Posgrado de la UNAM
Maestría en ciencias matemáticas

Curso Avanzado de Análisis

El Grado Topológico en Análisis No Lineal

Nils Ackermann

2011-2

Índice general

1. Introducción

1.1. Imágenes y Puntos Fijos

Una pregunta que aparece en muchas situaciones es esta: Dado un espacio vectorial X, un subconjunto $A \subseteq X$, una función $f\colon A \to X$ y un punto $y \in X$, ¿existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$? Equivalentemente, ¿se cumple $y \in \mathcal{R}(f)$, donde $\mathcal{R}(f) := f(A)$ es el *rango de* f? Otra formulación equivalente es buscar ceros de la función $x \mapsto f(x) - y$.

1.1 Definición. Llamamos $x \in A$ tal que $f(x) = y$ un *punto* y de f.

1.2 Ejemplos. (a) Dado $g\colon A \to A$, buscamos un punto fijo de g, es decir un $x \in A$ que cumple $g(x) = x$. Para resolver este problema definimos $f\colon A \to X$ por $f(x) := g(x) - x$ y buscamos un cero de f.

(b) Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable continuamente. Consideramos una ecuación diferencial ordinaria con valores en la frontera para funciones $u(t)$ definidas sobre $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que existe una función continua $k(s, t)$ tal que $u(t)$ es una solución de (1.1) si y solo si $u \in C^2([0, 1])$ y

$$u(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t, u(t), \dot{u}(t))\, \mathrm{d}t \qquad \text{para todo } s \in [0, 1]. \tag{1.2}$$

Ponemos $X := C^2([0, 1])$ y definimos $F\colon X \to X$ por

$$F(u)(s) := \int_0^1 k(s, t) f(t, u(t), \dot{u}(t))\, \mathrm{d}t.$$

Por (1.2) u es una solución de (1.1) si y solo si u es un punto fijo de F.

(c) Similarmente se pueden buscar soluciones de ecuaciones parciales elípticas: Suponemos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, y buscamos soluciones de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u(x), \nabla u(x)), && x \in \Omega \\ u(x) &= 0, && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

(d) Los ejemplos anteriores utilizaban la formulación como problemas de punto fijo. Mas generalmente nos interesa la existencia de mas que una solución para estos problemas. Para eso necesitamos una teoría mas fina.

1.2. El Grado en Dimensión Uno

En Dimensión uno el grado topológico nada mas es una codificación del teorema del valor intermedio. La topología del $\mathbb{R}$ es muy simple, y por eso el grado no da nada nuevo. Pero como es muy fácil definirlo, lo haremos para ver que es la idea detrás de esta teoría. En dimensiones altas uno puede ver el grado topológico como una generalización del teorema del valor intermedio.

Sean $a < b$, $\Omega := (a, b)$ y $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $0 \in \mathbb{R}\backslash f(\partial\Omega)$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, 0) := \begin{cases} 0, & f(a)f(b) > 0, \\ 1, & f(a)f(b) < 0,\ f(a) < 0, \\ -1, & f(a)f(b) < 0,\ f(a) > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $y \in \mathbb{R}\backslash f(\partial\Omega)$, entonces $f(a) - y \neq 0$ y $f(b) - y \neq 0$, es decir, $0 \in \mathbb{R}\backslash(f - y)(\partial\Omega)$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f - y, \Omega, 0).$$

Se demuestra fácilmente que en esta situación se cumplen:

(i) $\deg(\mathrm{id}, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$,

(ii) $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$ si $c \in (a, b)$, $\Omega_1 = (a, c)$, $\Omega_2 = (c, b)$ y $y \neq f(c)$.

Para resolver la cuestión de la existencia de un punto y, la siguiente consecuencia del teorema del valor intermedio es básico:

3. si $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, entonces f tiene punto y en Ω.

El inciso (ii) da una localización del punto y en Ω: Si $f(c) \neq y$, si conocemos $\deg(f, \Omega, y)$ y $\deg(f, \Omega_1, y)$, y si $\deg(f, \Omega_2, y) = \deg(f, \Omega, y) - \deg(f, \Omega_1, y) \neq 0$, entonces existe un punto y en Ω_2.

Otra propiedad es la *invariancia bajo homotopías* del grado:

4. $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ no depende de t si $h \in C([0, 1] \times \overline{\Omega})$ y $y \in C([0, 1])$ son tales que $y(t) \in \mathbb{R}\backslash h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Es esta situación la función h se llama una *homotopía*. Se puede entender como una deformación continua entre las funciones $h(0, \cdot)$ y $h(1, \cdot)$ en $C(\overline{\Omega})$.

La propiedad 4 se demuestra así: Para calcular el grado en cada t ponemos $H(t, x) := h(t, x) - y(t)$ para $(t, x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega}$. Entonces $H(t, x) \neq 0$ para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Como la función $t \mapsto H(t, a)$ es continua, no cambia del signo (teorema del valor intermedio). Lo mismo se cumple para la función $t \mapsto H(t, b)$. Entonces el grado $\deg(H(t, \cdot), \Omega, 0)$ es independiente de t porque solo depende de los signos de $H(t, a)$ y $H(t, b)$. Utilizando $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) = \deg(H(t, \cdot), \Omega, 0)$, hemos probado la afirmación.

Mas generalmente, definimos el grado para un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ que es abierto y acotado. En este caso Ω consiste de un conjunto numerable de distintas componentes conexas $\Omega_n = (a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $a_n, b_n \notin \Omega$). Es claro que $|a_n - b_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ porque Ω es acotado. Sea $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continuo tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Demostremos que solo para un número finito de índices n se cumple $\deg(f, \Omega_n, 0) \neq 0$: Sea n_k una sucesión infinita de índices tal que $\deg(f, \Omega_{n_k}, 0) \neq 0$. Como Ω es acotado y como $a_{n_k}, b_{n_k} \in \partial\Omega$, pasando a una subsucesión existe $x \in \partial\Omega$ tal que $a_{n_k}, b_{n_k} \to x$. Por eso $f(x) \neq 0$ y $f(a_{n_k})f(b_{n_k}) > 0$ para k suficientemente grande. En consecuencia, $\deg(f, \Omega_{n_k}, 0) = 0$ para k suficientemente grande. ¡Contradicción!

Ahora definimos

$$\deg(f, \Omega, 0) := \sum_{n=1}^{\infty} \deg(f, \Omega_n, 0).$$

Como antes, para $y \in \mathbb{R} \backslash f(\partial\Omega)$ definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f - y, \Omega, 0).$$

Se puede demostrar que este grado mas general tiene propiedades similares a los del grado en un intervalo. Este grado tiene rango $\mathbb{Z}$, es decir, para todo $m \in \mathbb{Z}$ existe $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega})$ y $y \in \mathbb{R} \backslash f(\partial\Omega)$ tal que $\deg(f, \Omega, y) = m$.

1.3. El Grado en Dimensión Dos

En dimensión dos identifiquemos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$. Por el momento definimos el grado sólo en el caso especial de una bola: $\Omega := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ (la bola abierta con centro 0 y radio 1), $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ y $y \in \mathbb{C} \backslash f(\partial\Omega)$. Utilizamos el ciclo $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{C})$ dado por $\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Entonces $\partial\Omega = \mathcal{R}(\gamma)$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z - y} \, \mathrm{d}z. \tag{1.4}$$

El integral es el numero de giro del ciclo $f \circ \gamma$ respecto a y. Con las propiedades del número de giro uno demuestra que se cumplen los incisos (i) y 3 de la sección anterior, y que se cumple 4 si h y y son diferenciables continuamente.

