x\|}$. Dann gilt

$$\varphi(z_n) = \frac{1}{\|x_n\|}\varphi(x_n) \to \frac{1}{\|x\|}\varphi(x) = \varphi(z) \qquad \text{für } n \to \infty \text{ und alle } \varphi \in E',$$

also $z_n \rightharpoonup z$. Nach Korollar 6.5 existiert $\varphi \in E'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(z) = 1$. Es folgt

$$\|z_n + z\| \ge |\varphi(z_n + z)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\varphi(z) = 2.$$

Da E gleichmäßig konvex ist, folgt $\|z - z_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| z_n = \|x\| z = x.$$

(b) Nach Voraussetzung gilt (mit $m = n$) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. Ohne Einschränkung ist daher $\alpha_n := \|x_n\| \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir setzen $z_n := \frac{x_n}{\alpha_n} \in B$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|x_n + x_m\| \le \|z_n + z_m\| + \|x_n - z_n\| + \|x_m - z_m\| = \|z_n + z_m\| + |\alpha_n - 1| + |\alpha_m - 1|.$$

Es folgt nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{m \ge n} \left\| \frac{z_n + z_m}{2} \right\| \ge \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| = 1.$$

Also ist (z_n) eine Cauchyfolge, weil E gleichmäßig konvex ist. Da ferner

$$\|x_n - x_m\| \leq \|z_n - z_m\| + |1 - \alpha_n| + |1 - \alpha_m|$$

für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. $\square$

6.47 Satz (von Milman)**.** *Ist E ein gleichmäßig konvexer Banachraum, so ist E reflexiv.*

Beweis. Sei $\Psi \in E''$ mit $\|\Psi\| = 1$. Es reicht, zu zeigen, dass $\Psi \in \operatorname{Bild} i_E$ ist. Sei dazu $(\varepsilon_n)_n$ eine Nullfolge positiver Zahlen und $\varphi \in E'$ beliebig mit $\|\varphi\| = 1$. Nach Definition der Norm in E'' existieren $\alpha_n \in E'$ mit $\|\alpha_n\| \leq 1$ und

$$\Psi(\alpha_n) = |\Psi(\alpha_n)| > 1 - \varepsilon_n.$$

Nach Hilfssatz 6.43 existiert eine Folge $(x_n)_n \subseteq B$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\Psi(\varphi) - \varphi(x_n)| < \varepsilon_n$$

und

$$|\Psi(\alpha_i) - \alpha_i(x_n)| < \varepsilon_n \qquad \text{für } i = 1, \dots, n. \tag{6.7}$$

Wir zeigen: Als Konsequenz von (6.7) ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Für $1 \leq i \leq n$ ist nämlich

$$\operatorname{Re} \alpha_i(x_n) = \operatorname{Re} \Psi(\alpha_i) - \operatorname{Re}(\Psi(\alpha_i) - \alpha_i(x_n)) > 1 - \varepsilon_i - |\Psi(\alpha_i) - \alpha_i(x_n)| > 1 - \varepsilon_i - \varepsilon_n.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ folgt also

$$2 \geq \|x_m\| + \|x_n\| \geq \|x_m + x_n\| \geq |\alpha_n(x_m + x_n)| \geq \operatorname{Re} \alpha_n(x_m + x_n) > 2 - \varepsilon_m - 3\varepsilon_n$$

und somit

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{m \geq n} \Big| \|x_m + x_n\| - 2 \Big| = 0.$$

Mit Satz 6.46(b) folgt, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in E ist. Da E vollständig ist, existiert $x := \lim_{n \to \infty} x_n$, wobei gilt:

$$\Psi(\varphi) = \varphi(x) \qquad \text{und} \qquad \Psi(\alpha_i) = \alpha_i(x) \qquad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Jede andere Wahl von $\varphi \in E'$ führt aber zu demselben $x \in E$, denn erfüllen $x, y \in E$ die Bedingungen

$$\Psi(\alpha_i) = \alpha_i(x) \quad \text{und} \quad \Psi(\alpha_i) = \alpha_i(y) \qquad \text{für } i \in \mathbb{N},$$

so erfüllt die Folge $(x, y, x, y, \dots)$ Bedingung (6.7) anstelle von $(x_n)_n$ und ist somit nach obigem Argument eine Cauchyfolge, d.h. es gilt $x = y$. Fazit: Für das oben gefundene $x \in E$ gilt

$$\Psi(\varphi) = \varphi(x) \qquad \text{für alle } \varphi \in E',$$

also $\Psi = i_E x \in \operatorname{Bild} i_E$. $\square$

6.6. Anwendung auf die L^p-Räume

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

6.48 Hilfssatz. *Für $p \in [2, \infty)$ und $u, v \in L^p(\Omega)$ gilt*

$$\|u+v\|_p^p + \|u-v\|_p^p \le 2^{p-1}(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p).$$

Beweis. Es reicht offensichtlich, die Ungleichung

$$|z+w|^p + |z-w|^p \le 2^{p-1}(|z|^p + |w|^p) \qquad \text{für } z, w \in \mathbb{C} \tag{6.8}$$

zu zeigen. Wir verwenden dazu, dass für $a, b \ge 0$ gilt:

$$(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \le (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad a^2 + b^2 \le 2^{\frac{p-2}{p}}(a^p + b^p)^{\frac{2}{p}} \tag{6.9}$$

Damit erhält man nämlich

$$\begin{aligned} |z+w|^p + |z-w|^p &\le (|z+w|^2 + |z-w|^2)^{\frac{p}{2}} = (2(|z|^2 + |w|^2))^{\frac{p}{2}} \\ &= 2^{\frac{p}{2}}(|z|^2 + |w|^2)^{\frac{p}{2}} \le 2^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p-2}{2}}(|z|^p + |w|^p) = 2^{p-1}(|z|^p + |w|^p) \end{aligned}$$

für $z, w \in \mathbb{C}$, also (6.8). Nun zu (6.9): In der ersten Ungleichung reicht es aufgrund der Homogenität, den Fall $a^2 + b^2 = 1$ zu betrachten. Dann sind $a, b \in [0, 1]$, und somit ist $a^p + b^p \le a^2 + b^2 = 1$, da $p \ge 2$ ist. Die Ungleichung folgt. Wegen $p \ge 2$ ist die Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{p/2}$ konvex; somit gilt $(\frac{a^2+b^2}{2})^{\frac{p}{2}} \le \frac{a^p+b^p}{2}$ für $a, b \ge 0$. Dies zeigt die zweite Ungleichung in (6.9). $\square$

6.49 Satz. *Für $p \in [2, \infty)$ ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.*

Beweis. Für $u, v \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_p, \|v\|_p \le 1$ ist

$$\|u-v\|_p^p \overset{\text{Hilfssatz 6.48}}{\le} 2^{p-1}(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p) - \|u+v\|_p^p \le 2^p \left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p\right),$$

und dies liefert die gleichmäßige Konvexität. $\square$

6.50 Korollar. *Für $p \in (1, \infty)$ ist $L^p(\Omega)$ reflexiv, und mit $q = \frac{p}{p-1}$ hat man einen isometrischen Isomorphismus*

$$S\colon L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))', \qquad \langle\!\langle g, Sf \rangle\!\rangle := \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für } f \in L^q(\Omega),\ g \in L^p(\Omega).$$

Beweis. Die Höldersche Ungleichung liefert

$$|\langle\!\langle g, Sf \rangle\!\rangle| = \left|\int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu\right| \le \|f\|_q \|g\|_p \quad \text{für } f \in L^q(\Omega),\ g \in L^p(\Omega),$$

also ist $Sf \in (L^p(\Omega))'$ mit $\|Sf\| \le \|f\|_q$. Ist speziell $g \in L^p(\Omega)$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} |f(x)|^{\frac{q}{p}-1}\overline{f(x)} = |f(x)|^{q-2}\overline{f(x)}, & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) = 0. \end{cases}$$

so erhält man zudem

$$\|g\|_p = \|f\|_q^{q/p} \qquad \text{und} \qquad |\langle\!\langle g, Sf \rangle\!\rangle| = \|f\|_q^q,$$

also $\|Sf\| \ge \frac{|(Sf)(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q^{q-q/p} = \|f\|_q$. Insgesamt folgt also $\|Sf\| = \|f\|_q$, und somit ist S eine Isometrie.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $p \in [2, \infty)$. Dann ist $E := L^p(\Omega)$ reflexiv nach Satz 6.49 und Satz 6.47. Wir zeigen, dass S in diesem Fall surjektiv ist. Sei dazu $F := \operatorname{Bild} S \subseteq E'$. Dann ist F vollständig (als Bild eines Banachraums unter einer Isometrie) und somit abgeschlossen in E'. Angenommen, es gäbe $\varphi \in E' \setminus F$. Dann existiert auch $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\varphi) \cap F = \varnothing$, und nach dem Trennungssatz von Mazur (Satz 6.19) existiert $\Psi \in E''$ mit $\Psi|_F \equiv 0$ und $\langle\!\langle \varphi, \Psi \rangle\!\rangle \neq 0$ (dies kann man alternativ auch direkt aus Satz 6.4 folgern, s.a. den Beweis von Satz 6.15(a)). Aufgrund der Reflexivität von E ist $\Psi = i_E u$ für ein $u \in E$. Für alle $v \in L^q(\Omega)$ gilt dann

$$0 = \langle\!\langle Sv, \Psi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle Sv, i_E u \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u, Sv \rangle\!\rangle = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}\mu.$$

Durch die Wahl von $v = |u|^{\frac{p}{q}-1}\bar{u}$ folgt leicht $u = 0$, also $\Psi = 0$. Widerspruch. Also ist S surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus.

Mit Satz 6.40(a) und Bemerkungen und Beispiele 6.34(b) folgt nun, dass auch $L^q(\Omega) \cong E'$ reflexiv ist, und mit dem gleichen Argument wie oben ist dann auch die Abbildung

$$S\colon L^p(\Omega) \to (L^q(\Omega))', \qquad \langle\!\langle g, Sf \rangle\!\rangle = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus. Man durchläuft also alle Zahlen $p \in [2, \infty)$ und $q \in (1, 2]$ und erhält somit die Behauptung. □

6.51 Bemerkung. Man kann zeigen, dass $L^p(\Omega)$ auch für $1 < p < 2$ gleichmäßig konvex ist. Dazu verwendet man die elementare, aber nicht offensichtliche Ungleichung

$$\|u+v\|_p^q + \|u-v\|_p^q \le 2\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right)^{q-1}, \qquad u, v \in L^p(\Omega)$$

für $1 < p \le 2$ und $q := \frac{p}{p-1}$.

Beweis. Siehe z.B. Hirzebruch, Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Lemma 17.3. □

Ende der Videos von 2021-06-25

6.52 Satz. *Das Maß μ sei σ-endlich, d.h. es gebe $\Omega_k \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\Omega_k) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Dann ist $(L^1(\Omega))'$ isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$; zu jedem $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ existiert genau ein $f \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|f\|_\infty = \|\varphi\|$ und*

$$\varphi(g) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } g \in L^1(\Omega).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, und sei $\varphi_k \in (L^1(\Omega_k))'$ definiert durch $\varphi_k(g) \coloneqq \varphi(\tilde{g})$, wobei $\tilde{g} \in L^1(\Omega)$ die triviale Fortsetzung von $g \in L^1(\Omega_k)$ auf Ω bezeichne. Da $L^2(\Omega_k)$ stetig in $L^1(\Omega_k)$ eingebettet ist (gemäß Bemerkung und Beispiel 4.26(b)), ist $\varphi_k|_{L^2(\Omega_k)} \in (L^2(\Omega_k))'$. Somit existiert nach Korollar 6.50 (oder dem Rieszschen Darstellungssatz, vgl. Satz 5.10) genau ein $f_k \in L^2(\Omega_k)$ mit

$$\varphi_k(g) = \int_{\Omega_k} f_k g\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } g \in L^2(\Omega_k).$$

Die Eindeutigkeit zeigt dabei $f_k|_{\Omega_j} = f_j$ für $j \le k$, und somit existiert eine μ-messbare Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ mit $f|_{\Omega_k} = f_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen

$$f \in L^\infty(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|f\|_\infty \le \|\varphi\|. \tag{6.10}$$

Sei dazu

$$\alpha\colon \Omega \to \mathbb{K}, \qquad \alpha(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}, & f(x) \ne 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases}$$

d.h. $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ erfüllt $|\alpha| \le 1$ und $\alpha f = |f|$ in Ω. Sei ferner

$$A_n \coloneqq \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |f(x)| \ge \|\varphi\| + \frac{1}{n} \right\} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wäre $\mu(A_n) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so würde $k \in \mathbb{N}$ existieren mit $\mu(A) > 0$ für $A \coloneqq \Omega_k \cap A_n$. Mit $g \coloneqq \frac{\alpha 1_A}{\mu(A)} \in L^2(\Omega_k)$ wäre dann

$$\|\varphi\| + \frac{1}{n} \le \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_k} fg\,\mathrm{d}\mu = \varphi_k(g) = \varphi(\tilde{g}) \le \|\varphi\| \|\tilde{g}\|_{L^1(\Omega)} \le \|\varphi\|,$$

Widerspruch. Es folgt $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit ist

$$0 = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\big\{x \in \Omega \,\big|\, |f(x)| > \|\varphi\|\big\}\Big).$$

Es folgt (6.10). Somit ist eine Linearform $\eta \in (L^1(\Omega))'$ wohldefiniert durch $\eta(g) \coloneqq \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu$, und diese Linearform erfüllt

$$\eta(\tilde{g}) = \varphi_k(g) = \varphi(\tilde{g}) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } g \in L^2(\Omega_k). \tag{6.11}$$

Da $L^2(\Omega_k)$ in $L^1(\Omega_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ dicht liegt (leichte Übung; man verwende $\mu(\Omega_k) < \infty$), gilt (6.11) auch für $k \in \mathbb{N}$ und $g \in L^1(\Omega_k)$. Ist schließlich $g \in L^1(\Omega)$ und $g_k := g|_{\Omega_k} \in L^1(\Omega_k)$, so folgt $\widetilde{g_k} \to g$ in $L^1(\Omega)$ für $k \to \infty$ und somit

$$\varphi(g) = \lim_{k\to\infty} \varphi(\widetilde{g_k}) = \lim_{k\to\infty} \eta(\widetilde{g_k}) = \eta(g).$$

Somit gilt $\varphi = \eta$, und man hat $\|\varphi\| = \|\eta\| \leq \|f\|_\infty \leq \|\varphi\|$, also $\|f\|_\infty = \|\varphi\|$. $\square$

7. Spezielle Operatoren

7.1. Kompakte Operatoren

Seien E, F normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

7.1 Definition. Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_n \subseteq E$ die Bildfolge $(Tx_n)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir setzen $\mathcal{K}(E,F) := \{T\colon E \to F \mid T \text{ linear und kompakt}\}$ und $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E,E)$.

7.2 Beispiel. Seien $[a,b], [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $k\colon [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{L}(C[a,b], C[c,d])$ aus Beispiel 2.29(c), gegeben durch

$$(Ku)(t) := \int_a^b k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für } t \in [c,d],$$

kompakt. Um das zu zeigen, sei $(u_n)_n$ eine Folge in $C[a,b]$ mit $r := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_\infty < \infty$. Aufgrund der Stetigkeit von K (siehe Beispiel 2.29(c)) ist dann auch die Folge $(Ku_n)_n$ beschränkt in $C[c,d]$. Mit Korollar 4.6 reicht es also, zu zeigen, dass die Folge $(Ku_n)_n$ gleichgradig stetig ist. Seien dazu $t_0 \in [c,d]$ und $\varepsilon > 0$. Da k auf der kompakten Menge $[c,d] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$|k(t,s) - k(t_0,s)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)r} \qquad \text{für alle } t \in U_\delta(t_0) \text{ und } s \in [a,b].$$

Es folgt dann für $t \in U_\delta(t_0)$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|(Ku_n)(t) - (Ku_n)(t_0)| &\le \int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)||u_n(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le r\int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)|\,\mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Die liefert die benötigte gleichgradige Stetigkeit.

7.3 Bemerkung. Sei $T\colon E \to F$ linear.

(a) Äquivalent sind:

- T ist kompakt.
- Ist $M \subseteq E$ beschränkt, so ist $T(M) \subseteq F$ relativ kompakt.
- $T(B_1(0)) \subseteq F$ ist relativ kompakt.

(b) Ist T kompakt, so ist T auch stetig.