1.3 Ejemplo. Definimos $\varphi_n \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ por $\varphi_n(z) := z^n$, donde $n \in \mathbb{N}_0$, y calculamos el grado de φ_n respecto a $y = 0$. Tenemos $(\varphi_n \circ \gamma)(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} n t)$. En consecuencia,

$$\deg(\varphi_n, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\varphi_n\circ\gamma} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{2\pi\mathrm{i} n \exp(2\pi\mathrm{i} n t)}{\exp(2\pi\mathrm{i} n t)} \, \mathrm{d}t = n.$$

2. Construcción del Grado

En esta sección demostraremos que existe una y sólo una aplicación «deg», el grado topológico, que asigna un numero entero a triples de un conjunto abierto acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, una función continua $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$ y que tiene las siguientes propiedades:

(D1) $\deg(\mathrm{id}, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$,

(D2) $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$ si Ω_1, Ω_2 son subconjuntos abiertos ajenos de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$,

(D3) $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in J := [0, 1]$ si $h\colon J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ es continuo, $y\colon J \to \mathbb{R}^N$ es continuo y $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$.

2.1. Herramientas

Antes de empezar necesitamos que establecer notación y recapitular algunos conceptos topológicos.

2.1.1. Conceptos Topológicos y Espacios de Funciones

Denotemos $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^\pm := \mathbb{R}^\pm \cup \{0\}$ y $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para el resto de esta sección sean X, Y espacios métricos, con métricas d_X y d_Y. Normalmente omitimos el índice en la métrica.

Notación. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Definimos

$$\begin{aligned}
B_r(x) &:= B_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) < r \,\}, && \textit{bola abierta,} \\
\overline{B}_r(x) &:= \overline{B}_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) \le r \,\}, && \textit{bola cerrada,} \\
S_r(x) &:= S_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) = r \,\}, && \textit{esfera.}
\end{aligned}$$

2.1 Recapitulación. El producto $X \times Y$ tiene una métrica natural, definida por

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2). \tag{2.1}$$

Convergencia de $((x_n, y_n))$ en $X \times Y$ es equivalente a convergencia simultánea de (x_n) en X y (y_n) en Y. Si X y Y son compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.

2.2 Recapitulación. La desigualdad

$$(2.2) \qquad |d(x,y) - d(u,v)| \le d(x,u) + d(y,v) = d_{X\times X}((x,y),(u,v)), \qquad x,y,u,v \in X,$$

implica que la métrica de X es Lipschitz continua como aplicación del espacio métrico $X \times X$ en $\mathbb{R}$.

2.3 Recapitulación. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación. f es *continua uniformemente* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \le \varepsilon$ para todo $x, y \in X$ que cumplen $d(x,y) \le \delta$.

Sean X compacto y $f\colon X \to Y$ continuo. Entonces f es continuo uniformemente.

2.4 Definición. Sean $f, g\colon X \to Y$ continuos. Para $J := [0,1]$ sea $h\colon J \times X \to Y$ continuo y tal que $h(0,x) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$ para todo $x \in X$ (i.e., $h(0,\cdot) = f$ y $h(1,\cdot) = g$). Entonces h se llama una *homotopía entre f y g*.

2.5 Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* sobre E es una aplicación $E \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \|x\|$ que satisface

(i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in E$,

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

La pareja $(E, \|\cdot\|)$ se llama un *espacio vectorial normado*. La norma induce una métrica $d(x,y) := \|x - y\|$ sobre E. Si (E, d) es un espacio métrico **completo**, entonces se dice que $(E, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach*.

2.6 Proposición. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces se cumplen:*

(a) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\|$ *para todo $x, y \in E$,*

(b) la norma es una aplicación continua,

(c) la suma en E y la multiplicación por un escalar son aplicaciones continuas.

2.7 Nota. La propiedad 2.6(c) significa esto: Si $x_n \to x$, $y_n \to y$ en E, y si $\alpha_n \to \alpha$ en $\mathbb{R}$, entonces $x_n + y_n \to x + y$ y $\alpha_n x_n \to \alpha x$ en E.

2.8 Definición. Sea E un espacio normado. $A \subseteq E$ es *acotado* si $\sup_{x\in A}\|x\| < \infty$.

2.9 Definición. Sean X un espacio métrico y E un espacio de Banach.

$$C(X,E) := \{\, u\colon X \to E \mid u \text{ es continuo} \,\},$$
$$C_{\mathrm{B}}(X,E) := \{\, u\colon X \to E \mid u \text{ es continuo y } u(X) \text{ es acotado} \,\}.$$

El espacio $C_{\mathrm{B}}(X,E)$ con la norma

$$\|u\|_{C_{\mathrm{B}}(X,E)} := \|u\|_{C(X,E)} := \|u\|_\infty := \sup_{x\in X}\|u(x)\|_E$$

es un espacio de Banach. Si $E=\mathbb{R}$, entonces escribimos $C(X)$ y $C_{\mathrm{B}}(X)$ en lugar de $C(X,\mathbb{R})$ y $C_{\mathrm{B}}(X,\mathbb{R})$.

2.10 Nota. Si X es compacto, entonces $C(X,E)=C_{\mathrm{B}}(X,E)$.

Notación. Siempre suponemos que $N\in\mathbb{N}$. Denotemos elementos $x\in\mathbb{R}^N$ como

$$x=(x^1,x^2,\dots,x^N)^T := \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^N\end{pmatrix},$$

denotemos el producto escalar en $\mathbb{R}^N$ por

$$x_1\cdot x_2 := x_1^T x_2 = \sum_{k=1}^N x_1^k x_2^k,$$

y la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^N$ por

$$|x| := \sqrt{x\cdot x} = \left(\sum_{k=1}^N (x^k)^2\right)^{1/2}.$$

Con esta norma $\mathbb{R}^N$ es un espacio de Banach.

Usamos $\{\,e_1,e_2,\dots,e_N\,\}\subseteq\mathbb{R}^N$, donde $e_k^i=\delta_{ki}$, como base canónica de $\mathbb{R}^N$.

Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ el espacio lineal de los operadores lineales entre $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$.

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ abierto. Si $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^M$ es *diferenciable en* $x\in\Omega$, entonces denotamos por $\mathrm{D}f(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ su derivada. Decimos que f *es diferenciable en* Ω si f es diferenciable en todo $x\in\Omega$.

Si $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ es diferenciable, denotemos por $\partial_i f := \partial f/\partial x^i$ la derivada parcial en la dirección de x^i. Para $n\in\mathbb{N}_0$ decimos que f es *diferenciable continuamente n veces en* Ω si existen las derivadas parciales del orden n en Ω y si son continuas.