(c) Ist T stetig und $\dim \operatorname{Bild} T < \infty$, so ist T kompakt.

(d) Ist $\dim E < \infty$, so ist T kompakt.

(e) Nach Satz 2.45 ist die identische Abbildung $I\colon E \to E$ genau dann kompakt, wenn $\dim E < \infty$ ist.

7.4 Satz. (a) *$\mathcal{K}(E,F)$ ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$.*

(b) *Ist F vollständig, so ist $\mathcal{K}(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$ abgeschlossen.*

Beweis. (a) Offensichtlich ist die Nullabbildung in $\mathcal{K}(E,F)$. Seien $S,T \in \mathcal{K}(E,F)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Sei ferner $(x_n)_n \subseteq E$ eine beschränkte Folge. Da S kompakt ist, existieren eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und $y \in F$ mit $\lim_{k\to\infty} Sx_{n_k} = y$. Da T kompakt ist, existieren ferner eine Teilfolge $(x_{n_{k_j}})_j$ und $z \in F$ mit $\lim_{j\to\infty} Tx_{n_{k_j}} = z$. Folglich existiert auch

$$\lim_{j\to\infty} (\alpha S + T)x_{n_{k_j}} = \alpha y + z \ \in \ F,$$

und somit ist $\alpha S + T \in \mathcal{K}(E,F)$.

(b) Seien $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $T := \lim_{n\to\infty} T_n$ in $\mathcal{L}(E,F)$ existiert. Es reicht, zu zeigen, dass $T(B_1(0)) \subseteq F$ präkompakt ist; dann ist diese Menge aufgrund der Vollständigkeit von F auch relativ kompakt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T\| \le \varepsilon$, also $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon$ für alle $x \in B_1(0)$. Somit gilt $T(B_1(0)) \subseteq B_\varepsilon\left(T_n(B_1(0))\right)$, wobei $T_n(B_1(0)) \subseteq F$ nach Voraussetzung präkompakt ist. Mit Bemerkung 2.42(b) folgt die Präkompaktheit von $T(B_1(0))$. □

7.5 Beispiel. Seien $1 \le p < \infty$, $E = \ell^p$, $(\rho_n)_n$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$ und $T \in \mathcal{L}(E)$ definiert durch

$$Tx := (\rho_n x_n)_n \qquad \text{für } x = (x_n)_n \in \ell^p.$$

Dann ist $T \in \mathcal{K}(E)$, denn: Seien $T_k \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$T_k x := (\rho_1 x_1, \dots, \rho_k x_k, 0, 0, \dots) \qquad \text{für } x = (x_n)_n \in \ell^p.$$

Da $\dim \operatorname{Bild} T_k < \infty$ ist, folgt $T_k \in \mathcal{K}(E)$ nach Bemerkung 7.3(c). Ferner ist

$$\|(T - T_k)x\|_p^p = \sum_{n>k} |\rho_n x_n|^p \le \delta_k^p \|x\|_p^p \qquad \text{für } x = (x_n)_n \in \ell^p, \text{ mit } \delta_k := \sup_{n>k} |\rho_n|.$$

Es folgt $\|T - T_k\| \le \delta_k \to 0$ für $k \to \infty$. Somit ist $T \in \mathcal{K}(E)$ nach Satz 7.4(b).

7.6 Satz. *Seien D, G weitere normierte Räume, und sei $T \in \mathcal{K}(E,F)$ sowie $T_1 \in \mathcal{L}(D,E)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$. Dann gilt:*

$$TT_1 \in \mathcal{K}(D,F) \qquad \text{und} \qquad T_2 T \in \mathcal{K}(E,G).$$

Beweis. Sei zunächst $M \subseteq D$ beschränkt. Dann ist auch $T_1(M)$ in E beschränkt, da T_1 stetig ist. Da ferner T kompakt ist, ist $T(T_1(M))$ relativ kompakt in F. Es folgt $TT_1 \in \mathcal{K}(D, F)$. Sei nun $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in E. Da T kompakt ist, existieren eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und $y \in F$ mit $\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y$. Da T_2 stetig ist, existiert $\lim_{k\to\infty} T_2Tx_{n_k} = T_2y \in G$. Es folgt $T_2T \in \mathcal{K}(E, G)$. □

7.7 Satz. *Sei $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Dann gilt:*

(a) $T' \in \mathcal{K}(F', E')$.

(b) *Ist $(x_n)_n \subseteq E$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in E$, so folgt $Tx_n \to Tx$ in F.*

Beweis. (a) Sei $(\psi_n)_n \subseteq F'$ eine beschränkte Folge und $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\psi_n\|$. Nach Voraussetzung ist $K := \overline{T(B_1(0))} \subseteq F$ kompakt. Sei $f_n := \psi_n|_K \in C(K)$. Dann ist

$$\|f_n\|_\infty \leq \|\psi_n\|C \leq MC \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } C := \max_{y\in K}\|y\|$$

und

$$|f_n(y) - f_n(x)| = |\psi_n(y - x)| \leq \|\psi_n\|\|y - x\| \leq M\|y - x\| \qquad \text{für alle } x, y \in K,\ n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Folge $(f_n)_n$ gleichgradig stetig und beschränkt in $C(K)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge ist $(f_n)_n$ gemäß Korollar 4.6 (Satz von Arzelà-Ascoli) also gleichmäßig konvergent und somit insbesondere eine Cauchyfolge in $C(K)$. Da ferner

$$\|T'\psi_m - T'\psi_n\|_{E'} = \sup_{x\in B_1(0)} |\psi_m(Tx) - \psi_n(Tx)| \leq \sup_{y\in K}|f_m(y) - f_n(y)| = \|f_m - f_n\|_\infty$$

für $m, n \in \mathbb{N}$, ist auch $(T'\psi_n)_n$ eine Cauchyfolge in E' und somit konvergent, da E' vollständig ist. Dies zeigt die Kompaktheit von T'.

(b) Nach Voraussetzung gilt $y_n := x_n - x \rightharpoonup 0$. Sei $\psi_n \in F'$ gemäß Korollar 6.5 gewählt mit $\|\psi_n\| = 1$ und $|\psi_n(Ty_n)| = \|Ty_n\|$. Nach (a) ist die Menge $\{T'\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ präkompakt in E', und mit Satz 6.27(a) folgt

$$\|Ty_n\| = |\psi_n(Ty_n)| = |(T'\psi_n)(y_n)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

also $Tx_n \to Tx$ in F. □

7.8 Definition. Man sagt, der normierte Raum E sei *stetig in F eingebettet*, wenn es eine injektive Abbildung $i \in \mathcal{L}(E, F)$ gibt. Die Abbildung i nennt man dann *Einbettung von E in F* und schreibt $E \overset{i}{\hookrightarrow} F$. Ist ferner i kompakt, so sagt man: *E ist in F kompakt eingebettet.*

7.9 Beispiel. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir betrachten den Banachraum $C^1[a, b]$ mit Norm $\|\cdot\|_{C^1}$ definiert durch $\|u\|_{C^1} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ (Übung). Dann ist $C^1[a, b]$ kompakt in $C[a, b]$ eingebettet, denn: Für $u \in B_1(0) \subseteq C^1[a, b]$ und $x, y \in [a, b]$ ist nach dem Mittelwertsatz

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty|x - y| \leq |x - y|.$$

Gemäß Bemerkung und Beispiel 4.3(b) folgt daher die gleichgradige Stetigkeit von $B_1(0) \subseteq C^1[a,b]$. Ferner ist $\|u\|_\infty \le \|u\|_{C^1} \le 1$ für alle $u \in B_1(0) \subseteq C^1[a,b]$. Mit Satz 4.5 (Satz von Arzelà und Ascoli) folgt daher, dass die Einheitskugel $B_1(0)$ von $C^1[a,b]$ im Raum $C[a,b]$ präkompakt und damit auch relativ kompakt ist.

Ende der Videos von 2021-06-29

7.2. Fredholmoperatoren

Seien stets E, F normierte Räume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

In diesem Kapitel wollen wir einige Aspekte der Klasse der Fredholmoperatoren studieren. Diese Operatorklasse verhält sich in Bezug auf das Lösen von Operatorgleichungen ähnlich gut wie Operatoren zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Ferner hat die Klasse gute Stabilitätseigenschaften, und sie steht in einem engen Zusammenhang mit kompakten Operatoren. Wir benötigen zunächst ein paar vorbereitende Sätze. Wir erinnern daran, dass $\mathcal{K}(E)$ den Vektorraum der kompakten linearen Operatoren $E \to E$ bezeichne.

7.10 Hilfssatz. *Sei $W \subseteq E$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann besitzt W ein topologisches Komplement in E.*

Beweis. Sei $n := \dim W$ und $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von W. Sei ferner $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die duale Basis von W' definiert durch $\varphi_i(e_j) := \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Nach Satz 6.4 existieren Fortsetzungen $\psi_1, \ldots, \psi_n \in E'$ von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Sei nun

$$V := \{x \in E \mid \psi_i(x) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Dann ist V ein abgeschlossenes algebraisches Komplement zu W in E, wie man sich leicht überlegt, und mit Satz 3.24(a) folgt $E = W \oplus_{\text{top}} V$. □

7.11 Satz. *Seien $K \in \mathcal{K}(E)$ und $T := I - K \in \mathcal{L}(E)$. Dann gilt:*

(a) *Kern T ist endlichdimensional*

(b) *Bild T ist abgeschlossen und hat endliche Kodimension.*

(c) *Ist $\dim E = \infty$, so ist $K \notin \operatorname{Iso}(E)$.*

Beweis. (a) Da $K|_{\operatorname{Kern} T} = I|_{\operatorname{Kern} T} \in \mathcal{K}(\operatorname{Kern} T)$ ist, folgt $\dim \operatorname{Kern} T < \infty$ nach Satz 2.45.

(b) Sei $W := \operatorname{Kern} T$. Nach (a) und Hilfssatz 7.10 existiert ein topologisches Komplement V in E zu W; insbesondere ist V in E abgeschlossen. Sei nun $y \in \overline{\operatorname{Bild} T}$; dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in V mit $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$.

Wir behaupten, dass die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, dann könnten wir nach Übergang zu einer Teilfolge $\|x_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$ annehmen. Mit

$z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|} \in V$ gilt dann $\|z_n\| = 1$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} Tz_n = 0$. Nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge existiert wiederum $z := \lim_{n\to\infty} Kz_n$, und somit folgt

$$z_n = (T+K)z_n \to 0 + z = z \quad \text{für } n \to \infty, \qquad \text{also } Tz = \lim_{n\to\infty} Tz_n = 0.$$

Weil V abgeschlossen ist, gilt $z \in V$ und somit $z = 0$ wegen der Injektivität von $T|_V$; dies widerspricht aber der Normierung $\|z_n\| = 1$ für alle n. Also ist (x_n) beschränkt.

Da K ein kompakter Operator ist, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge, wiederum $(x_n)_n$ genannt, annehmen, dass $z := \lim_{n\to\infty} Kx_n \in E$ existiert. Dann gilt aber

$$x_n = (T+K)x_n \to y + z \qquad \text{für } n \to \infty,$$

und wegen der Stetigkeit von T folgt $T(y+z) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, also $y \in \operatorname{Bild} T$. Damit ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen in E.

Wegen Satz 7.7 gilt auch $K' \in \mathcal{K}(E')$, und wegen (a) ist $\operatorname{Kern} T'$ endlichdimensional. Ferner folgt mit Satz 6.15(c)

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild} T = \overline{\operatorname{Bild} T} = (\operatorname{Bild} T)^{\perp\perp} = (\operatorname{Kern} T')^{\perp}& \\ = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \operatorname{Kern} T'\}&.\end{aligned}$$

Dies zeigt $\operatorname{codim} \operatorname{Bild} T \le m := \dim \operatorname{Kern} T' < \infty$, denn: Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ eine Basis von $\operatorname{Kern} T' \subseteq E'$ und $X \subseteq F$ ein Unterraum mit $\dim X > m$, so hat

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Kern}(\varphi_i|_X)$$

Kodimension $\le m$ in X, also positive Dimension. Damit existiert $x \in X \setminus \{0\}$ mit $\varphi_j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$, also $\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in \operatorname{Kern} T'$ und somit $x \in \operatorname{Bild} T$. Die Behauptung folgt.

(c) Wäre $K \in \operatorname{Iso}(E)$, so wäre auch $I = KK^{-1} \in \mathcal{K}(E)$ gemäß Satz 7.6. Mit Satz 2.45 folgte $\dim E < \infty$, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

7.12 Definition und Satz. Sei $V \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:

(a) Auf dem *Faktorraum* $E/V := \{x + V \mid x \in E\}$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x + V\| := \inf_{v\in V} \|x + v\| = \operatorname{dist}(x, V).$$

(b) Die *Projektion* $P\colon E \to E/V$, $x \mapsto x + V$ ist stetig mit $\|P\| \le 1$.

(c) Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $V \subseteq \operatorname{Kern} T$, so existiert $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E/V, F)$ mit $T = \widetilde{T}P$ und $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

(d) Ist E ein Banachraum, so auch E/V.

Beweis. Sei im Folgenden $\bar{x} = x + V \in E/V$ für $x \in E$.

(a) Die Seminormeigenschaften sind einfach zu sehen. Zur Definitheit: Ist $x \in E$ mit $\|\bar{x}\| = \operatorname{dist}(x, V) = 0$, so folgt $x \in \overline{V} = V$ und somit $\bar{x} = 0_{E/V}$.

(b) Für $x \in E$ ist $\|Px\| = \|\bar{x}\| \leq \|x + 0\| = \|x\|$ nach Definition der Norm. Dies zeigt die Stetigkeit von P.

(c) Der Homomorphiesatz der linearen Algebra liefert eine lineare Abbildung $\widetilde{T}\colon E/V \to F$ mit $T = \widetilde{T}P$. Sei $\varepsilon > 0$. Ist $x \in E$ mit $\|\bar{x}\| \leq 1$, so existiert $y = x + v \in E$ mit $v \in V$ und $\|y\| \leq \|\bar{x}\| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$ und somit

$$\|\widetilde{T}\bar{x}\| = \|\widetilde{T}\bar{y}\| = \|\widetilde{T}Py\| = \|Ty\| \leq \|T\|\|y\| \leq \|T\|(1 + \varepsilon).$$

Es folgt $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E/V, F)$ und $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|(1 + \varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhalten wir $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Es gilt auch

$$\|T\| = \|\widetilde{T}P\| \leq \|\widetilde{T}\|\|P\| \leq \|\widetilde{T}\|,$$

also insgesamt $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

(d) Wir verwenden Satz 2.37. Seien dazu $x_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|\overline{x_k}\| < \infty$, und seien $y_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\overline{y_k} = \overline{x_k}$ und $\|y_k\| \leq \|\overline{x_k}\| + 2^{-k}$ gewählt. Dann folgt auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty$. Da E ein Banachraum ist, existiert somit $y := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k$ in E gemäß Satz 2.37. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{y_k} = P\Bigl(\sum_{k=1}^{n} y_k\Bigr),$$

so dass die Stetigkeit von P die Konvergenz der Reihe links liefert. □

7.13 Korollar. *Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$, so existiert ein weiterer normierter Raum $\widetilde{E}$ und eine injektive Abbildung $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widetilde{E}, F)$ mit $\operatorname{Bild} \widetilde{T} = \operatorname{Bild} T$. Dabei kann $\widetilde{E}$ als Banachraum gewählt werden, wenn E ein Banachraum ist.*

Beweis. Wähle $V = \operatorname{Kern} T$, $\widetilde{E} = E/V$ und $\widetilde{T}$ wie in Definition und Satz 7.12. □

Im Folgenden seien nun E, F Banachräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

7.14 Satz. *Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $\operatorname{codim} \operatorname{Bild} T < \infty$, so ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen.*

Beweis. Gemäß Korollar 7.13 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass T injektiv ist. Sei $n := \operatorname{codim} \operatorname{Bild} T$. Dann existieren $e_1, \dots, e_n \in F$ derart, dass $F = \operatorname{Bild} T \oplus \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ist. Betrachte den Banachraum $E \times \mathbb{K}^n$, versehen mit der Norm $(x, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \|(x, \xi_1, \dots, \xi_n)\| = \|x\|_E + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$. Sei $S\colon E \times \mathbb{K}^n \to F$ definiert durch $S(x, \xi_1, \dots, \xi_n) = Tx + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$. Dann ist $S \in \mathcal{L}(E \times \mathbb{K}^n, F)$ bijektiv und stetig, also $S \in \operatorname{Iso}(E \times \mathbb{K}^n, F)$ gemäß Korollar 3.14. Insbesondere ist $\operatorname{Bild} T$ als Bild der abgeschlossenen Teilmenge $E \times \{0\} \subseteq E \times \mathbb{K}^n$ unter S abgeschlossen in F. □

7.15 Definition. Eine Abbildung $T \in \mathcal{L}(E,F)$ heißt *Fredholmoperator*, falls $\dim \operatorname{Kern} T < \infty$ und $\operatorname{codim} \operatorname{Bild} T < \infty$ ist. In diesem Fall definieren wir den *Fredholmindex* durch $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Kern} T - \operatorname{codim} \operatorname{Bild} T$. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi(E,F) &\coloneqq \{T \in \mathcal{L}(E,F) \mid T \text{ Fredholmoperator}\}, \\ \Phi_k(E,F) &\coloneqq \{T \in \Phi(E,F) \mid \operatorname{ind} T = k\}, \\ \Phi(E) &\coloneqq \Phi(E,E),\ \Phi_k(E) \coloneqq \Phi_k(E,E). \end{aligned}$$

7.16 Beispiel. (a) Sind E, F endlichdimensionale Banachräume mit $\dim E = m$ und $\dim F = n$, so ist jeder Operator $T \in \operatorname{Hom}(E,F)$ ein Fredholmoperator, und nach dem Dimensionssatz gilt $\operatorname{ind} T = m - n$.