2.11 Definición. Sean $M,N\in\mathbb{N}$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ abierto. Definimos para $n\in\mathbb{N}_0$

$$C^n(\Omega,\mathbb{R}^M) := \{\,u\colon\Omega\to\mathbb{R}^M \mid u \text{ es diferenciable continuamente } n \text{ veces en } \Omega\,\},$$

$$C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^M) := \bigcap_{n=1}^\infty C^n(\Omega,\mathbb{R}^M).$$

2.1.2. Extensiones

Sean X, Y conjuntos, $A \subseteq X$, $f\colon A \to Y$, $g\colon X \to Y$. Llamemos a g una *extensión de f a X* si $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

2.12 Lema. *Sean X, Y espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f\colon A \to Y$ continua. Supongamos que para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$ que converge en X se cumple que $f(x_n)$ converge en Y. Entonces f tiene una y sólo una extensión continua g a $\overline{A}$.*

Demostración. Para cada punto $x^* \in \overline{A}$ existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x^*$ cuando $n \to \infty$. Sean $x^* \in \overline{A}$ y $(x_n), (y_n) \subseteq A$ tales que $x_n \to x^*$ y $y_n \to x^*$ cuando $n \to \infty$. La hipótesis dice que $f(x_n)$ y $f(y_n)$ convergen. Definimos $(z_n) \subseteq A$ por $z_{2k-1} = x_k$ y $z_{2k} = y_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces $z_n \to x^*$ y $f(z_n)$ converge en Y. En consecuencia, $f(x_n)$ y $f(y_n)$ convergen al mismo punto en Y. Podemos definir una extensión $g\colon \overline{A} \to Y$ de f a $\overline{A}$ por

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(x) & x \in \overline{A} \setminus A. \end{cases}$$

Falta demostrar que g es continuo: Sean $x^* \in \overline{A}$ y $(x_n) \subseteq \overline{A}$ tal que $x_n \to x^*$. Con la definición de g elegimos $y_n \in \overline{B}_{1/n}(x_n) \cap A$ tal que $d(g(x_n), f(y_n)) \leq 1/n$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d(x^*, y_n) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, y_n) \leq d(x^*, x_n) + \frac{1}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. En consecuencia, $f(y_n) \to g(x^*)$ y

$$d(g(x_n), g(x^*)) \leq d(g(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), g(x^*)) \leq \frac{1}{n} + d(f(y_n), g(x^*)) \to 0$$

cuando $n \to \infty$, es decir, g es continuo en x^*. $\square$

2.13 Lema. *Sean X, Y espacios métricos, y sea $\{A_k\}_{k=1}^n$ una familia finita de subconjuntos cerrados de X que cubren X. Supongamos que existen aplicaciones continuas $f_k\colon A_k \to Y$ tales que $f_k(x) = f_l(x)$ si $x \in A_k \cap A_l$. Definimos $f\colon X \to Y$ por $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Entonces f es continuo.*

Demostración. Sean $x^* \in X$ y $(x_n) \subseteq X$ una sucesión que converge a x^*. Razonando por contradicción, supongamos que $f(x_n) \not\to f(x^*)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$d(f(x_n), f(x^*)) \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } n. \tag{2.3}$$

Otra vez pasando a una subsucesión, podemos suponer que existe k tal que $(x_n) \subseteq A_k$. Como A_k es cerrado y como $x_n \to x^*$ en X, también $x^* \in A_k$. En consecuencia, $f(x_n) = f_k(x_n) \to f_k(x^*) = f(x^*)$ porque f_k es continuo. ¡Contradicción con (2.3)! $\square$

2.14 Proposición. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *compacto y no vacío,* E *un espacio de Banach, y* $f\colon A \to E$ *continuo. Entonces existe una extensión continua* g *de* f *a* $\mathbb{R}^N$*.*

Demostración. Definimos la distancia de $x \in \mathbb{R}^N$ al conjunto A:

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y|.$$

Como A es cerrado se verifica que $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in A$. Demostremos que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua: Fijamos $x, y \in \mathbb{R}^N$. Para todo $z \in A$ se cumple

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Variando z sobre A y tomando el ínfimo respecto a z en ambos lados se sigue que

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq |x - y| + \operatorname{dist}(y, A),$$

y la misma desigualdad con x y y intercambiado. Entonces obtenemos

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq |x - y|, \tag{2.4}$$

implicando la afirmación.

Vamos a construir una sucesión densa (a_n) en A (es decir, $\overline{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = A$). Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una enumeración de $\mathbb{Q}^N$. Definimos el conjunto numerable

$$\mathcal{I} := \{\, (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid B_{1/l}(x_k) \cap A \neq \varnothing \,\}$$

y escogemos una aplicación de selección $\eta\colon \mathcal{I} \to A$ tal que $\eta(k, l) \in B_{1/l}(x_k) \cap A$. La imagen $\eta(\mathcal{I})$ es un subconjunto numerable de A. Falta demostrar que $\eta(\mathcal{I})$ es denso en A: Sean $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Demostremos que existen $k, l \in \mathbb{N}$ tal que $|\eta(k, l) - x| \leq \varepsilon$. Podemos suponer que

$$\varepsilon \leq 3/2. \tag{2.5}$$

Escogemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_{\varepsilon/3}(x)$ (eso es posible porque $\mathbb{Q}^N$ es denso en $\mathbb{R}^N$) y $l \in [3/(2\varepsilon), 3/\varepsilon] \cap \mathbb{N}$. Esta intersección no es vacía por (2.5). Como $|x - x_k| < \varepsilon/3 \leq 1/l$ y $x \in A$, se sigue que $(k, l) \in \mathcal{I}$. Entonces $|\eta(k, l) - x| \leq |\eta(k, l) - x_k| + |x_k - x| < 1/l + \varepsilon/3 \leq \varepsilon$ y concluimos. Ahora escribimos $\eta(\mathcal{I}) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definimos

$$\varphi_n(x) := \max\left\{ 2 - \frac{|x - a_n|}{\operatorname{dist}(x, A)}, 0 \right\} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^N \backslash A.$$

Como $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ si $x \notin A$, $\varphi_n\colon \mathbb{R}^N \backslash A \to \mathbb{R}$ es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\varphi_n(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash A$ y $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in \mathbb{R}^N \backslash A$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x - a_n| \leq 3 \operatorname{dist}(x, A)/2$ por la densidad de (a_n). En consecuencia, obtenemos:

(2.6) Para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(x) > 0$.

La series $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_n(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}^N\backslash A$ y es positiva, por (2.6). En seguida, las funciones

$$\psi_n(x) := \frac{2^{-n}\varphi_n(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi_k(x)}$$

son continuas en $\mathbb{R}^N\backslash A$ y cumplen $\psi_n(x) \in [0,1]$ para todo n. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N\backslash A. \tag{2.7}$$

Definimos

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f(a_n), & x \in \mathbb{R}^N\backslash A. \end{cases}$$

Como A es compacto y f continuo,

$$C := \max\left\{ \sup_{x\in A} \|f(x)\|_E,\ 1 \right\} < \infty.$$

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N\backslash A$ compacto. Por continuidad y positividad de $\sum 2^{-n}\varphi_n$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum 2^{-n}\varphi_n(x) \geq \delta$ para todo $x \in K$. Para $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que para $l \geq k \geq k_0$ se tiene que

$$\sum_{n=k+1}^{l} 2^{-n} \leq \frac{\delta\varepsilon}{C}.$$

Por lo tanto, usando la definición de ψ_n y $\varphi_n \in [0,1]$, tenemos para $l \geq k \geq k_0$

$$\left\| \sum_{n=k+1}^{l} \psi_n(x) f(a_n) \right\|_E \leq \sum_{n=k+1}^{l} \psi_n(x) \|f(a_n)\|_E \leq \frac{C}{\delta} \sum_{n=k+1}^{l} 2^{-n} \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in K,$$

es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f(a_n)$ es de Cauchy en E, uniformemente en $x \in K$. Como E es completo, la series converge, uniformemente en K.