(b) Sei $K \in \mathcal{L}(E)$ ein kompakter Operator. Dann ist $I - K \in \Phi(E)$ gemäß Satz 7.11.

(c) Sei $p \in [1,\infty]$, $E \coloneqq \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ und $T_n \in \mathcal{L}(E)$ für $n \in \mathbb{Z}$ wie folgt definiert: Im Fall $n \geq 0$ sei

$$T_n(x) \coloneqq (x_{n+1}, x_{n+2}, ...) \qquad \text{für } x = (x_j)_j \in E, \qquad (\textit{Linksverschiebung}),$$

und im Fall $n < 0$ sei

$$T_n(x) \coloneqq (\underbrace{0,\dots,0}_{|n|\text{-mal}}, x_1, x_2, ...) \qquad \text{für } x = (x_j)_j \in E \qquad (\textit{Rechtsverschiebung}).$$

Dann ist $T_n \in \Phi_n(E)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes (nichtdegeneriertes) Intervall und $T \colon C^k(I) \to C(I)$ gegeben durch $Tf = f^{(k)}$. Dann ist T ein Fredholmoperator vom Index k (Übung).

7.17 Bemerkung (Fredholm-Alternative)**.** Ein Fredholmoperator $T \in \Phi(E,F)$ vom Index 0 erfüllt die sogenannte *Fredholm-Alternative*: Entweder die Gleichung $Tu = f$ hat für jedes $f \in F$ eine eindeutige Lösung, oder die Gleichung $Tu = 0$ hat eine nichttriviale Lösung $u \in E \setminus \{0\}$.

7.18 Lemma. *Sei $T \in \Phi(E,F)$. Dann existieren topologische Zerlegungen $E = \operatorname{Kern} T \oplus_{\text{top}} W$, $F = \operatorname{Bild} T \oplus_{\text{top}} Z$, und $T|_W \colon W \to \operatorname{Bild} T$ ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Da $\dim \operatorname{Kern} T < \infty$, hat $\operatorname{Kern} T$ gemäß Hilfssatz 7.10 ein topologisches Komplement W in E, d.h. es gilt $E = \operatorname{Kern} T \oplus_{\text{top}} W$. Sei nun Z ein algebraisches Komplement von $\operatorname{Bild} T$ in F. Da nach Satz 7.14 $\operatorname{Bild} T \subseteq F$ abgeschlossen ist, gilt sogar $F = \operatorname{Bild} T \oplus_{\text{top}} Z$ gemäß Satz 3.24. Nun ist $T|_W \colon W \to \operatorname{Bild} T$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen Banachräumen, da W in E und $\operatorname{Bild} T$ in F abgeschlossen sind. Also ist $T|_W \colon W \to \operatorname{Bild} T$ ein topologischer Isomorphismus gemäß Korollar 3.14. $\square$

7.19 Satz (Indexformel)**.** *Seien E, F und Z Banachräume, und seien $T \in \Phi(E,F)$ und $M \in \Phi(F,Z)$ gegeben. Dann ist $MT \in \Phi(E,Z)$ und es gilt*

$$\operatorname{ind} MT = \operatorname{ind} M + \operatorname{ind} T.$$

Beweis. Der folgende Beweis basiert ausschließlich auf linearer Algebra. Wir benötigen zunächst eine spezielle Zerlegung von F. Dazu wählen wir zunächst einen Teilraum $\widetilde{F} \subseteq F$ mit $F = (\operatorname{Bild} T + \operatorname{Kern} M) \oplus \widetilde{F}$. Ferner betrachten wir den nach Voraussetzung endlichdimensionalen Teilraum

$$V := \operatorname{Bild} T \cap \operatorname{Kern} M \subseteq F$$

und wählen Teilräume $U \subseteq \operatorname{Bild} T$, $W \subseteq \operatorname{Kern} M$ mit

$$\operatorname{Bild} T = U \oplus V \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Kern} M = V \oplus W.$$

Nach Konstruktion ist dann

$$\operatorname{Bild} T + \operatorname{Kern} M = U \oplus V \oplus W$$

und

$$F = U \oplus V \oplus W \oplus \widetilde{F}.$$

Es folgt

$$\operatorname{Kern} MT = \{x \in E \mid Tx \in \operatorname{Kern} M\} = T^{-1}(V).$$

Zerlegt man diesen Unterraum von E nun in der Form

$$\operatorname{Kern} MT = \operatorname{Kern} T \oplus \widetilde{V},$$

so ist $T|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to V$ ein Isomorphismus und somit

$$\dim \operatorname{Kern} MT = \dim \operatorname{Kern} T + \dim V = \dim \operatorname{Kern} T + \dim \operatorname{Kern} M - \dim W. \tag{7.1}$$

Da $M|_{V \oplus W} = 0$ und $M|_{U \oplus \widetilde{F}}$ injektiv ist, ist $\operatorname{Bild} M = M(U) \oplus M(\widetilde{F})$. Schreibe nun $Z = M(U) \oplus M(\widetilde{F}) \oplus \widetilde{Z}$. Dann ist $\operatorname{codim} \operatorname{Bild} M = \dim \widetilde{Z}$ und

$$\dim M(\widetilde{F}) = \dim \widetilde{F} = \operatorname{codim} \operatorname{Bild} T - \dim W.$$

Ferner ist $\operatorname{Bild} MT = M(\operatorname{Bild} T) = M(U)$, und somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \operatorname{Bild} MT = \operatorname{codim} M(U) &= \dim M(\widetilde{F}) + \dim \widetilde{Z} \\ &= \operatorname{codim} \operatorname{Bild} T - \dim W + \operatorname{codim} \operatorname{Bild} M. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Die Subtraktion von (7.1) und (7.2) liefert nun die Indexformel. □

——— Ende der Videos von 2021-07-02 ———

7.20 Satz. *Für $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sind äquivalent:*

(i) $T \in \Phi(E,F)$,

(ii) *Es existieren $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F,E)$ so, dass $I_E - S_1T \in \mathcal{K}(E)$ und $I_F - TS_2 \in \mathcal{K}(F)$ ist.*

Beweis. „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Nach Lemma 7.18 gibt es topologische Zerlegungen $E = \operatorname{Kern} T \oplus_{\text{top}} W$, $F = \operatorname{Bild} T \oplus_{\text{top}} Z$ derart, dass $T|_W : W \to \operatorname{Bild} T$ ein topologischer Isomorphismus ist. Sei $S_0 \in \mathcal{L}(\operatorname{Bild} T, W)$ die Inverse, und sei

$$P \in \mathcal{L}(E) \text{ die Projektion auf } W \text{ längs } \operatorname{Kern} T$$

sowie

$$Q \in \mathcal{L}(F) \text{ die Projektion auf } \operatorname{Bild} T \text{ längs } Z.$$

Setze nun $S := S_0Q \in \mathcal{L}(F,E)$. Wir haben dann $\operatorname{Bild}(S_0T) = W$, $S_0T|_W = I_W$ und $\operatorname{Kern} T \subseteq \operatorname{Kern}(S_0T)$. Dies liefert $S_0T = P$ und somit

$$ST = S_0QT = S_0T = P \qquad \text{und} \qquad TS = TS_0Q = Q.$$

Also ist $I_E - ST = I_E - P \in \mathcal{L}(E)$ eine Projektion mit

$$\dim \operatorname{Bild}(I_E - ST) = \dim \operatorname{Kern} P = \dim \operatorname{Kern} T < \infty,$$

und $I_F - TS = I_F - Q$ ist eine Projektion mit

$$\dim \operatorname{Bild}(I_F - TS) = \dim \operatorname{Kern} Q = \dim Z = \operatorname{codim} \operatorname{Bild} T < \infty.$$

Insbesondere gelten $I_E - ST \in \mathcal{K}(E)$ und $I_F - TS \in \mathcal{K}(F)$.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Nach Beispiel 7.16(b) ist $TS_2 = I_F - (I_F - TS_2) \in \Phi(F)$, also ist $\operatorname{codim} \operatorname{Bild} T \leq \operatorname{codim} \operatorname{Bild} TS_2 < \infty$ (da $\operatorname{Bild} T \supseteq \operatorname{Bild} TS_2$). Zudem ist $S_1T = I_E - (I_E - S_1T) \in \Phi(E)$, also ist $\dim \operatorname{Kern} T \leq \dim \operatorname{Kern} S_1T < \infty$. Somit ist $T \in \Phi(E,F)$. □

7.21 Hilfssatz. (a) *Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ und konvergiert die sogenannte* Neumannsche Reihe *$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ gegen ein $R \in \mathcal{L}(E)$, so ist $I - T \in \operatorname{Iso}(E)$ mit $(I-T)^{-1} = R$. Dies gilt insbesondere, wenn $\|T\| < 1$ ist.*

(b) *Ist $T \in \operatorname{Iso}(E)$ und $S \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, so ist $T - S \in \operatorname{Iso}(E)$ und $(T-S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1}S)^n T^{-1}$.*

(c) *Die Teilmenge $\operatorname{Iso}(E)$ ist offen in $\mathcal{L}(E)$.*

Beweis. (a) Sei $R_n := \sum_{k=0}^{n} T^k$. Nach Voraussetzung ist $R := \lim_{n\to\infty} R_n$, und dies erzwingt $\lim_{n\to\infty} T^n = \lim_{n\to\infty}(R_n - R_{n-1}) = 0$. Es folgt

$$(I-T)R = \lim_{n\to\infty}(I-T)R_n = \lim_{n\to\infty}(I - T^{n+1}) = I.$$

Genauso sieht man $R(I-T)=I$.

(b) Es ist $T-S=T(I-T^{-1}S)$, wobei nach Voraussetzung $\|T^{-1}S\| \le \|T^{-1}\|\,\|S\|<1$ gilt. Mit (a) folgt $I-T^{-1}S \in \operatorname{Iso}(E)$ und $(I-T^{-1}S)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(T^{-1}S)^n$. Somit ist $T-S \in \operatorname{Iso}(E)$ und $(T-S)^{-1}=(I-T^{-1}S)^{-1}T^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(T^{-1}S)^nT^{-1}$.

(c) Da $\operatorname{dist}(T,\mathcal{L}(E)\setminus\operatorname{Iso}(E))>0$ für alle $T\in\operatorname{Iso}(E)$ gemäß (b) gilt, ist $\operatorname{Iso}(E)$ offen in $\mathcal{L}(E)$. ☐

7.22 Satz. *Für alle $n\in\mathbb{Z}$ ist $\Phi_n(E,F)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(E,F)$. Mit anderen Worten: $\Phi(E,F)$ ist offen in $\mathcal{L}(E,F)$, und* ind*: $\Phi(E,F)\to\mathbb{Z}$ ist stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\Phi(E,F)$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $\operatorname{Iso}(E,F)\subseteq\mathcal{L}(E,F)$ offen ist. Dies ist trivial im Fall $\operatorname{Iso}(E,F)=\varnothing$. Existiert andernfalls $L\in\operatorname{Iso}(E,F)$, so ist $\operatorname{Iso}(E,F)$ das Urbild von $\operatorname{Iso}(E)$ unter der stetigen Abbildung

$$\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{L}(E),\qquad T\mapsto L^{-1}T.$$

Dabei ist $\operatorname{Iso}(E)\subseteq\mathcal{L}(E)$ offen nach Hilfssatz 7.21, und somit ist $\operatorname{Iso}(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$ offen.

Nun zur Behauptung: Sei $T_0\in\Phi_n(E,F)$, und seien $W\subseteq E$, $Z\subseteq F$ gemäß Lemma 7.18 so gewählt, dass

$$E=\operatorname{Kern}T_0\oplus_{\text{top}}W,\qquad F=\operatorname{Bild}T_0\oplus_{\text{top}}Z$$

und $T_0|_W\colon W\to\operatorname{Bild}T_0$ ein topologischer Isomorphismus ist. Sei $J\in\mathcal{L}(W,E)$ die Inklusion und $Q\in\mathcal{L}(F,\operatorname{Bild}T_0)$ die Projektion auf $\operatorname{Bild}T_0$ mit $\operatorname{Kern}Q=Z$. Dann ist $QT_0J=T_0|_W\in\operatorname{Iso}(W,\operatorname{Bild}T_0)$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\mu\colon\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{L}(W,\operatorname{Bild}T_0),\qquad \mu(T)\coloneqq QTJ=QT|_W.$$

Man sieht leicht, dass μ stetig ist. Da $\operatorname{Iso}(W,\operatorname{Bild}T_0)\subseteq\mathcal{L}(W,\operatorname{Bild}T_0)$ gemäß der Vorbemerkung offen ist, ist auch $\mathcal{M}\coloneqq\mu^{-1}(\operatorname{Iso}(W,\operatorname{Bild}T_0))$ offen in $\mathcal{L}(E,F)$, wobei $T_0\in\mathcal{M}$ gilt. Es reicht nun, zu zeigen:

$$\mathcal{M}\subseteq\Phi_n(E,F).$$

Für $T\in\mathcal{M}$ gilt $W\cap\operatorname{Kern}T=\{0\}$, also $\dim\operatorname{Kern}T<\infty$. Zudem ist

$$\operatorname{Bild}T+Z=F. \tag{7.3}$$

In der Tat: Ist $v=b+z\in F$ mit $b\in\operatorname{Bild}T_0$, $z\in Z$, so existiert wegen $QTJ\in\operatorname{Iso}(W,\operatorname{Bild}T_0)$ ein $w\in W$ mit $QTw=b$, also $v=QTw+z=Tw+z-(I_F-Q)(Tw)$. Es gilt aber $Tw\in\operatorname{Bild}T$, und wegen $Z=\operatorname{Bild}(I_F-Q)$ ist $z-(I_F-Q)(Tw)\in Z$, d.h. (7.3) ist gezeigt. Aus (7.3) folgt nun $\operatorname{codim}\operatorname{Bild}T\le\dim Z=\operatorname{codim}\operatorname{Bild}T_0<\infty$, also insgesamt $T\in\Phi(E,F)$. Ist ferner $\ell\coloneqq\dim\operatorname{Kern}T_0$ und $k\coloneqq\operatorname{codim}\operatorname{Bild}T_0=\dim Z$, so folgt $n=\operatorname{ind}T_0=\ell-k$ sowie

$$J\in\Phi_{-\ell}(W,E)\qquad\text{und}\qquad Q\in\Phi_k(F,\operatorname{Bild}T_0).$$

Ferner liefert die Indexformel, Satz 7.19:

$$0 = \operatorname{ind}(QTJ) = \operatorname{ind} Q + \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} J = k + \operatorname{ind} T - \ell,$$

d.h. $\operatorname{ind} T = \ell - k = n$. Es folgt $\mathcal{M} \subseteq \Phi_n(E, F)$, also die Behauptung. $\square$

7.23 Korollar (Stabilität des Index unter kompakten Störungen)**.** (a) *Sei $T \in \Phi(E, F)$, $K \in \mathcal{K}(E, F)$. Dann ist $T + K \in \Phi(E, F)$, und es gilt $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.*

(b) *Sei $K \in \mathcal{K}(E)$. Dann ist $I_E - K \in \Phi_0(E)$.*

Beweis. (a) Wegen $T \in \Phi(E, F)$ existieren nach Satz 7.20 Operatoren $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F, E)$ so, dass $I_E - S_1 T \in \mathcal{K}(E)$, $I_F - TS_2 \in \mathcal{K}(F)$ gilt. Da ferner $S_1 K \in \mathcal{K}(E)$ und $KS_2 \in \mathcal{K}(F)$ ist, folgt $I_E - S_1(T+K) = I_E - S_1 T - S_1 K \in \mathcal{K}(E)$ und $I_F - (T+K)S_2 = I_F - TS_2 - KS_2 \in \mathcal{K}(F)$. Aus Satz 7.20 folgt wiederum $T + K \in \Phi(E, F)$. Für $0 \leq t \leq 1$ ist auch $tK \in \mathcal{K}(E, F)$, also folgt $T + tK \in \Phi(E, F)$. Die Abbildung $[0, 1] \to \mathbb{Z}$, $t \mapsto \operatorname{ind}(T + tK)$ ist stetig nach Satz 7.22, also konstant. Daher folgt $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T + K)$.