Eso demuestra que g está bien definido y continuo en $\mathbb{R}^N\backslash A$. Falta demostrar que g es continuo en todo $\mathbb{R}^N$. Es suficiente demostrar que

$$\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\in\mathbb{R}^N\backslash A}} g(x) = f(x^*) \qquad \text{para } x^* \in A, \tag{2.8}$$

porque en ese caso el Lema 2.12 dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f(a_n)$ tiene una extensión continua a $\overline{\mathbb{R}^N\backslash A}$, que coincide con f en $A \cap \overline{\mathbb{R}^N\backslash A}$. El Lema 2.13 implica que g es continuo.

Supongamos que $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x^*; A)) \subseteq B_\varepsilon(f(x^*))$. Fijamos $x \in \mathbb{R}^N\backslash A$ tal que $|x - x^*| \leq \delta/3$. Si $a_n \in A\backslash B_\delta(x^*)$ entonces

$$\frac{|x - a_n|}{\operatorname{dist}(x, A)} \geq \frac{|a_n - x^*| - |x^* - x|}{|x^* - x|} \geq \frac{\delta - \delta/3}{\delta/3} = 2.$$

En consecuencia, $\psi_n(x) = 0$. Si $a_n \in B_\delta(x^*)$, entonces $\|f(x^*) - f(a_n)\|_E \leq \varepsilon$. Hemos probado que

$$\psi_n(x)\|f(x^*) - f(a_n)\|_E \leq \varepsilon\psi_n(x) \qquad \text{para todo } x \in B_{\delta/3}(x^*)\backslash A,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Con eso concluimos: Sea $x \in B_{\delta/3}(x^*)\backslash A$. Entonces (2.7) y (2.9) implican que

$$\begin{aligned}\|f(x^*) - g(x)\| &= \left\|f(x^*) - \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)f(a_n)\right\|_E = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)(f(x^*) - f(a_n))\right\|_E \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\|f(x^*) - f(a_n)\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Esa desigualdad compruebe (2.8). □

2.15 Nota. En la demostración anterior tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x) = 1$ y $\psi_n \geq 0$. En consecuencia, la definición de g implica que $g(\mathbb{R}^N) \subseteq \operatorname{conv}(f(A))$ (véase la tarea Nº2).

2.1.3. Regularización

2.16 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Si $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^M)$, entonces llamamos

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{\, x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0 \,\}} \cap \Omega$$

el *soporte* de f. Definimos para $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}C_c^n(\Omega) &:= \{\, u \in C^n(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto} \,\} \\ C_c^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_c^n(\Omega).\end{aligned}$$

Para un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, una función $u \in C^1(\Omega)$ y una función $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ el producto $\varphi u \in C_c^1(\Omega)$. Extendemos φu a $\mathbb{R}^N$ por 0 y obtenemos $\varphi u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Se sigue que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(\varphi u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_i(\varphi u)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u\partial_i\varphi + \varphi\partial_i u)\,\mathrm{d}x$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. De esto sigue una fórmula de integración parcial:

$$\int_\Omega u\partial_i\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i u\,\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.10}$$

2.17 Definición. Fijando $N \in \mathbb{N}$ definimos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta \, \mathrm{d}x = 1$. Para $\delta > 0$ definimos

$$\eta_\delta(x) := \frac{1}{\delta^N} \eta\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Se sigue que $\eta_\delta \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N)$, que

$$\operatorname{supp}(\eta_\delta) = \overline{B}_\delta(0), \tag{2.11}$$

y que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\delta \, \mathrm{d}x = 1 \tag{2.12}$$

para todo $\delta > 0$. Las funciones η_δ forman una familia de *regularizadores* (*mollifiers* en inglés).

2.18 Proposición. *Sea $u \in C(\mathbb{R}^N)$. Para $\delta > 0$ definimos la regularización $u_\delta \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de u por*

$$u_\delta(x) := (\eta_\delta * u)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\delta(x-y)u(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\overline{B}_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)u(y) \, \mathrm{d}y. \tag{2.13}$$

Entonces u_δ tiene las siguientes propiedades:

(i) $u_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

(ii) *u_δ converge uniformemente a u en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ cuando $\delta \to 0$,*

(iii) *si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto y si u es diferenciable continuamente en Ω entonces $\partial_i u_\delta$ converge uniformemente a $\partial_i u$ en subconjuntos compactos de Ω cuando $\delta \to 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, N$.*

Demostración. **(i)** Fijamos $i \in \{ 1, 2, 3, \ldots, N \}$, $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Para $0 < |t| \leq \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{u_\delta(x + te_i) - u_\delta(x)}{t} &- \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \eta_\delta(x-y)u(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\overline{B}_{2\delta}(x)} \left(\frac{\eta_\delta(x + te_i - y) - \eta_\delta(x-y)}{t} - \partial_i \eta_\delta(x-y) \right) u(y) \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\eta_\delta \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^N)$, tenemos que $\|\partial_i \eta_\delta\|_\infty < \infty$. Además, $u \in L^1(B_{2\delta}(x))$. El teorema del valor medio y el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada implican que el lado derecho de (2.14) tiende a 0 cuando $t \to 0$, es decir, u_δ es diferenciable parcialmente en x^i y

$$\partial_i u_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \eta_\delta(x-y)u(y) \, \mathrm{d}y. \tag{2.15}$$

Demostremos que para $i = 1, 2, \dots, N$ la función $\partial_i u_\delta$ es continua. Sea $x_n \to x$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^N$. Se tiene

$$\begin{aligned} |\partial_i u_\delta(x_n) - \partial_i u_\delta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_i \eta_\delta(x_n - y) - \partial_i \eta_\delta(x - y)) u(y) \, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\overline{B}_{2\delta}(x)} |\partial_i \eta_\delta(x_n - y) - \partial_i \eta_\delta(x - y)| \, |u(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por la continuidad de $\partial_i \eta_\delta$ y u, y por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Los dos hechos que acabamos de demostrar demuestran la diferenciabilidad continua de u_δ.

Sólo hemos usado $u_\delta = \eta_\delta * u$, $\eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\operatorname{supp}(\eta_\delta) = \overline{B}_\delta(0)$. Tenemos $\partial_i u_\delta = \partial_i \eta_\delta * u$, $\partial_i \eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\operatorname{supp}(\partial_i \eta_\delta) = \overline{B}_\delta(0)$. En seguida, podemos aplicar los mismos argumentos para obtener que $\partial_i u_\delta$ es diferenciable en $\mathbb{R}^N$. Por inducción se tiene la afirmación.

(ii) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto. Escojamos $\delta_0 > 0$ y definimos

$$\overline{B}_{\delta_0}(K) := \{ x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta_0 \}.$$

Como $\overline{B}_{\delta_0}(K)$ es compacto y u continuo, u es continuo uniformemente en este conjunto. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que

$$\forall \delta \in (0, \delta_1] \, \forall x, y \in \overline{B}_{\delta_0}(K) \colon (|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon). \tag{2.16}$$

Utilizando la propiedad (2.12) se sigue para $\delta \in (0, \delta_1]$ y $x \in K$ que

$$|u_\delta(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\delta(x - y)(u(y) - u(x)) \, \mathrm{d}y \right| \leq \int_{\overline{B}_\delta(x)} \eta_\delta(x - y) |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}y \leq \varepsilon$$

porque $\overline{B}_\delta(x) \subseteq \overline{B}_{\delta_0}(K)$, y de nuevo por (2.12). En consecuencia, $\|u_\delta - u\|_{C(K)} \leq \varepsilon$ para $\delta \in (0, \delta_1]$. Eso implica la afirmación.

(iii) Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Existe $\delta_0 > 0$ tal que $\overline{B}_{\delta_0}(K) \subseteq \Omega$. Como $\overline{B}_{\delta_0}(K)$ es compacto, $\partial_i u$ es continuo uniformemente en este conjunto. Utilizando (2.12) y integración parcial como en (2.10) (observando el signo de y en el argumento de η_δ) obtenemos para $\delta \in (0, \delta_0]$ y $x \in K$ que

$$\begin{aligned} |\partial_i u_\delta(x) - \partial_i u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \eta_\delta(x - y) u(y) \, \mathrm{d}y - \partial_i u(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\delta(x - y) \partial_i u(y) \, \mathrm{d}y - \partial_i u(x) \right| \\ &= \left| \int_{\overline{B}_\delta(x)} \eta_\delta(x - y)(\partial_i u(y) - \partial_i u(x)) \, \mathrm{d}y \right|. \end{aligned}$$

Concluyamos como en la demostración de (ii). □

2.1.4. El Lema de Sard

2.19 Definición. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ diferenciable continuamente entonces llamemos $J_f(x) := \det \mathrm{D}f(x)$ el *Jacobeano de f en x*. Si $J_f(x) = 0$ entonces x es un *punto crítico de f*. Si $J_f(x) \neq 0$ entonces x es un *punto regular de f*. Escribimos $K_f(\Omega) := \{\, x \in \Omega \mid J_f(x) = 0 \,\}$, y escribimos K_f si no hay posibilidad de equivocarse en que es Ω. Decimos que $y \in \mathbb{R}^N$ es un *valor regular* de $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ si $f^{-1}(y) \cap K_f(\Omega) = \varnothing$, y un *valor singular* en caso contrario.

2.20 Lema. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, e $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Si y es un valor regular de f entonces $f^{-1}(y)$ es finito.*

Demostración. $K := f^{-1}(y) \subseteq \Omega$ es compacto porque f es continuo y Ω acotado. Razonando por contradicción supongamos que K es infinito. Entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq K$ tal que $x_m \neq x_n$ si $m \neq n$. Como K es compacto podemos suponer que existe $x \in K$ y $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Como y es regular, el teorema de la función inversa implica que existen vecindades abiertas U de x y V de y tal que $f|U$ es una biyección entre U y V, es decir, $U \cap K = \{x\}$. ¡Contradicción a $x_n \to x$ en K! $\square$

2.21 Definición. Si $a_k \leq b_k$ para $k = 1, 2, \ldots, N$ entonces $K := \prod_{k=1}^N [a_k, b_k]$ es un *ladrillo (paralelepípedo rectangular) de dimensión N con volumen* $|K| := \prod_{k=1}^N (b_k - a_k)$. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *tiene medida de Lebesgue* 0 *en* $\mathbb{R}^N$, sucinto $|A| = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una cubierta numerable de A por ladrillos de dimensión N con volumen total $\leq \varepsilon$. Esta definición no depende de la base ortonormal de $\mathbb{R}^N$.

2.22 Lema. *(a) Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cumple $|A| = 0$ entonces $\mathbb{R}^N \backslash A$ es denso en $\mathbb{R}^N$.*

(b) Una unión numerable de conjuntos con medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^N$ tiene medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. **(a)** Razonando por contradicción, supongamos que $\mathbb{R}^N \backslash A$ no es denso en $\mathbb{R}^N$, es decir, existe $x \in A$ y $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x) \subseteq A$. Como toda cubierta de A por ladrillos de dimensión N también cubre $\overline{B}_r(x)$, el volumen total de los ladrillos de la cubierta es por lo menos el volumen de la bola $\overline{B}_r(x)$. ¡Contradicción!

(b) Sea $\{\, A_n \,\}_{n=1}^\infty$ una familia de conjuntos con $|A_n| = 0$ para todo n. Para $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ encontramos una cubierta de A_n por ladrillos de dimensión N con volumen total $\leq 2^{-n}\varepsilon$. El volumen total de la unión de todos ladrillos, que forma una cubierta de $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, es $\leq \varepsilon$. $\square$

2.23 Recapitulación. Sea $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ un operador lineal. Entonces L es una aplicación continua. Definimos

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)} := \max_{x \in \overline{B}_1 \mathbb{R}^N} |Lx|. \tag{2.17}$$

Con esta norma $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) \simeq \mathbb{R}^{M\times N}$ es un espacio de Banach. Además, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ se cumple que

$$|Lx| \leq \|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)}|x|. \tag{2.18}$$

2.24 Proposición (Lema de Sard)**.** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Entonces* $|f(K_f)| = 0$*.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{Q} := \left\{ \prod_{k=1}^{N} \left[x^k - \frac{1}{2n}, x^k + \frac{1}{2n}\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ nx \in \mathbb{Z}^N \right\}.$$

Entonces $\mathcal{Q}$ es una familia numerable de cubos cerrados cubriendo $\mathbb{R}^N$. Ponemos

$$\mathcal{R} := \{\, Q \in \mathcal{Q} \mid Q \subseteq \Omega \,\}.$$

Es claro que $\mathcal{R}$ es numerable y cubre Ω. Por eso y por el Lema 2.22 es suficiente demostrar que $|f(K_f \cap Q)| = 0$ para todo $Q \in \mathcal{R}$.

Supongamos que $Q \in \mathcal{R}$ es un cubo de longitud $r > 0$ de un lado. Como f es diferenciable continuamente en una vecindad de Q podemos definir $C_1 := \max_{x\in Q}\|\mathrm{D}f(x)\|$.

Sea $\varepsilon \in (0, 1]$. Es suficiente cubrir $f(Q\cap K_f)$ por ladrillos de volumen total $\leq C_2\varepsilon$ donde C_2 no depende de ε. Como $\mathrm{D}f$ es continuo y Q es compacto, $\mathrm{D}f$ es continuo uniformemente en Q. Existe $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que con $\delta(\varepsilon) := \sqrt{N}\, r/m(\varepsilon)$ se cumple:

$$\|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(y)\| \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } x, y \in Q,\ |x - y| \leq \delta(\varepsilon).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y) - \mathrm{D}f(y)[x - y]| & \\
&= \left| \int_0^1 \mathrm{D}f((1-t)y + tx)[x-y]\,\mathrm{d}t - \mathrm{D}f(y)[x-y] \right| \\
&= \left| \int_0^1 \big(\mathrm{D}f((1-t)y + tx) - \mathrm{D}f(y)\big)[x-y]\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \|\mathrm{D}f((1-t)y + tx) - \mathrm{D}f(y)\|\,|x-y|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon\delta(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

para todo $x, y \in Q$, $|x - y| \leq \delta(\varepsilon)$.