(b) Folgt direkt aus (a). $\square$

7.24 Beispiel. Sei $C_{2\pi}$ bzw. $C^k_{2\pi}$ der Banachraum der stetigen bzw. k-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei ferner $a \in C_{2\pi}$. Dann gilt: Genau dann hat die Differentialgleichung

$$u^{(k)} + a(x)u = f \tag{7.4}$$

für jedes $f \in C_{2\pi}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^k_{2\pi}$, wenn die homogene Gleichung

$$u^{(k)} + a(x)u = 0 \tag{7.5}$$

nur die triviale Lösung $u = 0$ in $C^k_{2\pi}$ hat. Dies sieht man so: Betrachte die Operatoren

$$T_0, K \in \mathcal{L}(C^k_{2\pi}, C_{2\pi}), \qquad T_0 u := u^{(k)}, \quad Ku := au.$$

Dann ist T_0 ein Fredholmoperator vom Index 0 (Übung). Ferner ist K ein kompakter Operator, da die Einbettung $C^k_{2\pi} \hookrightarrow C_{2\pi}$ als Folge des Satzes von Arzela-Ascoli kompakt und die lineare Abbildung

$$C_{2\pi} \to C_{2\pi}, \qquad u \mapsto au$$

stetig ist. Gemäß Korollar 7.23(a) ist also auch $T = T_0 + K$ ein Fredholmoperator vom Index 0, und die obige Behauptung folgt. Sei nun speziell $k = 2m$ gerade und $(-1)^m a$ eine positive Funktion. Dann hat (7.5) nur die triviale Lösung in $C^k_{2\pi}$, denn für jede Lösung $u \in C^k_{2\pi}$ von (7.5) gilt mit partieller Integration

$$(-1)^{m+1} \int_0^{2\pi} au^2 = (-1)^m \int_0^{2\pi} uu^{(2m)} = \int_0^{2\pi} (u^{(m)})^2 \geq 0,$$

und somit $u^2 \equiv 0$ in $[0, 2\pi]$. Folglich hat in diesem Fall (7.4) für jedes $f \in C_{2\pi}$ genau eine Lösung $u \in C^k_{2\pi}$.

7.3. Die Fouriertransformation

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und für $x, \xi \in \mathbb{R}^N$ sei $x\xi = x \cdot \xi = \sum_{k=1}^N x_k \xi_k$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^N$.

7.25 Definition. $C_0(\mathbb{R}^N)$ sei der Vektorraum der Funktionen $u \in C(\mathbb{R}^N)$ mit $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Dieser Raum ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, da es ein abgeschlossener Unterraum des Banachraums $C_b(\mathbb{R}^N)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ ist.

7.26 Definition und Satz. Für Funktionen $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ist die *Faltung* $u * v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ nach dem Satz von Fubini f.ü. definiert durch

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt nämlich

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} |v(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|v\|_1\|u\|_1 < \infty,$$

so dass nach dem Satz von Tonelli $(x, y) \mapsto u(x-y)v(y)$ eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ist. Ferner liefert der Satz von Fubini

$$\|(u * v)\|_1 \le \|v\|_1\|u\|_1.$$

7.27 Beispiel. Sei $u := 1_{[-1,1]}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(u * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 1_{[-1,1]}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 1_{[x-1,x+1]}\,\mathrm{d}y \\ &= \big|\big[\max\{-1, x-1\}, \min\{1, x+1\}\big]\big| = \max\{0, 2-|x|\}.\end{aligned}$$

7.28 Definition. Für $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ist die *Fouriertransformierte* $\hat{u}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ von u definiert durch

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Die Abbildung $u \mapsto \hat{u}$ heißt *Fouriertransformation.* Andere Bezeichnung: $\mathcal{F}(u)$ anstelle von $\hat{u}$.

7.29 Beispiel. (a) Sei wieder $u := 1_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$$\sqrt{2\pi}\hat{u}(\xi) = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \cos(x\xi)\,\mathrm{d}x = 2\frac{\sin\xi}{\xi}$$

und somit $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$ (für $\xi = 0$ erhält man $\hat{u}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$).

(b) Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben durch $u(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-|x|}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi})\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x(1+\mathrm{i}\xi)}}{-(1+\mathrm{i}\xi)} + \frac{\mathrm{e}^{-x(1-\mathrm{i}\xi)}}{-(1-\mathrm{i}\xi)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=R} = \frac{1}{1+\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1-\mathrm{i}\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}\end{aligned}$$

und somit $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$.

Ende der Videos von 2021-07-06

7.30 Satz. *Seien $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt:*

(a) *$\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ und $\|\hat{u}\|_\infty \leq (2\pi)^{-N/2}\|u\|_1$. Somit ist $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), C_0(\mathbb{R}^N))$.*

(b) *Ist $a \in \mathbb{R}^N$ und $u_a \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $u_a(y) \coloneqq u(y-a)$, so gilt*

$$\widehat{u_a}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\hat{u}(\xi) \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(c) *Ist u stetig differenzierbar und auch $\partial_k u \coloneqq \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ für ein k, so gilt*

$$\widehat{\partial_k u}(\xi) = \mathrm{i}\xi_k\hat{u}(\xi) \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Die Fouriertransformation führt also Differenziationen in Multiplikationen über.

(d) *Ist auch die Funktion $x \mapsto h(x) \coloneqq x_k u(x)$ integrierbar für ein k, so ist $\hat{u}$ nach ξ_k stetig partiell differenzierbar mit*

$$\hat{h}(\xi) = \mathrm{i}\partial_k\hat{u}(\xi).$$

Die Fouriertransformation führt also Multiplikationen in Differenziationen über.

(e) *$\widehat{u * v}(\xi) = (2\pi)^{N/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^N$.*

(f) *Für $\lambda > 0$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)v(\lambda\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} u(\lambda\xi)\hat{v}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis. (b) Es ist

$$\widehat{u_a}(\xi) = (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} u(y-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} u(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+a)\xi}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\hat{u}(\xi)$$

für $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(c) Wir betrachten zunächst den Fall $N = 1$. Da nach Voraussetzung u und u' in $L^1(\mathbb{R})$ liegen, gilt $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ (leichte Übung). Es folgt dann

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\;\xi\hat{u}(\xi) &= \xi \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\partial_x \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\mathrm{i}} \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} u(x)\partial_x \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \lim_{s\to\infty} \left(-\left(u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right)\Big|_{x=-s}^{x=s} + \int_{-s}^{s} u'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} u'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{i}}\;\widehat{u'}(\xi).
\end{aligned}$$

Sei nun $N > 1$, und ohne Einschränkung sei $k = N$. Für $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ sei ferner $U_{x'} \in C^1(\mathbb{R})$ definiert durch $U_{x'}(t) := u(x', t)$. Da u und $\partial_N u$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ liegen, folgt aus dem Satz von Fubini, dass für fast alle $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ sowohl $U_{x'}$ als auch $U'_{x'}$ in $L^1(\mathbb{R})$ liegen. Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$; dann folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{N/2}\xi_N\hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\xi_N \int_{\mathbb{R}} U_{x'}(x_N)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_N\xi_N}\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\xi_N\widehat{U_{x'}}(\xi_N)\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\widehat{U'_{x'}}(\xi_N)\,\mathrm{d}x' \qquad\qquad \text{Fall } N = 1 \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'} \int_{\mathbb{R}} U'_{x'}(x_N)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_N\xi_N}\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_N u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{N/2}\frac{1}{\mathrm{i}}\widehat{\partial_N u}(\xi).
\end{aligned}$$

(d) Nach Voraussetzung werden die Funktionen

$$x \mapsto u(x)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} = -\mathrm{i}x_k u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N$$

betragsmäßig durch die L^1-Funktion $x \mapsto |x_k||u(x)|$ majorisiert. Daher darf man im Folgenden unter dem Integral differenzieren und erhält

$$\partial_k\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}(2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} x_k u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\hat{h}(\xi).$$

(e) Mit dem Satz von Fubini ist

$$
\begin{aligned}
&\widehat{u*v}(\xi)\\
&\quad= (2\pi)^{-N/2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\int u(y)v(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-N/2}\int u(y)\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)\xi}v(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad= (2\pi)^{-N/2}\int u(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}v(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{N/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)
\end{aligned}
$$

für $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(f) Es ist

$$
\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-N/2}\lambda^N\int_{\mathbb{R}^N} u(\lambda x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x\xi}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R},
$$

mit dem Satz von Fubini also

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\hat{u}(\xi)v(\lambda\xi)\,\mathrm{d}\xi &= (2\pi)^{-N/2}\lambda^N\int_{\mathbb{R}^N} u(\lambda x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x\xi}v(\lambda\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\\
&= (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} u(\lambda x)\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} u(\lambda x)\hat{v}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Dies liefert (f).

(a) Aus der Definition folgt direkt, dass $\hat{u} \in C_b(\mathbb{R}^N)$ ist und $\|\hat{u}\|_\infty \le (2\pi)^{-N/2}\|u\|_1$ gilt. Somit ist $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), C_b(\mathbb{R}^N))$. Ist $u \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N)$, so liegt für $k = 1,\dots,N$ auch $\partial_k u$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Gemäß (c) liegt also auch die Funktion $\xi \mapsto \xi_k\hat{u}(\xi)$ in $C_b(\mathbb{R}^N)$ für $k = 1,\dots,N$. Dies erzwingt $\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{u}(\xi) = 0$, und somit ist $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Da nun $C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N)$ gemäß Definition und Satz 4.50 in $L^1(\mathbb{R}^N)$ dicht liegt und $\mathcal{F}$ als Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^N)$ nach $C_b(\mathbb{R}^N)$ stetig ist, folgt nun

$$
\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^N)) = \mathcal{F}(\overline{C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N)}) \subseteq \overline{\mathcal{F}(C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N))} \subseteq C_0(\mathbb{R}^N). \qquad \square
$$

7.31 Beispiel. Sei $u := 1_{[-1,1]}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ und $v = u*u$, d.h. $v(x) = \max\{0, 2-|x|\}$. Gemäß Beispiel 7.29 und Satz 7.30(f) ist dann $\hat{v}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2$.

7.32 Satz. *Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $\varphi(x) := \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Dann gilt $\hat{\varphi} = \varphi$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ gilt. Tatsächlich ist

$$
\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = 2\pi.
$$

Nun zum Beweis des Satzes; sei dazu zunächst $N = 1$. Dann ist $\varphi'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$, also offensichtlich $\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$. Somit liefert Satz 7.30(d):

$$
\xi\widehat{\varphi}(\xi) = -\mathrm{i}\widehat{\varphi'}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\partial_\xi\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\mathrm{i}x\xi}\right)\mathrm{d}x
$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} - \mathrm{i}x\xi} \,\mathrm{d}x = -\big(\widehat{\varphi}\big)'(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Integration dieser Differentialgleichung für $\widehat{\varphi}$ liefert $\widehat{\varphi}(\xi) = c\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = c\varphi(\xi)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$. Da $\varphi(0) = 1$ und gemäß der Vorbemerkung

$$\widehat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = 1$$

ist, folgt $c = 1$ und somit die Behauptung. Im Fall $N > 1$ verwendet man wieder den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2} - \mathrm{i}x\xi} \,\mathrm{d}x \\ &= \prod_{k=1}^{N} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x_k^2}{2} - \mathrm{i}x_k\xi_k} \,\mathrm{d}x_k \overset{\text{Fall } N=1}{=} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{\xi_k^2}{2}} = \varphi(\xi). \end{aligned}$$

□

7.33 Satz (Fouriersche Umkehrformel, 1. Version)**.** *Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

(a) *Ist $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$ und $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, so gilt*

$$u(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}\xi = \widehat{\widehat{u}}(-x) \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.6}$$

(b) *Ist $u \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^N)$, so gilt $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$, und (7.6) gilt.*

(c) *Für jedes $v \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ existiert ein $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$ mit $\hat{u} = v$.*

Beweis. (a) Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und $u_x \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $u_x(y) := u(y - x)$, und sei φ wie in Satz 7.32 gegeben. Dann liefern Satz 7.30 und Satz 7.32:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\varphi(\lambda\xi) \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u_x}(\xi)\varphi(\lambda\xi) \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} u_x(\lambda\xi)\varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi.$$

Für $\lambda \to 0$ erhält man mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} u_x(0)\varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi = u_x(0)(2\pi)^{N/2} = (2\pi)^{N/2} u(-x).$$

Die Behauptung folgt durch Betrachtung von $-x$ anstelle von x.

(b) Bekanntermaßen ist $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Mit u ist ferner auch $v := (-\Delta + 1)^N u \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Also liefert Satz 7.30(c), dass die Funktion

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad \xi \mapsto \hat{v}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^N \hat{u}(\xi)$$

stetig und beschränkt ist. Mit $C := \|\hat{v}\|_\infty$ folgt also $|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|^2)^N}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$, und somit ist $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Gemäß (a) gilt also (7.6).

(c) Sei $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definiert durch $w(x) := v(-x)$. Gemäß (b) ist dann $u := \hat{w} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$, und (7.6) liefert $v(x) = w(-x) = \widehat{\widehat{w}}(x) = \hat{u}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$. □

7.34 Beispiel. Sei $u := 1_{[-1,1]}$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ und $v = u*u$, d.h. $v(x) = \max\{0, 2-|x|\}$. Gemäß Beispiel 7.31 ist dann $\hat{v}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2$, d.h. $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$. Mit Satz 7.33 folgt also

$$\begin{aligned}\max\{0, 2-|x|\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi)\cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi \\ = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2\cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Speziell mit $x = 0$ folgt

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}.$$

7.35 Hilfssatz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $1 \leq p < q < \infty$, und sei $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_n$ in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|u_n - u\|_s \to 0$ für $n \to \infty$ und $s \in [p,q]$.*

Beweis. Sei $\Omega_n := \Omega \cap U_n(0)$ und $v_n := u \cdot 1_{\Omega_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit der Interpolationsungleichung Bemerkung und Beispiel 4.26(a) und dem Satz von Lebesgue folgt dann

$$\text{(7.7)} \qquad \|v_n - u\|_s \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \text{ und } s \in [p,q]$$

Sei $C_n := \max\left\{1, |\Omega_n|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Definition und Satz 4.50 existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|u_n - v_n\|_q \leq \frac{1}{nC_n} \leq \frac{1}{n}$. Aus Bemerkung und Beispiel 4.26(b) folgt

$$\|u_n - v_n\|_p \leq C_n\|u_n - v_n\|_q \leq \frac{1}{n},$$

gemäß der Interpolationsungleichung Bemerkung und Beispiel 4.26(a) also

$$\text{(7.8)} \qquad \|u_n - v_n\|_s \leq \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } s \in [p,q].$$

Die Kombination von (7.7) und (7.8) ergibt, dass die Folge $(u_n)_n$ die gewünschte Eigenschaft hat. □

Ende der Videos von 2021-07-09

7.36 Hauptsatz. *Für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ ist $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$. Somit lässt sich die Fouriertransformation in eindeutiger Weise zu einem isometrischen*

Isomorphismus (bzw. einem unitären Operator, siehe Bemerkung 5.43)

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzen.

Beweis. Ist $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, so liefert Satz 7.33(b), dass $\hat{u}$ in $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ liegt, also nach Bemerkung und Beispiel 4.26(a) auch in $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Mit Satz 7.33(a) folgt ferner

$$\hat{\hat{\overline{u}}}(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\hat{u}}(\xi) e^{-i\xi x} \, d\xi = \overline{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi} = \overline{u}(x).$$

Anwendung von Satz 7.30(f) mit $\lambda = 1$ liefert nun

$$\|\hat{u}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\overline{\hat{u}} = \int_{\mathbb{R}^N} u\hat{\hat{\overline{u}}} = \int_{\mathbb{R}^N} u\overline{u} = \|u\|_2^2.$$

Es folgt, dass die Abbildung $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $u \mapsto \hat{u}$ eine Isometrie bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist und sich somit nach Definition und Satz 4.50 und Satz 6.1 in eindeutiger Weise zu einer linearen Isometrie $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ fortsetzen lässt. Für $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt dabei $\mathcal{F}(u) = \hat{u}$, denn: Gemäß Hilfssatz 7.35 existiert eine Folge $(u_n)_n \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ und $L^2(\mathbb{R}^N)$, insbesondere also

$$\hat{u}_n = \mathcal{F}(u_n) \to \mathcal{F}(u) \qquad \text{bzgl. } \|\cdot\|_2.$$

Wegen Satz 4.29 dürfen wir (nach Übergang zu einer Teilfolge) auch annehmen, dass $\hat{u}_n$ punktweise f.ü. gegen $\mathcal{F}(u)$ konvergiert. Allerdings gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ auch

$$|\hat{u}(\xi) - \hat{u}_n(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |(u(x) - u_n(x)) e^{-ix\xi}| \, dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|u - u_n\|_1 \to 0$$

für $n \to \infty$; also folgt $\mathcal{F}(u) = \hat{u}$. Zu zeigen bleibt noch die Surjektivität von $\mathcal{F}$. Aus Satz 7.33(c) folgt zunächst die Inklusion $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \operatorname{Bild} \mathcal{F}$. Da $\operatorname{Bild} \mathcal{F}$ als Bild von $L^2(\mathbb{R}^N)$ unter einer Isometrie vollständig und damit abgeschlossen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ ist, folgt dann $L^2(\mathbb{R}^N) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)} \subseteq \operatorname{Bild} \mathcal{F}$ und somit die Surjektivität von $\mathcal{F}$. □

7.37 Bemerkung. (a) Die Fouriertransformierte einer Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ lässt sich als Limes

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{R \to \infty} \mathcal{F}_R(u) \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)$$

darstellen mit

$$\mathcal{F}_R(u)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{B_R(0)} u(x) e^{-ix\xi} \, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dies folgt mit dem Hauptsatz 7.36 aus der Tatsache, dass $\mathcal{F}_R(u) = \mathcal{F}(u_R)$ mit $u_R := u \cdot 1_{B_R(0)} \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ für $R > 0$ gilt und die Funktionen u_R für $R \to \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ gegen u konvergieren.

Die abstrakte Grenzwertbildung in der Definition von $\mathcal{F}$ wird durch diese Formel konkretisiert.

(b) Als Abbildung $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^N) \to C_0(\mathbb{R}^N)$ ist die Fouriertransformation injektiv, aber nicht surjektiv (ohne Beweis).

Eine Anwendung der Fourier-Transformation ist das folgende

7.38 Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $h_n, H_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$h_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad H_n(x) := \left(\sqrt{\pi} 2^n n!\right)^{-1/2} h_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Die Funktion h_n ist offensichtlich ein Polynom vom Grad n. In ihrer Gesamtheit heißen die h_n *Hermite-Polynome*, und die Funktionen H_n heißen *Hermite-Funktionen.* Man kann zeigen (Übung):

(a) Die Funktionen H_n, $n \in \mathbb{N}_0$, bilden ein Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\widehat{H_n} = (-\mathrm{i})^n H_n$.

Wir zeigen nun, dass die Menge der Funktionen H_n auch total in $L^2(\mathbb{R})$ und somit eine Orthonormalbasis ist. Sei dazu

$$f \in \overline{\operatorname{span}\{H_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{R});$$

zu zeigen ist $f \equiv 0$. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig. Da für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$g_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \qquad g_n(x) := \frac{(\mathrm{i}\xi x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

im Erzeugnis der Funktionen H_k, $k \leq n$ liegt, erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} f \overline{g}_n = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{7.9}$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ in $L^2(\mathbb{R})$ gegen die Funktion

$$g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \qquad g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi - \frac{x^2}{2}}$$

konvergiert, folgt mit (7.9) also

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f \overline{g} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\xi)$$

für $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ definiert durch $h(x) := f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Da $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, folgt $\hat{h} \equiv 0$, und Hauptsatz 7.36 liefert $h \equiv 0$. Es folgt $f \equiv 0$, was zu zeigen war.

7.4. Der Rieszsche Darstellungssatz für Linearformen auf $C_{\mathrm{c}}(X)$

Sei stets (X,d) ein lokal kompakter und σ-kompakter metrischer Raum. Ziel dieses Kapitels ist eine Charakterisierung des Dualraums von $(C_{\mathrm{c}}(X), \|\cdot\|_\infty)$.

7.39 Definition. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\Phi\colon C_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt *positiv*, wenn gilt:

$$\Phi(f) \geq 0 \text{ für alle nichtnegativen Funktionen } f \in C_{\mathrm{c}}(X). \tag{7.10}$$

Mit $\Lambda_+(X)$ bezeichnen wir im Folgenden die Menge der positiven Linearformen auf dem Raum $C_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{R})$. Bemerkung: (7.10) ist offensichtlich äquivalent zur Monotonieeigenschaft

$$\Phi(f) \leq \Phi(g) \qquad \text{für } f,g \in C_{\mathrm{c}}(X) \text{ mit } f \leq g. \tag{7.11}$$

7.40 Satz und Definition. *Sei $\Phi \in \Lambda_+(X)$. Für eine offene Teilmenge U von X definieren wir*

$$\mu(U) \coloneqq \sup\{\Phi(f) \mid f \in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1]), \operatorname{supp} f \subseteq U\}, \tag{7.12}$$

und für eine beliebige Teilmenge A von X

$$\mu(A) \coloneqq \inf\{\mu(U) \mid U \text{ offen in } X \text{ mit } A \subseteq U\}. \tag{7.13}$$

Dann ist μ ein äußeres Maß auf X, d.h. es gilt:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) *Sind $A, A_k \subseteq X$, $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, so gilt $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.*

Ferner ist die Einschränkung von μ auf die Borelalgebra $\mathcal{B}(X)$ ein Radon-Maß. Wir nennen diese Einschränkung das von Φ induzierte Radon-Maß μ.

Bemerkung: Für offene Teilmengen $A \subseteq B \subseteq X$ folgt aus (7.12) *die Monotonieeigenschaft $\mu(A) \leq \mu(B)$. Daher stimmt für offene Teilmengen $A \subseteq X$ die Definition* (7.13) *mit* (7.12) *überein, d.h. μ ist wohldefiniert.*

Wir verschieben den etwas längeren maßtheoretischen Beweis ans Ende von Abschnitt 7.4.

7.41 Bemerkung. Ist $\Phi \in \Lambda_+(X)$, so gilt für das von Φ induzierte Borelmaß μ auch

$$\mu(U) = \sup\{\Phi(h) \mid h \in C_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{R}), 0 \leq h \leq 1_U\} \qquad \text{für } U \subseteq X \text{ offen.}$$

Dabei ist „$\leq$“ offensichtlich. Zum Beweis von „$\geq$“ sei $h \in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1])$ beliebig mit $h \leq 1_U$. Es gilt dann nicht unbedingt $\operatorname{supp} h \subseteq U$! Deshalb definieren wir die Hilfsfunktion $h_\varepsilon \coloneqq (h-\varepsilon)^+ \in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1])$ für $\varepsilon > 0$. Man überzeugt sich leicht, dass für diese $\operatorname{supp} h_\varepsilon \subseteq U$ gilt. Wählt man zudem wie im Beweis von Satz 4.45(b) $u \in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1])$

mit $u \equiv 1$ auf $\operatorname{supp} h$, so gilt $h - h_\varepsilon \leq \varepsilon u$ in X und somit $\Phi(h - h_\varepsilon) \leq \Phi(\varepsilon u) = \varepsilon\Phi(u)$. Es folgt

$$\mu(U) \geq \Phi(h_\varepsilon) = \Phi(h) - \Phi(h - h_\varepsilon) \geq \Phi(h) - \varepsilon\Phi(u) \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und somit $\mu(U) \geq \Phi(h)$. Die Behauptung folgt.

7.42 Satz. *Seien $\Phi \in \Lambda_+(X)$ und μ das induzierte Radon-Maß auf X. Dann gilt*

$$\Phi(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } f \in C_\mathrm{c}(X, \mathbb{R}). \tag{7.14}$$

Beweis. Es reicht aufgrund der Linearität beider Seiten, (7.14) für eine gegebene nichtnegative Funktion $f \in C_\mathrm{c}(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\|f\|_\infty$ mit $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ und $\mu(f^{-1}(t_i)) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $U_i \coloneqq f^{-1}((t_{i-1}, t_i))$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist U_i offen. Wegen $U_i \subseteq \operatorname{supp} f$ gilt $\mu(U_i) < \infty$. Da μ ein Radon-Maß ist, existieren kompakte Mengen $K_i \subseteq U_i$ mit

$$\mu(U_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{n} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{7.15}$$

Nach Definition von μ existieren ferner $g_i \in C_\mathrm{c}(X, [0, 1])$, $i = 1, \ldots, n$ mit $\operatorname{supp} g_i \subseteq U_i$ und $\mu(U_i) - \frac{\varepsilon}{n} \leq \Phi(g_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Wähle nun wie im Beweis von Satz 4.45(b) Funktionen $h_i \in C_\mathrm{c}(X, [0, 1])$ mit $\operatorname{supp} h_i \subseteq U_i$ und $h_i \equiv 1$ auf $\operatorname{supp} g_i \cup K_i$ für $i = 1, \ldots n$. Dann ist $g_i \leq h_i$ für $i = 1, \ldots, n$, und aufgrund der Monotonie von Φ und der Definition von μ folgt

$$\mu(U_i) - \frac{\varepsilon}{n} \leq \Phi(h_i) \leq \mu(U_i) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{7.16}$$

Betrachte nun $\tilde{f} \coloneqq f \cdot (1 - \sum_{i=1}^n h_i) \in C_\mathrm{c}(X, [0, \infty))$ und die offene Menge $A \coloneqq \{x \in X \mid \tilde{f}(x) > 0\}$. Es gilt

$$A = \bigcup_{i=1}^n \Big(\big(U_i \setminus h_i^{-1}(1)\big) \cup f^{-1}(t_i) \Big) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Big((U_i \setminus K_i) \cup f^{-1}(t_i) \Big)$$

und damit

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(U_i \setminus K_i) < \varepsilon$$

gemäß (7.15). Ferner folgt mit Bemerkung 7.41:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{f}) &\leq \sup\{\Phi(h) \mid h \in C_\mathrm{c}(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq h \leq \|f\|_\infty 1_A\} \\ &= \|f\|_\infty \sup\{\Phi(h) \mid h \in C_\mathrm{c}(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq h \leq 1_A\} = \|f\|_\infty \mu(A) \leq \varepsilon \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Mit (7.16) folgt nun

$$
\begin{aligned}
\Phi(f) = \Phi\biggl(f\sum_{i=1}^n h_i\biggr) + \Phi(\tilde f) \le \Phi\biggl(\sum_{i=1}^n t_i h_i\biggr) + \varepsilon\|f\|_\infty \\
= \sum_{i=1}^n t_i \Phi(h_i) + \varepsilon\|f\|_\infty \le \sum_{i=1}^n t_i \mu(U_i) + \varepsilon\|f\|_\infty
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\Phi(f) \ge \Phi\biggl(f\sum_{i=1}^n h_i\biggr) \ge \Phi\biggl(\sum_{i=1}^n t_{i-1} h_i\biggr) = \sum_{i=1}^n t_{i-1}\Phi(h_i) \\
\ge \sum_{i=1}^n t_{i-1}\Bigl(\mu(U_i) - \frac{\varepsilon}{n}\Bigr) \ge \sum_{i=1}^n t_{i-1}\mu(U_i) - t_n\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Da weiterhin aufgrund der Monotonie des Integrals

$$
\sum_{i=1}^n t_{i-1}\mu(U_i) \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \sum_{i=1}^n t_i \mu(U_i)
$$

gilt, erhält man

$$
\biggl|\Phi(f) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\biggr| \le \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\mu(U_i) + \varepsilon(\|f\|_\infty + t_n) \le \varepsilon\mu(\operatorname{supp} f) + 3\varepsilon\|f\|_\infty.
$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt nun (7.14), wie behauptet. □

Ende der Videos von 2021-07-13

Im Folgenden sei $C_c(X) = C_c(X,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir bemerken, dass $C_c(X)$, versehen mit $\|\cdot\|_\infty$, im Allgemeinen nicht vollständig ist; die Vervollständigung ist gegeben durch den Raum $C_0(X)$ der stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{K}$ derart, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert mit $|f| \le \varepsilon$ auf $X \setminus K$. Ist X selbst kompakt, so gilt offensichtlich $C_c(X) = C(X) = C_0(X)$, und man hat somit bereits einen Banachraum.

7.43 Satz. *Sei $\Psi \in C_c(X)'$. Dann existiert ein $\Phi \in \Lambda_+(X)$ mit*

$$
\Phi(f) = \sup\bigl\{|\Psi(g)| \bigm| g \in C_c(X),\ |g| \le f\bigr\} \qquad \text{für alle } f \in C_c(X,[0,\infty)). \tag{7.17}
$$

Ist ferner μ das von Φ induzierte Radon-Maß, so gilt für offene Teilmengen $U \subseteq X$:

$$
\mu(U) = \sup\bigl\{|\Psi(g)| \bigm| g \in C_c(X), \operatorname{supp} g \subseteq U, \|g\|_\infty \le 1\bigr\}. \tag{7.18}
$$

Beweis. Für $f \in C_c(X,[0,\infty))$ sei $\Phi(f)$ wie in (7.17) definiert; dann gilt $\Phi(f) \ge 0$ und $\Phi(cf) = c\Phi(f)$ für $c \ge 0$. Ferner gilt $\Phi(f_1) \le \Phi(f_2)$ für $f_1, f_2 \in C_c(X,[0,\infty))$, $f_1 \le f_2$.

Wir zeigen nun:

$$\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2) \qquad \text{für } f_1,f_2\in C_{\mathrm{c}}(X,[0,\infty)). \tag{7.19}$$

„$\geq$“: Seien dazu $g_1,g_2\in C_{\mathrm{c}}(X)$ beliebig mit $|g_i|\leq f_i$ für $i=1,2$ gegeben, und seien $\alpha_i\in\mathbb{K}$ mit $|\alpha_i|=1$ und $\alpha_i\Psi(g_i)=|\Psi(g_i)|$ für $i=1,2$ gewählt. Dann ist $|\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2|\leq f_1+f_2$ und

$$|\Psi(g_1)|+|\Psi(g_2)|=\Psi(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)\leq|\Psi(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)|\leq\Phi(f_1+f_2).$$

Durch Supremumsbildung folgt also $\Phi(f_1)+\Phi(f_2)\leq\Phi(f_1+f_2)$.

„$\leq$“: Sei $g\in C_{\mathrm{c}}(X)$ beliebig mit $|g|\leq f_1+f_2$ gegeben. Für $i=1,2$ sei ferner

$$g_i\colon X\to\mathbb{K}, \qquad g_i(x)=\begin{cases}\frac{g(x)f_i(x)}{f_1(x)+f_2(x)}, & f_1(x)+f_2(x)>0,\\ 0, & f_1(x)+f_2(x)=0.\end{cases}$$

Mittels der Ungleichung $|g_i|\leq f_i$ sieht man dann leicht, dass g_i für $i=1,2$ in $C_{\mathrm{c}}(X)$ liegt. Außerdem gilt

$$|\Psi(g)|=|\Psi(g_1+g_2)|\leq|\Psi(g_1)|+|\Psi(g_2)|\leq\Phi(f_1)+\Phi(f_2).$$

Durch Supremumsbildung folgt $\Phi(f_1+f_2)\leq\Phi(f_1)+\Phi(f_2)$, und insgesamt (7.19). Wir setzen nun

$$\Phi(f)\coloneqq\Phi(f^+)-\Phi(f^-) \qquad \text{für } f\in C_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{R}).$$

Unter Verwendung von (7.19) sieht man dann leicht, dass Φ linear ist.