Descomponemos Q en $n(\varepsilon)$ cubos Q_k, $k = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon)$, con diámetro $\delta(\varepsilon)$. La longitud de un lado de Q_k es $\delta(\varepsilon)/\sqrt{N} = r/m(\varepsilon)$. Entonces $n(\varepsilon) = m(\varepsilon)^N$.

Suponiendo que $Q_k \cap K_f \neq \varnothing$ demostremos que existe $C_3 \geq 0$, independiente de ε y k, tal que

$$f(Q_k) \text{ está cubierta por ladrillos con volumen total } \leq C_3\varepsilon\delta(\varepsilon)^N. \tag{2.20}$$

Sea $x^* \in Q_k \cap K_f$. Definimos $L := \mathrm{D}f(x^*)$, $\widetilde{Q_k} := Q_k - x^*$ y $g\colon \widetilde{Q_k} \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) := f(x^* + x) - f(x^*).$$

Entonces (2.19) implica que

$$|g(x) - Lx| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon) \qquad \text{para todo } x \in \widetilde{Q_k}. \tag{2.21}$$

Como $J_f(x^*) = \det(L) = 0$, el rango de L está contenido en un subespacio A de dimensión $N-1$ de $\mathbb{R}^N$. Escogemos $b_1 \in S_1\mathbb{R}^N \cap A^\perp$ y completamos $\{b_1\}$ a una base ortonormal $\{\, b_1, b_2, \ldots, b_N \,\}$ de $\mathbb{R}^N$. Utilizando (2.21), $(Lx)\cdot b_1 = 0$ y $|b_1| = 1$ calculamos para $x \in \widetilde{Q_k}$:

$$|g(x)\cdot b_1| = |(g(x) - Lx)\cdot b_1| \leq |g(x) - Lx| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon).$$

Para $i = 2, 3, \ldots, N$ obtenemos para $x \in \widetilde{Q_k}$ que

$$|g(x)\cdot b_i| = |(g(x) - Lx)\cdot b_i| + |(Lx)\cdot b_i| \leq |g(x) - Lx| + \|L\|\,|x| \leq (\varepsilon + \|L\|)\delta(\varepsilon)$$

porque $\widetilde{Q_k} \subseteq \overline{B}_{\delta(\varepsilon)}\mathbb{R}^N$. Eso implica que $g(\widetilde{Q_k})$ está contenido en un ladrillo rotado con lados paralelos a los b_i con volumen $2^N(1 + \|L\|)^{N-1}\varepsilon\delta(\varepsilon)^N$. Poniendo $C_3 := 2^{N+1}(1 + C_1)^{N-1}$ y utilizando $f(Q_k) = f(x^*) + g(\widetilde{Q_k})$, obtenemos (2.20), cubriendo el ladrillo rotado con cubos con lados paralelos a la base canónica $\{e_i\}$.

Existen a lo más $n(\varepsilon) = m(\varepsilon)^N$ cubos Q_k que cumplen $Q_k \cap K_f \neq \varnothing$. Como $\{Q_k\}_{k=1}^{n(\varepsilon)}$ es una cubierta de Q

$$f(Q \cap K_f) \subseteq \bigcup_{Q_k \cap K_f \neq \varnothing} f(Q_k).$$

Utilizando (2.20), por tanto existe una cubierta de $f(Q \cap K_f)$ por ladrillos con volumen total menor o igual que

$$m(\varepsilon)^N C_3 \varepsilon\delta(\varepsilon)^N = C_3 N^{N/2} r^N \varepsilon = C_2\varepsilon$$

donde $C_2 := C_3 N^{N/2} r^N$ no depende de ε. □

2.2. Unicidad

2.2.1. Reducción a Operadores Lineales

2.25 Proposición. *Un grado con las propiedades* (D1)–(D3) *está determinado por sus valores en triples* (g, Ω, z)*, donde* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *es abierto y acotado,* $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *y* $z \in \mathbb{R}^N \backslash g(\partial\Omega)$ *es un valor regular de* g*.*

Demostración. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Ponemos $\delta := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Por la Proposición 2.14 podemos suponer que $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Con la Proposición 2.18 y sus puntos (i) y (ii), aplicada a cada una de las componentes de f, construimos $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\sup_{x\in\overline{\Omega}}|f(x) - g(x)| \leq \delta/3$. Por el Lema de Sard (Proposición 2.24) y por el Lema 2.22(a) encontramos un valor regular $z \in \overline{B}_{\delta/3}(y)$ de g. Definimos la homotopía $h(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x)$ y la aplicación $w(t) := (1 - t)y + tz$. Si $t \in [0, 1]$ y $x \in \partial\Omega$, entonces

$$\begin{aligned} |h(t, x) - w(t)| &= |f(x) - y - t(f(x) - g(x) + z - y)| \\ &\geq |f(x) - y| - t(|f(x) - g(x)| + |y - z|) \geq \delta - t(\delta/3 + \delta/3) \geq \delta/3. \end{aligned}$$

En consecuencia, $w(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$ y (D3) implica que

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, z) \tag{2.22}$$

si "deg" es un grado que cumple (D1)–(D3). □

2.26 Proposición. *Un grado con las propiedades* (D1)–(D3) *está determinado por sus valores en triples* $(L, B_1, 0)$*, donde* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Sea "deg" un grado que cumple (D1)–(D3). Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$.

Primero supongamos que $f^{-1}(y) = \varnothing$. De acuerdo, $\varnothing$ es un subconjunto abierto de Ω. Utilizando $\Omega_1 := \Omega$ y $\Omega_2 := \varnothing$ (D2) implica que $\deg(f, \varnothing, y) = 0$. Utilizando $\Omega_1 := \varnothing$, $\Omega_2 := \varnothing$ y $f^{-1}(y) = \varnothing$ (D2) implica que $\deg(f, \Omega, y) = 0$.

Si $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ podemos suponer por la Proposición 2.25 que $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $y \notin f(K_f)$. El Lema 2.20 implica que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ tal que $f^{-1}(y) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$. Existe $r > 0$ (que puede ser elegido arbitrariamente chico) tal que las bolas $B_r(x_k)$ son ajenas. La propiedad (D2) implica que

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{k=1}^{n} \deg(f, B_r(x_k), y). \tag{2.23}$$

En consecuencia, $\deg(f, \Omega, y)$ está determinado por los valores de $\deg(f, B_r(x_k), y)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Para calcular $\deg(f, B_r(x_k), y)$ fijamos k y definimos $L := \mathrm{D}f(x_k)$. Como L es un isomorfismo tenemos para $x \in \mathbb{R}^N$ que $|x| = |L^{-1}Lx| \leq \|L^{-1}\|\,|Lx|$, es decir,

$$|Lx| \geq \frac{|x|}{\|L^{-1}\|} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.24}$$

$f(x_k) = y$ implica que

$$\frac{|f(x) - y - L[x - x_k]|}{|x - x_k|} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to x_k.$$

Supongamos que r es tan chico que

$$|f(x) - y - L[x - x_k]| \leq \frac{|x - x_k|}{2\|L^{-1}\|} \qquad \text{para todo } x \in \overline{B}_r(x_k). \tag{2.25}$$