Wir zeigen noch, dass (7.12) und (7.17) die Charakterisierung (7.18) für eine offene Teilmenge U von X liefern. Um „$\geq$“ zu sehen, sei $g\in C_{\mathrm{c}}(X)$ mit $\operatorname{supp} g\subseteq U$ und $\|g\|_\infty\leq 1$ gegeben. Dann gilt für $f\coloneqq|g|$: $f\in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1])$, $\operatorname{supp} f\subseteq U$ und $\mu(U)\geq\Phi(f)\geq|\Psi(g)|$. Weil g mit diesen Eigenschaften beliebig war, liefert dies „$\geq$“. Für „$\leq$“ seien $f\in C_{\mathrm{c}}(X,[0,1])$, $\operatorname{supp} f\subseteq U$ und $\varepsilon>0$ gegeben. Dann existiert $h\in C_{\mathrm{c}}(X)$ mit $|h|\leq f$ und $\Phi(f)\leq|\Psi(h)|+\varepsilon$. Es folgt $\operatorname{supp} h\subseteq U$ und $\|h\|_\infty\leq 1$, also

$$\Phi(f)\leq\sup\bigl\{|\Psi(g)|\bigm| g\in C_{\mathrm{c}}(X),\operatorname{supp} g\subseteq U,\|g\|_\infty\leq 1\bigr\}+\varepsilon.$$

Das Bilden des Supremums über alle diese f und Übergang zum Grenzwert $\varepsilon\to 0$ liefert „$\leq$“, also (7.18). $\square$

7.44 Hauptsatz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Zu jedem $\Psi\in C_{\mathrm{c}}(X)'$ existiert ein Radon-Maß μ und eine μ-messbare Funktion $\alpha\colon X\to\mathbb{K}$ mit $|\alpha|=1$ μ-f.ü. auf X und derart, dass*

$$\Psi(f)=\int_X f\alpha\,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } f\in C_{\mathrm{c}}(X) \tag{7.20}$$

gilt. Ist ferner X kompakt, so gilt

$$\|\Psi\|=\mu(X). \tag{7.21}$$

Ferner ist μ durch (7.20) *auf Borelmengen eindeutig bestimmt, und α ist μ-f.ü. eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zur Existenz: Sei $\Phi \in \Lambda_+(X)$ wie in Satz 7.43 gewählt, und sei μ das von Φ induzierte Radon-Maß. Dann gilt gemäß (7.17) und (7.14)

$$|\Psi(f)| \leq \Phi(|f|) = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_{L^1(X,\mathrm{d}\mu)} \qquad \text{für } f \in C_\mathrm{c}(X). \tag{7.22}$$

Sei im Folgenden $L^p(X) := L^p(X, \mathrm{d}\mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Da $C_\mathrm{c}(X)$ gemäß Satz 4.47 in $L^1(X)$ dicht liegt, lässt sich Ψ nach Satz 6.1(b) zu einer stetigen Linearform auf $L^1(X)$ mit $\|\Psi\|_{L^1(X)'} \leq 1$ fortsetzen. Nach Satz 6.52 existiert also ein $\alpha \in L^\infty(X)$ mit $\|\alpha\|_{L^\infty(X)} = \|\Psi\|_{L^1(X)'} \leq 1$ und derart, dass (7.20) gilt.

Es bleibt $|\alpha| = 1$ f.ü. in X zu zeigen. Weil X lokal kompakt und σ-kompakt ist, existieren offene Teilmengen $U_i \subseteq X$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$X = \bigcup_{i=1}^\infty U_i \qquad \text{und} \qquad \mu(U_i) < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, \tag{7.23}$$

siehe auch Bemerkungen und Beispiele 4.36(a). Sei nun $U \subseteq X$ eine beliebige offene Menge mit $\mu(U) < \infty$. Nach (7.18) existiert dann eine Folge von Funktionen $g_n \in C_\mathrm{c}(X)$ mit $\operatorname{supp} g_n \subseteq U$, $\|g_n\|_\infty \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mu(U) = \lim_{n\to\infty} |\Psi(g_n)| \overset{(7.20)}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \int_U \alpha g_n \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_U |\alpha| \,\mathrm{d}\mu \tag{7.24}$$

und somit

$$\int_U (1 - |\alpha|) \,\mathrm{d}\mu = \mu(U) - \int_U |\alpha| \,\mathrm{d}\mu \leq 0.$$

Da $1 - |\alpha| \geq 0$ f.ü. in U gilt, ergibt sich $|\alpha| = 1$ f.ü. in U. Mit (7.23) folgt $|\alpha| = 1$ f.ü. in X.

Ist schließlich X kompakt, so haben wir wegen (7.22)

$$|\Psi(f)| \leq \|f\|_{L^1(X)} \leq \mu(X)\|f\|_\infty \qquad \text{für alle } f \in C_\mathrm{c}(X)$$

und somit $\|\Psi\| \leq \mu(X)$. Ferner gilt (7.24) in diesem Fall auch für $U = X$, und somit folgt

$$\mu(X) \leq \limsup_{n\to\infty} \|\Psi\| \|g_n\|_\infty \leq \|\Psi\|,$$

insgesamt also (7.21).

Zur Eindeutigkeit: Seien μ ein Radon-Maß und $\alpha\colon X \to \mathbb{K}$ eine μ-messbare Funktion mit $|\alpha| = 1$ f.ü. auf X und derart, dass (7.20) gilt. Wir zeigen, dass dann

$$\mu(U) = \sup\bigl\{ |\Psi(g)| \bigm| g \in C_\mathrm{c}(X), \operatorname{supp} g \subseteq U, \|g\|_\infty \leq 1 \bigr\} \tag{7.25}$$

für jede offene Teilmenge U von X mit $\mu(U) < \infty$ gilt; mit (7.23) ist μ dann auf

Borelmengen von X eindeutig bestimmt.

Sei also U offen in X mit $\mu(U) < \infty$. Wegen (7.20) gilt

$$|\Psi(g)| \leq \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(U) \qquad \text{für } g \in C_\mathrm{c}(X) \text{ mit } \operatorname{supp} g \subseteq U \text{ und } \|g\|_\infty \leq 1,$$

also folgt „$\geq$“ in (7.25).

Zum Beweis von „$\leq$“ bemerken wir zunächst, dass U ebenfalls lokal kompakt und die Einschränkung von μ auf die Borel-Teilmengen von U wieder ein Radon-Maß ist. Anwendung des Satzes von Lusin (Satz 4.45(b)) mit U anstelle von X auf die Funktion $\overline{\alpha}$ liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ somit eine Funktion $g_n \in C_\mathrm{c}(X)$ mit $\operatorname{supp} g_n \subseteq U$, $\|g_n\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \leq 1$ und

$$\mu\big(\{x \in U \mid g_n(x) \neq \overline{\alpha}(x)\}\big) \leq \frac{1}{n}.$$

Insbesondere folgt $g_n \to \overline{\alpha}$ in $L^1(U)$. Weil α in $L^\infty(X)$ liegt, folgt

$$\mu(U) = \int_U |\alpha|^2 \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(7.20)}{=} \lim_{n\to\infty} \Psi(g_n),$$

also „$\leq$“. Damit ist (7.25) gezeigt.

Sei schließlich $\beta\colon X \to \mathbb{K}$ eine weitere μ-messbare Funktion mit $|\beta| = 1$ f.ü. auf X und

$$\Psi(f) = \int_X f\alpha \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\beta \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } f \in C_\mathrm{c}(X).$$

Durch Betrachtung einer offenen Teilmenge U von X mit $\mu(U) < \infty$ und $f = g_n$ wie oben folgt dann wiederum

$$\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \Psi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\beta \,\mathrm{d}\mu = \int_U \overline{\alpha}\beta \,\mathrm{d}\mu = \int_U \operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta) \,\mathrm{d}\mu,$$

also

$$0 = \int_U \Big(1 - \operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)\Big) \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $|\overline{\alpha}\beta| = 1$ und somit $1 - \operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta) \geq 0$ f.ü. in X gilt, folgen $\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta) = 1$ und schließlich $\overline{\alpha}\beta = 1$ f.ü. in U. Wiederum liefert uns (7.23) $\overline{\alpha}\beta = 1$, also $\alpha = \beta$ f.ü. in X. $\square$

Ende der Videos von 2021-07-16

Zum Abschluss des Kapitels liefern wir nun den

Beweis von Satz und Definition 7.40. 1. Schritt: μ ist ein äußeres Maß auf X. Zu (i): Aus (7.12) folgt offensichtlich die Eigenschaft $\mu(\varnothing) = 0$.

Zu (ii): Seien $A_k \subseteq X$, $k \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ gegeben. Sei zunächst angenommen, dass A_k und A offene Mengen sind, und sei $f \in C_\mathrm{c}(X, [0,1])$ eine Funktion mit $K := \operatorname{supp} f \subseteq A$. Da K kompakt ist, existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{l} A_k$. Wähle nun Funktionen

$\xi_k \in C_c(X, [0,1])$, $k = 1, \dots, l$ mit $\operatorname{supp} \xi_k \subseteq A_k$ und $\sum_{k=1}^{l} \xi_k \equiv 1$ auf K (endliche Zerlegung der Eins). Dann ist $f \leq \sum_{k=1}^{l} f\xi_k$ und somit wegen (7.11)

$$\Phi(f) \leq \sum_{k=1}^{l} \Phi(f\xi_k) \leq \sum_{k=1}^{l} \mu(A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Supremumsbildung über f liefert also

$$\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Seien nun A und A_k, $k \in \mathbb{N}$ beliebig (d.h. nicht notwendig offen), sei $\varepsilon > 0$, und seien V_k, $k \in \mathbb{N}$ offene Mengen mit $A_k \subseteq V_k$ und $\mu(V_k) \leq \mu(A_k) + \varepsilon 2^{-k}$. Dann ist nach Definition und dem bisher Gezeigten

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(V_k) \leq \varepsilon + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. Wir haben somit gezeigt, dass μ ein äußeres Maß ist.

2. Schritt: Die Einschränkung von μ auf die Borelalgebra $\mathcal{B}(X)$ ist ein Borelmaß. Dies folgt mit dem sogenannten Kriterium von Carathéodory: Sei (X, d) ein metrischer Raum und μ ein äußeres Maß auf X. Gilt

(7.26) $\quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \subseteq X$ mit $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\} > 0$,

so ist jede Borelmenge $A \subseteq X$ μ-messbar im Sinne von Carathéodory, d.h. es gilt

(7.27) $$\mu(Z) = \mu(Z \cap A) + \mu(Z \setminus A) \quad \text{für } Z \subseteq X \text{ beliebig.}$$

Wir prüfen zunächst die Voraussetzung (7.26): Die Ungleichung „$\leq$" ist aufgrund der Subadditivität klar, zu zeigen bleibt also „$\geq$". Sei dazu zunächst angenommen, dass $A, B \subseteq X$ offen sind, und sei $\delta > 0$. Dann existieren Funktionen $f, g \in C_c(X, [0,1])$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq A$, $\operatorname{supp} g \subseteq B$ und

$$\mu(A) \leq \Phi(f) + \frac{\delta}{2} \qquad \text{sowie} \qquad \mu(B) \leq \Phi(g) + \frac{\delta}{2}.$$

Da $A \cap B = \varnothing$ gilt, ist $h := f + g \in C_c(X, [0,1])$ mit $\operatorname{supp} h \subseteq A \cup B$, und somit gilt

$$\mu(A \cup B) \geq \Phi(h) = \Phi(f) + \Phi(g) = \mu(A) + \mu(B) + \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung in diesem Spezialfall. Im Allgemeinen Fall sei $\varepsilon \coloneqq \operatorname{dist}(A,B) > 0$, $U \subseteq X$ eine beliebige offene Menge mit $A \cup B \subseteq U$, und sei

$$\tilde{A} \coloneqq U_{\varepsilon/4}(A) \cap U, \qquad \tilde{B} \coloneqq U_{\varepsilon/4}(B) \cap U.$$

Dann sind $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq X$ offen mit $\operatorname{dist}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, und somit folgt mit dem Spezialfall und der Monotonie

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(\tilde{A}) + \mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \leq \mu(U)$$

Aufgrund der beliebigen Wahl von U folgt also $\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B)$. Die zeigt Voraussetzung (7.26) im vorliegenden Fall.

3. Schritt: Die Einschränkung von μ auf $\mathcal{B}(X)$ ist ein Radon-Maß. Nach Definition ist μ von außen regulär. Ferner gilt

$$\mu(K) < \infty \qquad \text{für jede kompakte Menge } K \subseteq X,$$

denn: Gemäß Bemerkungen und Beispiele 4.36(a) existiert $u \in C_c(X, [0,1])$ mit $u \equiv 1$ in einer offenen Umgebung U von K. Für alle $f \in C_c(X, [0,1])$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq U$ gilt dann $\Phi(f) \leq \Phi(u)$, und somit folgt $\mu(U) \leq \Phi(u)$. Somit ist auch $\mu(K) \leq \mu(U) \leq \Phi(u) < \infty$. Gemäß der Bemerkung in Definition 4.41 ist μ somit lokal endlich, und wegen Satz 4.42(a) ist μ somit ein Radon-Maß.

4. Schritt: Beweis des obigen Kriteriums von Carathéodory. Dazu reicht es, die Eigenschaft (7.27) für abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq X$ zu beweisen (vgl. das Lemma von Carathéodory aus der Analysis II). Sei dazu $Z \subseteq X$ beliebig. Es reicht dann, die Ungleichung „$\geq$" in (7.28) zu zeigen („$\leq$" folgt direkt aus den Eigenschaften eines äußeren Maßes):

$$\mu(Z) \geq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \setminus A). \tag{7.28}$$

Dies ist trivial, falls $\mu(Z) = \infty$ ist. Sei nun $\mu(Z) < \infty$ angenommen, und sei $A_n \coloneqq \left\{x \in X \;\middle|\; \operatorname{dist}(x, A) \leq \frac{1}{n}\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\operatorname{dist}(Z \setminus A_n, Z \cap A) > 0$ und somit

$$\mu(Z \cap A_n) + \mu(Z \setminus A) = \mu((Z \cap A_n) \cup (Z \setminus A)) \leq \mu(Z),$$

nach Voraussetzung und aufgrund des Monotonie von μ. Es reicht also, zu zeigen:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(Z \cap A_n) = \mu(Z \cap A).$$

Sei dazu

$$R_k \coloneqq \left\{x \in Z \;\middle|\; \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, A) \leq \frac{1}{k}\right\} \subseteq Z \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit von A ist dann $Z \setminus A = (Z \setminus A_n) \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} R_k$ und somit

$$\mu(Z \setminus A_n) \leq \mu(Z \setminus A) \leq \mu(Z \setminus A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k).$$

Es reicht also, zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(R_k) = 0, \qquad \text{bzw. äquivalent:} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty. \tag{7.29}$$

Nach Voraussetzung (und per Induktion) gelten dabei für $m \in \mathbb{N}$ die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{m} \mu(R_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k+1}\right),$$

da die hier jeweils betrachten Mengenfamilien paarweise positiven Abstand haben. Aufgrund der Monotonie folgt somit

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \mu(R_k) \leq 2\mu(Z) < \infty \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt (7.29), wie benötigt.