Definimos la homotopía $h(t,x) := (1-t)f(x) + tL[x - x_k]$ y la aplicación $w(t) := (1-t)y$. Con (2.24) y (2.25) calculamos para $t \in [0,1]$ y $x \in S_r(x_k)$:

$$\begin{aligned} |h(t,x) - w(t)| &= |L[x - x_k] + (1-t)(f(x) - y - L[x - x_k])| \\ &\geq |L[x - x_k]| - (1-t)|f(x) - y - L[x - x_k]| \geq \frac{|x - x_k|}{2\|L^{-1}\|} = \frac{r}{2\|L^{-1}\|} > 0. \end{aligned}$$

Se sigue que $w(t) \notin h(t, \partial B_r(x_k))$ para todo $t \in [0,1]$ y (D3) implica que

$$\deg(f, B_r(x_k), y) = \deg(L[\,\cdot\, - x_k], B_r(x_k), 0). \tag{2.26}$$

Escogemos $R > 0$ suficientemente grande tal que $B_r(x_k) \subseteq B_R(0)$. Como L es un isomorfismo, $L[x - x_k] = 0$ solo para $x = x_k$. En consecuencia, (D2) implica (utilizando $\Omega_1 := B_r(x_k)$ y $\Omega_2 = \varnothing$) que

$$\deg(L[\,\cdot\, - x_k], B_r(x_k), 0) = \deg(L[\,\cdot\, - x_k], B_R(0), 0). \tag{2.27}$$

La homotopía $h(t,x) := (1-t)L[x - x_k] + tLx$ cumple para $t \in [0,1]$ y $x \in S_R(0)$ que

$$|h(t,x)| = |L[x - (1-t)x_k]| \geq \frac{|x - (1-t)x_k|}{\|L^{-1}\|} \geq \frac{|x| - |x_k|}{\|L^{-1}\|} \geq \frac{R - (R - r)}{\|L^{-1}\|} > 0.$$

En consecuencia, (D3) implica que

$$\deg(L[\,\cdot\, - x_k], B_R(0), 0) = \deg(L, B_R(0), 0). \tag{2.28}$$

Otra aplicación de (D2) demuestra que

$$\deg(L, B_R(0), 0) = \deg(L, B_1(0), 0). \tag{2.29}$$

Combinando (2.23) con (2.26)–(2.29) concluimos que

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{k=1}^{n} \deg(\mathrm{D}f(x_k), B_1, 0). \tag{2.30}$$

□

2.2.2. El Grado de un Operador Lineal

2.27 Recapitulación. Sea E un espacio vectorial. Un operador lineal P en E es una *proyección* si $P^2 = P$. Sean F, G subespacios de E. Entonces $E = F \oplus G$ es equivalente a la existencia de proyecciones P_F, P_G en E tal que $\mathcal{R}(P_F) = F$, $\mathcal{R}(P_G) = G$ y $P_F + P_G = I$. En este caso los núcleos $\mathcal{N}(P_F)$ y $\mathcal{N}(P_G)$ de F y G cumplen $\mathcal{N}(P_F) = G$ y $\mathcal{N}(P_G) = F$.

2.28 Recapitulación. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ un isomorfismo lineal. Los valores propios son los ceros del polinomio característico $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Escribimos

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{l}(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m}(\mu_j - \lambda)^{\beta_j} \prod_{k=1}^{n}(\nu_k - \lambda)^{\gamma_k}(\overline{\nu_k} - \lambda)^{\gamma_k}$$

donde $\lambda_i < 0$, $\mu_j > 0$ y $\nu_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, y ponemos $\alpha := \sum_{i=1}^{l} \alpha_i$. Se sigue que

$$\operatorname{sgn}(\det(A)) = \operatorname{sgn}(p(0)) = (-1)^{\alpha}. \tag{2.31}$$

Existen subespacios F, G de $\mathbb{R}^N$ tal que $\mathbb{R}^N = F \oplus G$, F y G son invariantes bajo A, los valores propios de $A|_F$ son los λ_i, los valores propios de $A|_G$ son los μ_j y los $\nu_k, \overline{\nu_k}$, y $\dim F = \alpha$.

2.29 Lema. *Sea E un espacio normado de dimensión finita, positiva y par. Entonces existe una homotopía h de $-\mathrm{id}_E$ a id_E tal que*

$$h(t, x) = 0 \qquad \textit{implica que } x = 0.$$

Demostración. Sea $\dim(E) = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Para $t \in [0, 1]$ definimos un operador lineal $A(t) \in \mathcal{L}(E)$, representado por una matriz respecto a una base fija de E. Primero ponemos

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & -\cos(\pi t) \end{pmatrix},$$

y entonces

$$A(t) := \underbrace{\begin{pmatrix} B(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B(t) \end{pmatrix}}_{k}.$$

Es claro que $\det(A(t)) = 1$ y que en seguida $A(t)$ es un isomorfismo para todo t. Además, $A(t)$ depende continuamente de t en la norma de $\mathcal{L}(E)$ porque las coordenadas de $A(t)$ son continuas. Si $t_n \to t$ y $x_n \to x$ entonces

$$\begin{aligned} \|A(t_n)x_n - A(t)x\|_E &\le \|A(t_n)x_n - A(t)x_n\|_E + \|A(t)x_n - A(t)x\|_E \\ &\le \|x_n\|_E \|A(t_n) - A(t)\|_{\mathcal{L}(E)} + \|A(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \|x_n - x\|_E \to 0 \end{aligned}$$

porque $A \in C([0,1], \mathcal{L}(E))$ y $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$. En consecuencia, $h(t,x) := A(t)x$ es continuo. Es claro que $h(0,x) = -x$ y $h(1,x) = x$. Como $A(t)$ es un isomorfismo, $A(t)x = 0$ implica que $x = 0$. □

2.30 Nota. Por (D1) y (D3) el Lema 2.29 implica que $\deg(-\mathrm{id}, B_1\mathbb{R}^{2k}, 0) = 1$ para $k \in \mathbb{N}$.

2.31 Lema. *Sea "*deg*" un grado con* (D1)–(D3) *en dimensión* 1*. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto, acotado, y tal que $0 \in \Omega$. Entonces* $\deg(-\mathrm{id}, \Omega, 0) = -1$*.*

Demostración. Por (D2) podemos suponer que $\Omega = B_1$. Definimos $f \in C(\overline{B}_2(1))$ por $f(x) := |x-1| - 1$. Como f y 1 tienen los mismos valores en $\partial B_2(1)$, se sigue por Tarea 3, Nº 5, que

$$\deg(f, B_2(1), 0) = \deg(1, B_2(1), 0) = 0.$$

Aquí también hemos utilizado el argumento del segundo párrafo de la prueba de la Proposición 2.26. (D3) y (D1) implican que

$$\deg(f, B_1(2), 0) = \deg(\mathrm{id} - 2, B_1(2), 0) = \deg(\mathrm{id}, B_1(2), 2) = 1.$$

En consecuencia, (D2) y $0 \notin f(\overline{B}_2(1) \backslash (B_1(0) \cup B_1(2)))$ implican que

$$\begin{aligned}\deg(-\mathrm{id}, B_1(0), 0) &= \deg(f, B_1(0), 0)\\ &= \deg(f, B_2(1), 0) - \deg(f, B_1(2), 0) = 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

□

2.32 Proposición. *Sea A un isomorfismo lineal en $\mathbb{R}^N$ y "*deg*" un grado que cumple* (D1)–(D3)*. Entonces* $\deg(A, B_1, 0) = \mathrm{sgn}(\det(A))$*.*

Demostración. Por Recapitulación 2.28 existen subespacios invariantes F, G para A tales que $\mathbb{R}^N = F \oplus G$, $\mathrm{sgn}(\det(A)) = (-1)^{\dim(F)}$, $A|_F$ solo tiene valores propios negativos y $A|_G$ solo tiene valores propios en $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. Como F, G son invariantes, $P_F A P_F = A P_F$, $P_G A P_G = A P_G$ y $P_F A P_G = P_G A P_F = 0$. En consecuencia, $P_F A = P_F A (P_F + P_G) = P_F A P_F = A P_F$ y similarmente $P_G A = A P_G$.