$\square$

A. Referenzen in Skript und Videos

A.1. Auflösung externer Referenzen

Video	Referenz	Skript	Seite
5	ext1	Bemerkung und Beispiel 2.5	7
5	ext2	Punkt (e)	7
5	ext3	Satz 2.6	8
5	ext4	Punkt (N4)	6
11	ext1	Bemerkung und Beispiel 2.3	6
11	ext2	Punkt (a)	6
12	ext1	Definition und Bemerkung 2.21	14
12	ext2	Gleichung (1.2)	4
12	ext3	Kapitel 1	4
14	ext1	Satz 2.32	19
14	ext2	Bemerkung 2.31	18
14	ext3	Punkt (b)	18
14	ext4	Bemerkung 2.23	14
14	ext5	Punkt (d)	15
14	ext6	Punkt (a)	19
14	ext7	Beispiel 2.13	10
15	ext1	Bemerkung 2.31	18
15	ext2	Punkt (b)	18
15	ext3	Punkt (d)	19
17	ext1	Bemerkung 2.31	18
17	ext2	Punkt (c)	18
17	ext3	Satz 2.39	22
18	ext1	Satz 2.32	19
18	ext2	Punkt (a)	19
18	ext3	Satz 2.40	22
18	ext4	Bemerkungen und Beispiele 2.34	19
18	ext5	Punkt (c)	19
19	ext1	Satz 2.39	22
20	ext1	Korollar 3.2	26
20	ext2	Bemerkungen und Beispiele 2.34	19
20	ext3	Punkt (c)	19
21	ext1	Korollar 3.2	26
21	ext2	Punkt (b)	26

Video	Referenz	Skript	Seite
22	ext1	Definition und Bemerkung 2.22	14
22	ext2	Punkt (b)	14
22	ext3	Satz 2.9	10
22	ext4	Satz 3.5	27
23	ext1	Hauptsatz 3.12	29
23	ext2	Satz 2.37	21
24	ext1	Korollar 3.14	30
24	ext2	Punkt (b)	30
25	ext1	Satz 3.19	32
25	ext2	Bemerkung 3.20	32
26	ext1	Bemerkung 2.41	24
26	ext2	Punkt (b)	24
26	ext3	Bemerkung 2.42	24
26	ext4	Punkt (a)	24
26	ext5	Bemerkungen und Beispiele 2.34	19
26	ext6	Punkt (f)	20
27	ext1	Bemerkung 2.42	24
27	ext2	Punkt (b)	24
27	ext3	Punkt (c)	24
29	ext1	Satz 2.37	21
30	ext1	Satz 4.8	38
30	ext2	Hilfssatz 4.10	39
31	ext1	Satz 4.8	38
31	ext2	Bemerkung 2.42	24
31	ext3	Satz 2.20	13
33	ext1	Definition und Satz 2.7	8
33	ext2	Satz 2.6	8
33	ext3	Bemerkung 2.8	9
33	ext4	Punkt (b)	9
34	ext1	Satz 2.37	21
35	ext1	Satz 4.29	46
35	ext2	Punkt (b)	46
35	ext3	Satz 4.17	42
35	ext4	Satz 4.21	43
37	ext1	Bemerkung 2.42	24
37	ext2	Satz 2.45	25
37	ext3	Korollar 4.13	41
37	ext4	Satz 2.18	12
39	ext1	Satz 4.17	42
39	ext2	Satz 4.33	48
40	ext1	Satz 4.32	48
40	ext2	Satz 4.45	53
40	ext3	Punkt (b)	53

Video	Referenz	Skript	Seite
40	ext4	Satz 4.37	50
40	ext5	Punkt (a)	50
40	ext6	Punkt (b)	50
40	ext7	Korollar 4.13	41
40	ext8	Satz 2.18	12
41	ext1	Satz 4.21	43
41	ext2	Satz 4.19	43
41	ext3	Satz 4.47	54
41	ext4	Bemerkung und Beispiel 4.26	44
41	ext5	Punkt (b)	45
42	ext1	Satz 2.32	19
43	ext1	Satz 3.24	33
43	ext2	Punkt (b)	33
44	ext1	Satz und Definition 5.1	57
44	ext2	Satz 5.2	57
44	ext3	Punkt (b)	57
44	ext4	Satz und Definition 5.6	59
44	ext5	Definition 3.22	33
44	ext6	Punkt (a)	59
44	ext7	Punkt (c)	58
44	ext8	Definition und Satz 5.5	58
44	ext9	Punkt (b)	59
45	ext1	Satz und Definition 5.7	59
46	ext1	Satz 4.21	43
46	ext2	Satz 5.14	63
48	ext1	Gleichung (NP)	62
48	ext2	Satz 5.10	61
48	ext3	Bemerkung 5.15	65
48	ext4	Punkt (a)	65
48	ext5	Punkt (b)	65
49	ext1	Satz und Definition 5.7	59
49	ext2	Punkt (b)	60
50	ext1	Satz 5.23	68
50	ext2	Satz und Definition 5.6	59
50	ext3	Punkt (a)	59
50	ext4	Punkt (b)	69
50	ext5	Satz 5.20	67
50	ext6	Punkt (b)	67
51	ext1	Definition und Korollar 4.12	41
51	ext2	Satz 4.47	54
51	ext3	Beispiel 2.29	16
51	ext4	Punkt (c)	17
51	ext5	Hauptsatz 3.8	28

Video	Referenz	Skript	Seite
52	ext1	Satz 5.10	61
53	ext1	Definition und Satz 5.16	65
53	ext2	Satz 5.17	66
53	ext3	Satz 5.31	73
53	ext4	Punkt (d)	74
53	ext5	Bemerkung 5.18	66
53	ext6	Abschnitt 5.2	62
54	ext1	Abschnitt 5.2	62
54	ext2	Kapitel 1	4
54	ext3	Gleichung (5.11)	73
54	ext4	Satz 5.31	73
54	ext5	Satz 4.47	54
54	ext6	Gleichung (5.12)	74
54	ext7	Punkt (c)	74
55	ext1	Gleichung (5.11)	73
55	ext2	Satz 5.31	73
57	ext1	Satz und Definition 5.7	59
57	ext2	Satz und Definition 5.36	77
60	ext1	Satz 6.2	83
61	ext1	Korollar 6.5	84
62	ext1	Kapitel 5	57
62	ext2	Beispiele 6.17	87
62	ext3	Punkt (d)	88
62	ext4	Satz 3.24	33
62	ext5	Punkt (a)	33
62	ext6	Satz 6.4	84
62	ext7	Korollar 6.5	84
63	ext1	Satz 6.4	84
64	ext1	Satz 2.6	8
64	ext2	Satz 6.2	83
64	ext3	Satz 6.3	84
65	ext1	Korollar 6.5	84
65	ext2	Beispiele 6.17	87
65	ext3	Punkt (c)	88
65	ext4	Satz 5.23	68
66	ext1	Definition 6.6	85
66	ext2	Hauptsatz 3.8	28
66	ext3	Korollar 3.9	28
66	ext4	Punkt (c)	28
66	ext5	Korollar 6.20	90
66	ext6	Punkt (b)	90
67	ext1	Beispiele 6.17	87
67	ext2	Satz 6.25	92

Video	Referenz	Skript	Seite
67	ext3	Korollar 6.26	93
67	ext4	Korollar 3.9	28
67	ext5	Punkt (c)	28
67	ext6	Punkt (b)	28
68	ext1	Definition 6.6	85
68	ext2	Satz 5.10	61
68	ext3	Punkt (b)	61
68	ext4	Satz 6.10	85
68	ext5	Punkt (b)	86
68	ext6	Satz 6.11	86
68	ext7	Punkt (b)	86
69	ext1	Satz 6.15	87
69	ext2	Bemerkung 6.16	87
69	ext3	Korollar 4.13	41
69	ext4	Satz 6.10	85
69	ext5	Satz 6.4	84
69	ext6	Punkt (a)	87
70	ext1	Satz 6.37	97
70	ext2	Hilfssatz 6.35	96
70	ext3	Punkt (b)	96
70	ext4	Hauptsatz 6.31	94
70	ext5	Korollar 6.26	93
70	ext6	Bemerkungen und Beispiele 6.34	95
70	ext7	Punkt (b)	96
70	ext8	Bemerkungen und Beispiele 6.36	97
70	ext9	Punkt (a)	97
71	ext1	Abschnitt 6.3	89
71	ext2	Korollar 6.20	90
71	ext3	Punkt (b)	90
72	ext1	Korollar 6.5	84
73	ext1	Hilfssatz 6.43	99
73	ext2	Satz 6.46	100
73	ext3	Punkt (b)	100
75	ext1	Satz 6.49	102
75	ext2	Satz 6.47	101
75	ext3	Satz 6.19	89
75	ext4	Satz 6.4	84
75	ext5	Satz 6.15	87
75	ext6	Punkt (a)	87
75	ext7	Satz 6.40	98
75	ext8	Punkt (a)	98
75	ext9	Bemerkungen und Beispiele 6.34	95
75	ext10	Punkt (b)	96

Video	Referenz	Skript	Seite
76	ext1	Bemerkung und Beispiel 4.26	44
76	ext2	Punkt (b)	45
76	ext3	Korollar 6.50	102
76	ext4	Satz 5.10	61
77	ext1	Beispiel 2.29	16
77	ext2	Punkt (c)	17
77	ext3	Korollar 4.6	37
77	ext4	Satz 2.45	25
78	ext1	Bemerkung 2.42	24
78	ext2	Punkt (b)	24
78	ext3	Bemerkung 7.3	106
78	ext4	Punkt (c)	107
79	ext1	Korollar 4.6	37
79	ext2	Korollar 6.5	84
79	ext3	Satz 6.27	93
79	ext4	Punkt (a)	93
79	ext5	Bemerkung und Beispiel 4.3	35
79	ext6	Punkt (b)	35
79	ext7	Satz 4.5	36
80	ext1	Satz 6.4	84
80	ext2	Satz 3.24	33
80	ext3	Punkt (a)	33
80	ext4	Satz 2.45	25
80	ext5	Satz 7.7	108
80	ext6	Satz 6.15	87
80	ext7	Punkt (c)	87
80	ext8	Satz 7.6	107
81	ext1	Satz 2.37	21
81	ext2	Korollar 3.14	30
82	ext1	Satz 7.11	109
82	ext2	Hilfssatz 7.10	109
82	ext3	Satz 7.14	111
82	ext4	Satz 3.24	33
82	ext5	Korollar 3.14	30
84	ext1	Lemma 7.18	112
84	ext2	Beispiel 7.16	112
84	ext3	Punkt (b)	112
85	ext1	Hilfssatz 7.21	114
85	ext2	Lemma 7.18	112
85	ext3	Satz 7.19	112
86	ext1	Satz 7.20	114
86	ext2	Satz 7.22	115
88	ext1	Definition und Satz 4.50	56

Video	Referenz	Skript	Seite
89	ext1	Beispiel 7.29	117
89	ext2	Satz 7.30	118
89	ext3	Punkt (f)	118
89	ext4	Punkt (d)	118
90	ext1	Satz 7.32	120
90	ext2	Satz 7.30	118
90	ext3	Punkt (c)	118
90	ext4	Beispiel 7.31	120
91	ext1	Bemerkung und Beispiel 4.26	44
91	ext2	Punkt (a)	44
91	ext3	Definition und Satz 4.50	56
91	ext4	Punkt (b)	45
92	ext1	Bemerkung 5.43	80
92	ext2	Satz 7.33	121
92	ext3	Punkt (b)	121
92	ext4	Bemerkung und Beispiel 4.26	44
92	ext5	Punkt (a)	44
92	ext6	Punkt (a)	121
92	ext7	Satz 7.30	118
92	ext8	Punkt (f)	118
92	ext9	Definition und Satz 4.50	56
92	ext10	Satz 6.1	82
92	ext11	Hilfssatz 7.35	122
92	ext12	Satz 4.29	46
92	ext13	Punkt (c)	121
93	ext1	Hauptsatz 7.36	122
94	ext1	Satz 4.45	53
94	ext2	Punkt (b)	53
95	ext1	Satz 4.45	53
95	ext2	Punkt (b)	53
95	ext3	Bemerkung 7.41	125
96	ext1	Gleichung (7.12)	125
97	ext1	Satz 7.43	127
97	ext2	Gleichung (7.17)	127
97	ext3	Gleichung (7.14)	126
97	ext4	Satz 4.47	54
97	ext5	Satz 6.1	82
97	ext6	Punkt (b)	82
97	ext7	Satz 6.52	104
97	ext8	Bemerkungen und Beispiele 4.36	49
97	ext9	Punkt (a)	49
97	ext10	Gleichung (7.18)	127
97	ext11	Satz 4.45	53

Video	Referenz	Skript	Seite
97	ext12	Punkt (b)	53
98	ext1	Satz und Definition 7.40	125
98	ext2	Punkt (i)	125
98	ext3	Gleichung (7.12)	125
98	ext4	Punkt (ii)	125
98	ext5	Gleichung (7.11)	125
98	ext6	Bemerkungen und Beispiele 4.36	49
98	ext7	Punkt (a)	49
98	ext8	Definition 4.41	51
98	ext9	Satz 4.42	51
98	ext10	Punkt (a)	51

A.2. Korrespondenz interner Referenzen

Video	Referenz	Skript	Seite
2	**??**	Kapitel 1	4
2	Gleichung (1)	Gleichung (1.1)	4
2	Gleichung (2)	Gleichung (1.2)	4
2	Gleichung (3)	Gleichung (1.3)	5
3	**??**	Abschnitt 2.1	6
3	Definition 1	Definition 2.1	6
3	Definition 2	Definition 2.2	6
3	Bemerkung und Beispiel 3	Bemerkung und Beispiel 2.3	6
4	Definition 1	Definition 2.4	7
4	Bemerkung und Beispiel 2	Bemerkung und Beispiel 2.5	7
4	Satz 3	Satz 2.6	8
5	Definition und Satz 1	Definition und Satz 2.7	8
5	Bemerkung 2	Bemerkung 2.8	9
5	Satz 3	Satz 2.9	10
6	Definition 1	Definition 2.10	10
6	Bemerkung 2	Bemerkung 2.11	10
6	Satz 3	Satz 2.12	10
6	Beispiel 4	Beispiel 2.13	10
7	**??**	Abschnitt 2.2	11
7	Definition 1	Definition 2.14	11
7	Definition und Bemerkung 2	Definition und Bemerkung 2.15	11
8	Definition 1	Definition 2.16	12
8	Beispiel 2	Beispiel 2.17	12
8	Satz 3	Satz 2.18	12

Video	Referenz	Skript	Seite
9	Definition 1	Definition 2.19	13
9	Satz 2	Satz 2.20	13
9	Gleichung (1)	Gleichung (2.2)	13
9	Definition und Bemerkung 3	Definition und Bemerkung 2.21	14
10	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 2.22	14
10	Bemerkung 2	Bemerkung 2.23	14
10	Definition 3	Definition 2.24	15
10	Bemerkung 4	Bemerkung 2.25	15
11	Satz 1	Satz 2.26	15
11	Definition 2	Definition 2.27	16
11	Bemerkung 3	Bemerkung 2.28	16
12	Beispiel 1	Beispiel 2.29	16
12	Gleichung (1)	Gleichung (2.3)	17
13	Definition 1	Definition 2.30	18
13	Bemerkung 2	Bemerkung 2.31	18
13	Satz 3	Satz 2.32	19
13	Bemerkung 4	Bemerkung 2.33	19
14	Bemerkungen und Beispiele 1	Bemerkungen und Beispiele 2.34	19
15	Satz 1	Satz 2.35	20
15	Definition 2	Definition 2.36	21
15	Satz 3	Satz 2.37	21
16	**??**	Abschnitt 2.5	21
16	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 2.38	22
16	Satz 2	Satz 2.39	22
16	Gleichung (1)	Gleichung (2.4)	22
17	Satz 1	Satz 2.40	22
17	Gleichung (1)	Gleichung (2.5)	23
17	Gleichung (2)	Gleichung (2.6)	23
17	Gleichung (3)	Gleichung (2.7)	23
18	Bemerkung 1	Bemerkung 2.41	24
18	Bemerkung 2	Bemerkung 2.42	24
18	Satz 3	Satz 2.43	24
18	Lemma 4	Lemma 2.44	25
18	Satz 5	Satz 2.45	25
18	Gleichung (1)	Gleichung (2.8)	25
19	**??**	Abschnitt 3.1	26
19	Satz 1	Satz 3.1	26
19	Gleichung (1)	Gleichung (3.1)	26
19	Gleichung (2)	Gleichung (3.2)	26
19	Korollar 2	Korollar 3.2	26
20	Definition 1	Definition 3.3	27
20	Bemerkungen und Beispiele 2	Bemerkungen und Beispiele 3.4	27
20	Satz 3	Satz 3.5	27

Video	Referenz	Skript	Seite
20	Korollar 4	Korollar 3.6	27
20	Bemerkung 5	Bemerkung 3.7	27
21	??	Abschnitt 3.2	28
21	Hauptsatz 1	Hauptsatz 3.8	28
21	Gleichung (1)	Gleichung (3.3)	28
21	Korollar 2	Korollar 3.9	28
21	Gleichung (2)	Gleichung (3.4)	28
21	Bemerkung 3	Bemerkung 3.10	29
22	??	Abschnitt 3.3	29
22	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 3.11	29
22	Hauptsatz 2	Hauptsatz 3.12	29
22	Beispiel 3	Beispiel 3.13	29
22	Korollar 4	Korollar 3.14	30
22	Korollar 5	Korollar 3.15	30
23	Notation 1	Notation 3.16	30
23	Lemma 2	Lemma 3.17	30
23	Gleichung (1)	Gleichung (3.5)	30
23	Gleichung (2)	Gleichung (3.6)	31
23	Gleichung (3)	Gleichung (3.7)	31
24	??	Abschnitt 3.4	32
24	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 3.18	32
24	Satz 2	Satz 3.19	32
24	Bemerkung 3	Bemerkung 3.20	32
25	Bemerkung 1	Bemerkung 3.21	32
25	Definition 2	Definition 3.22	33
25	Beispiel 3	Beispiel 3.23	33
25	Satz 4	Satz 3.24	33
26	??	Kapitel 4	35
26	Bemerkung 1	Bemerkung 4.1	35
26	Definition 2	Definition 4.2	35
26	Bemerkung und Beispiel 3	Bemerkung und Beispiel 4.3	35
26	Definition und Satz 4	Definition und Satz 4.4	36
27	Satz 1	Satz 4.5	36
27	Gleichung (1)	Gleichung (4.1)	36
27	Gleichung (2)	Gleichung (4.2)	37
27	Korollar 2	Korollar 4.6	37
28	Bemerkung 1	Bemerkung 4.7	37
28	Satz 2	Satz 4.8	38
29	Hilfssatz 1	Hilfssatz 4.9	38
29	Gleichung (1)	Gleichung (4.3)	38
29	Gleichung (2)	Gleichung (4.4)	38
29	Gleichung (3)	Gleichung (4.5)	38
29	Hilfssatz 2	Hilfssatz 4.10	39

Video	Referenz	Skript	Seite
29	Gleichung (4)	Gleichung (4.6)	39
30	Gleichung (1)	Gleichung (4.7)	40
31	Korollar 1	Korollar 4.11	40
31	Definition und Korollar 2	Definition und Korollar 4.12	41
31	Korollar 3	Korollar 4.13	41
32	**??**	Abschnitt 4.3	41
32	Definition 1	Definition 4.14	41
32	Gleichung (1)	Gleichung (4.8)	42
32	Bemerkung 2	Bemerkung 4.15	42
32	Definition und Bemerkung 3	Definition und Bemerkung 4.16	42
32	Gleichung (2)	Gleichung (4.9)	42
32	Satz 4	Satz 4.17	42
32	Bemerkung 5	Bemerkung 4.18	43
32	Satz 6	Satz 4.19	43
32	Lemma 7	Lemma 4.20	43
32	Satz 8	Satz 4.21	43
33	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 4.22	43
33	Satz und Definition 2	Satz und Definition 4.23	43
33	Satz 3	Satz 4.24	44
33	Bemerkung 4	Bemerkung 4.25	44
33	Bemerkung und Beispiel 5	Bemerkung und Beispiel 4.26	44
34	Definition und Satz 1	Definition und Satz 4.27	45
34	Bemerkung 2	Bemerkung 4.28	45
34	Satz 3	Satz 4.29	46
34	Gleichung (1)	Gleichung (4.10)	46
35	Definition und Satz 2	Definition und Satz 4.31	47
35	Satz 3	Satz 4.32	48
36	Satz 1	Satz 4.33	48
37	Definition 1	Definition 4.34	49
37	Definition 2	Definition 4.35	49
37	Bemerkungen und Beispiele 3	Bemerkungen und Beispiele 4.36	49
37	Satz 4	Satz 4.37	50
37	Bemerkung 5	Bemerkung 4.38	50
38	Definition 1	Definition 4.39	50
38	Beispiele 2	Beispiele 4.40	51
38	Definition 3	Definition 4.41	51
38	Gleichung (1)	Gleichung (4.11)	51
38	Satz 4	Satz 4.42	51
38	Gleichung (2)	Gleichung (4.12)	52
38	Beispiel 5	Beispiel 4.43	52
39	Hilfssatz 1	Hilfssatz 4.44	52
39	Satz 2	Satz 4.45	53
40	Beispiel 1	Beispiel 4.46	54

Video	Referenz	Skript	Seite
40	Satz 2	Satz 4.47	54
40	Bemerkung 3	Bemerkung 4.48	55
41	Satz 1	Satz 4.49	55
41	Definition und Satz 2	Definition und Satz 4.50	56
42	**??**	Kapitel 5	57
42	**??**	Abschnitt 5.1	57
42	Satz und Definition 1	Satz und Definition 5.1	57
42	Gleichung (1)	Gleichung (5.1)	57
42	Satz 2	Satz 5.2	57
42	Bemerkung 3	Bemerkung 5.3	58
42	Beispiel 4	Beispiel 5.4	58
43	Definition und Satz 1	Definition und Satz 5.5	58
43	Satz und Definition 2	Satz und Definition 5.6	59
44	Satz und Definition 1	Satz und Definition 5.7	59
44	Gleichung (1)	Gleichung (5.2)	60
44	Korollar 2	Korollar 5.8	60
45	Definition und Bemerkung 1	Definition und Bemerkung 5.9	61
45	Gleichung (1)	Gleichung (5.3)	61
45	Satz 2	Satz 5.10	61
46	**??**	Abschnitt 5.2	62
46	Gleichung (NP)	Gleichung (NP)	62
46	Definition 1	Definition 5.11	62
46	Gleichung (1)	Gleichung (5.4)	62
46	Bemerkung und Beispiel 2	Bemerkung und Beispiel 5.12	62
47	Satz 1	Satz 5.13	63
47	Satz 2	Satz 5.14	63
47	Gleichung (1)	Gleichung (5.5)	63
47	Gleichung (2)	Gleichung (5.6)	64
47	Bemerkung 3	Bemerkung 5.15	65
48	Definition und Satz 1	Definition und Satz 5.16	65
48	Satz 2	Satz 5.17	66
48	Bemerkung 3	Bemerkung 5.18	66
48	Gleichung (1)	Gleichung (5.7)	66
48	Gleichung (NR)	Gleichung (NR)	67
49	Definition 1	Definition 5.19	67
49	Satz 2	Satz 5.20	67
49	Satz 3	Satz 5.21	68
49	Definition 4	Definition 5.22	68
49	Satz 5	Satz 5.23	68
50	Korollar 1	Korollar 5.24	69
50	Bemerkung 2	Bemerkung 5.25	70
50	Gleichung (1)	Gleichung (5.8)	70
50	Satz 3	Satz 5.26	70

Video	Referenz	Skript	Seite
51	Definition und Satz 1	Definition und Satz 5.27	71
51	Bemerkung 2	Bemerkung 5.28	71
51	Gleichung (1)	Gleichung (5.9)	72
52	??	Abschnitt 5.5	73
52	Definition 1	Definition 5.29	73
52	Satz und Definition 2	Satz und Definition 5.30	73
52	Gleichung (1)	Gleichung (5.10)	73
52	Satz 3	Satz 5.31	73
52	Gleichung (2)	Gleichung (5.11)	73
52	Gleichung (3)	Gleichung (5.12)	74
52	Gleichung (4)	Gleichung (5.13)	74
52	Gleichung (5)	Gleichung (5.14)	74
52	Gleichung (6)	Gleichung (5.15)	74
52	Bemerkung 4	Bemerkung 5.32	74
53	Beispiel 1	Beispiel 5.33	75
53	Gleichung (1)	Gleichung (5.16)	75
53	Gleichung (2)	Gleichung (5.17)	75
53	Bemerkung 2	Bemerkung 5.34	76
53	Gleichung (3)	Gleichung (5.18)	76
54	Beispiel 1	Beispiel 5.35	76
54	Gleichung (1)	Gleichung (5.19)	76
54	Gleichung (2)	Gleichung (5.20)	76
55	??	Abschnitt 5.6	77
55	Satz und Definition 1	Satz und Definition 5.36	77
55	Satz 2	Satz 5.37	77
55	Gleichung (1)	Gleichung (5.21)	78
55	Definition 3	Definition 5.38	78
56	Beispiel 1	Beispiel 5.39	78
56	Beispiel 2	Beispiel 5.40	79
57	Satz 1	Satz 5.41	79
57	Satz 2	Satz 5.42	80
57	Bemerkung 3	Bemerkung 5.43	80
57	Bemerkung 4	Bemerkung 5.44	80
57	Gleichung (1)	Gleichung (5.22)	80
58	??	Abschnitt 6.1	82
58	Satz 1	Satz 6.1	82
58	??	Abschnitt 6.1	82
59	Satz 1	Satz 6.2	83
59	Gleichung (1)	Gleichung (6.1)	83
60	Satz 1	Satz 6.3	84
60	Satz 2	Satz 6.4	84
60	Korollar 3	Korollar 6.5	84
61	??	Abschnitt 6.2	85

Video	Referenz	Skript	Seite
61	Definition 1	Definition 6.6	85
61	Satz 2	Satz 6.7	85
61	Korollar 3	Korollar 6.8	85
61	Definition und Satz 4	Definition und Satz 6.9	85
61	Satz 5	Satz 6.10	85
61	Satz 6	Satz 6.11	86
62	Definition 1	Definition 6.12	86
62	Bemerkung 2	Bemerkung 6.13	86
62	Satz 3	Satz 6.14	87
62	Satz 4	Satz 6.15	87
62	Bemerkung 5	Bemerkung 6.16	87
63	Beispiele 1	Beispiele 6.17	87
64	**??**	Abschnitt 6.3	89
64	Definition und Satz 1	Definition und Satz 6.18	89
64	Satz 2	Satz 6.19	89
64	Gleichung (1)	Gleichung (6.2)	89
64	Korollar 3	Korollar 6.20	90
64	Bemerkung 4	Bemerkung 6.21	90
65	**??**	Abschnitt 6.4	91
65	Definition 1	Definition 6.22	91
65	Bemerkungen und Beispiele 2	Bemerkungen und Beispiele 6.23	91
65	Gleichung (1)	Gleichung (6.3)	91
65	Gleichung (2)	Gleichung (6.4)	92
66	Satz 1	Satz 6.24	92
66	Satz 2	Satz 6.25	92
66	Korollar 3	Korollar 6.26	93
66	Satz 4	Satz 6.27	93
66	Bemerkung 5	Bemerkung 6.28	93
67	Definition 1	Definition 6.29	94
67	Bemerkung und Beispiel 2	Bemerkung und Beispiel 6.30	94
67	Hauptsatz 3	Hauptsatz 6.31	94
68	**??**	Abschnitt 6.5	95
68	Notation 1	Notation 6.32	95
68	Definition 2	Definition 6.33	95
68	Bemerkungen und Beispiele 3	Bemerkungen und Beispiele 6.34	95
68	Bemerkungen und Beispiele 3	Bemerkungen und Beispiele 6.34	95
69	Hilfssatz 1	Hilfssatz 6.35	96
69	Bemerkungen und Beispiele 2	Bemerkungen und Beispiele 6.36	97
69	Satz 3	Satz 6.37	97
69	Gleichung (1)	Gleichung (6.5)	97
70	Hauptsatz 1	Hauptsatz 6.38	98
70	Bemerkung 2	Bemerkung 6.39	98
70	Satz 3	Satz 6.40	98

Video	Referenz	Skript	Seite
70	Bemerkung 4	Bemerkung 6.41	98
71	Hilfssatz 1	Hilfssatz 6.42	99
71	Hilfssatz 2	Hilfssatz 6.43	99
72	Definition 1	Definition 6.44	100
72	Gleichung (1)	Gleichung (6.6)	100
72	Beispiele 2	Beispiele 6.45	100
72	Satz 3	Satz 6.46	100
73	Satz 1	Satz 6.47	101
73	Gleichung (1)	Gleichung (6.7)	101
74	Hilfssatz 1	Hilfssatz 6.48	102
74	Gleichung (1)	Gleichung (6.8)	102
74	Gleichung (2)	Gleichung (6.9)	102
74	Satz 2	Satz 6.49	102
75	Korollar 1	Korollar 6.50	102
75	Bemerkung 2	Bemerkung 6.51	103
76	Satz 1	Satz 6.52	104
76	Gleichung (1)	Gleichung (6.10)	104
76	Gleichung (2)	Gleichung (6.11)	104
77	**??**	Kapitel 7	106
77	**??**	Abschnitt 7.1	106
77	Definition 1	Definition 7.1	106
77	Beispiel 2	Beispiel 7.2	106
77	Bemerkung 3	Bemerkung 7.3	106
78	Satz 1	Satz 7.4	107
78	Beispiel 2	Beispiel 7.5	107
78	Satz 3	Satz 7.6	107
79	Satz 1	Satz 7.7	108
79	Definition 2	Definition 7.8	108
79	Beispiel 3	Beispiel 7.9	108
80	Hilfssatz 1	Hilfssatz 7.10	109
80	Satz 2	Satz 7.11	109
81	Definition und Satz 1	Definition und Satz 7.12	110
81	Korollar 2	Korollar 7.13	111
81	Satz 3	Satz 7.14	111
82	Definition 1	Definition 7.15	112
82	Beispiel 2	Beispiel 7.16	112
82	Bemerkung 3	Bemerkung 7.17	112
82	Lemma 4	Lemma 7.18	112
83	Satz 1	Satz 7.19	112
83	Gleichung (1)	Gleichung (7.1)	113
83	Gleichung (2)	Gleichung (7.2)	113
84	Satz 1	Satz 7.20	114
84	Hilfssatz 2	Hilfssatz 7.21	114

Video	Referenz	Skript	Seite
85	Satz 1	Satz 7.22	115
85	Gleichung (1)	Gleichung (7.3)	115
86	Korollar 1	Korollar 7.23	116
86	Beispiel 2	Beispiel 7.24	116
86	Gleichung (1)	Gleichung (7.4)	116
86	Gleichung (2)	Gleichung (7.5)	116
87	**??**	Abschnitt 7.3	117
87	Definition 1	Definition 7.25	117
87	Definition und Satz 2	Definition und Satz 7.26	117
87	Beispiel 3	Beispiel 7.27	117
87	Definition 4	Definition 7.28	117
87	Beispiel 5	Beispiel 7.29	117
88	Satz 1	Satz 7.30	118
89	Beispiel 1	Beispiel 7.31	120
89	Satz 2	Satz 7.32	120
90	Satz 1	Satz 7.33	121
90	Gleichung (1)	Gleichung (7.6)	121
90	Beispiel 2	Beispiel 7.34	122
91	Hilfssatz 1	Hilfssatz 7.35	122
91	Gleichung (1)	Gleichung (7.7)	122
91	Gleichung (2)	Gleichung (7.8)	122
92	Hauptsatz 1	Hauptsatz 7.36	122
93	Bemerkung 1	Bemerkung 7.37	123
93	Beispiel 2	Beispiel 7.38	124
93	Gleichung (1)	Gleichung (7.9)	124
94	**??**	Abschnitt 7.4	125
94	Definition 1	Definition 7.39	125
94	Gleichung (1)	Gleichung (7.10)	125
94	Gleichung (2)	Gleichung (7.11)	125
94	Satz und Definition 2	Satz und Definition 7.40	125
94	Gleichung (3)	Gleichung (7.12)	125
94	Gleichung (4)	Gleichung (7.13)	125
94	Bemerkung 3	Bemerkung 7.41	125
95	Satz 1	Satz 7.42	126
95	Gleichung (1)	Gleichung (7.14)	126
95	Gleichung (2)	Gleichung (7.15)	126
95	Gleichung (3)	Gleichung (7.16)	126
96	Satz 1	Satz 7.43	127
96	Gleichung (1)	Gleichung (7.17)	127
96	Gleichung (2)	Gleichung (7.18)	127
96	Gleichung (3)	Gleichung (7.19)	128
97	Hauptsatz 1	Hauptsatz 7.44	128
97	Gleichung (1)	Gleichung (7.20)	128

Video	Referenz	Skript	Seite
97	Gleichung (2)	Gleichung (7.21)	128
97	Gleichung (3)	Gleichung (7.22)	129
97	Gleichung (4)	Gleichung (7.23)	129
97	Gleichung (5)	Gleichung (7.24)	129
97	Gleichung (6)	Gleichung (7.25)	129
98	Gleichung (1)	Gleichung (7.26)	131
98	Gleichung (2)	Gleichung (7.27)	131
98	Gleichung (3)	Gleichung (7.28)	132
98	Gleichung (4)	Gleichung (7.29)	133