Definimos

$$h(t,x) := (1-t)Ax + t(-P_F + P_G)x.$$

Si $t \in [0,1]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ cumplen $h(t,x) = 0$, entonces

$$0 = P_F h(t,x) = (1-t) P_F A x - t P_F x = (1-t) A P_F x - t P_F x.$$

Para $t = 1$ obtenemos $P_F x = 0$. Para $t < 1$ se sigue que

$$A P_F x = \frac{t}{1-t} P_F x.$$

En consecuencia, $P_F x = 0$ porque $A|_F$ solo tiene valores propios negativos. Por otro lado tenemos

$$0 = P_G h(t,x) = (1-t)AP_G x + tP_G x.$$

Para $t = 1$ obtenemos $P_G x = 0$. Para $t < 1$ se sigue que

$$AP_G x = -\frac{t}{1-t} P_G x.$$

Por lo tanto, $P_G x = 0$ porque $A|_G$ solo tiene valores propios en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Resumiendo, hemos probado que $x = P_F x + P_G x = 0$ si $h(t,x) = 0$ y $t \in [0,1]$. Utilizando (D3) obtenemos que

$$\deg(A, B_1, 0) = \deg(-P_F + P_G, B_1, 0). \tag{2.32}$$

Caso 1: Si $\dim(F) = 0$, esto implica que

$$\deg(A, B_1, 0) = \deg(\mathrm{id}, B_1, 0) = 1 = (-1)^{\dim(F)} = \mathrm{sgn}(\det(A)).$$

Caso 2: Para $\dim(F) > 0$ distinguimos dos casos: Si $\dim(F)$ es par entonces definimos $D := \{0\}$ y $E := F$. Si $\dim(F)$ es impar entonces escogemos D, un subespacio de F de dimensión 1, y E, un subespacio de F con dimensión par tal que $F = D \oplus E$. Definimos $Q_D, Q_E \in \mathcal{L}(F)$ como las proyecciones respecto a esta descomposición de F.

Utilizando el Lema 2.29 encontramos $h_1 \in C([0,1] \times E, E)$ tal que $h_1(0, \cdot) = -\mathrm{id}_E$, $h_1(1, \cdot) = \mathrm{id}_E$, y tal que $h_1(t,x) = 0$ implica que $x = 0$. Definimos

$$h_2(t,x) := -Q_D P_F x + h_1(t, Q_E P_F x) + P_G x.$$

Sean $t \in [0,1]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ tales que $h_2(t,x) = 0$. Obtenemos que $0 = P_G h_2(t,x) = P_G x$, que $0 = -Q_D P_F h_2(t,x) = Q_D P_F x$ y que $0 = Q_E P_F h_2(t,x) = h_1(t, Q_E P_F x)$. Las propiedades de h_1 dicen que $Q_E P_F x = 0$. Así hemos probado que

$$x = P_F x + P_G x = Q_D P_F x + Q_E P_F x + P_G x = 0 \qquad \text{si } h_2(t,x) = 0,\ t \in [0,1]. \tag{2.33}$$

Ponemos $H := E \oplus G$. Se sigue que $\mathbb{R}^N = D \oplus H$, y que $P_D := Q_D P_F$ y $P_H := Q_E P_F + P_G$ son las proyecciones correspondientes para esta descomposición de $\mathbb{R}^N$. La definición de h_2 y (2.33) implican por (D3) que

$$\deg(-P_F + P_G, B_1(0), 0) = \deg(-P_D + P_H, B_1, 0). \tag{2.34}$$

Caso 2a): Si $\dim(F)$ es par entonces $P_D = 0$ y $P_H = \mathrm{id}$. Se sigue por (2.32), (2.34) y (D1) que

$$\deg(A, B_1, 0) = 1 = (-1)^{\dim(F)} = \mathrm{sgn}(\det(A)).$$

Caso 2b): Si $\dim(F)$ es impar entonces por (2.32), (2.34) y (D1) solo falta demostrar que

$$\deg(-P_D + P_H, B_1\mathbb{R}^N, 0) = -1, \tag{2.35}$$

porque $-1 = (-1)^{\dim(F)} = \operatorname{sgn}(\det(A))$. Recordemos que $\dim(D) = 1$. Sea $L\colon \mathbb{R} \to D$ un isomorfismo lineal. Definimos otro grado $\deg_1$ en dimensión 1: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega})$ y $y \in \mathbb{R}\backslash f(\partial\Omega)$. Definimos $\Omega_* := L(\Omega) + B_1 H$, $f_* \in C(\overline{\Omega_*}, \mathbb{R}^N)$ por

$$f_*(x) := Lf(L^{-1}P_D x) + P_H x$$

y $y_* := Ly$. Demostremos que $y_* \notin f_*(\partial\Omega_*)$: Razonando por contradicción, supongamos que existe $x \in \partial\Omega_*$ tal que $f_*(x) = Lf(L^{-1}P_D x) + P_H x = y_*$. Es claro que $P_H x = 0$ porque $y_* \in D$. Se sigue que $P_D x = x \in \partial\Omega_*$, es decir, $L^{-1}P_D x \in \partial\Omega$, ya que obviamente $\partial\Omega_* \cap D = \partial(L(\Omega)) = L(\partial\Omega)$. Además,

$$y = L^{-1}y_* = f(L^{-1}P_D x),$$

contradiciendo $y \notin f(\partial\Omega)$. En consecuencia, podemos definir

$$\deg_1(f, \Omega, y) := \deg(f_*, \Omega_*, y_*).$$

Demostremos las propiedades (D1)–(D3) para $\deg_1$:
(D1): Sea $y \in \Omega$. Se sigue que $y_* \in \Omega_*$ y que

$$\deg_1(\mathrm{id}, \Omega, y) = \deg(P_D + P_H, \Omega_*, y_*) = \deg(\mathrm{id}, \Omega_*, y_*) = 1.$$

(D2): Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ abiertos y $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Por contradicción, supongamos que existe $x \in \overline{\Omega_*}\backslash(\Omega_{1*} \cup \Omega_{2*})$ tal que $f_*(x) = y_*$. Como antes $P_H x = 0$ y $L^{-1}P_D x \in \overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Además $f(L^{-1}P_D x) = y$, una contradicción. En consecuencia, $y_* \notin f_*(\overline{\Omega_*}\backslash(\Omega_{1*} \cup \Omega_{2*}))$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\deg_1(f, \Omega, y) &= \deg(f_*, \Omega_*, y_*)\\ &= \deg(f_*, \Omega_{1*}, y_*) + \deg(f_*, \Omega_{2*}, y_*)\\ &= \deg_1(f, \Omega_1, y) + \deg_1(f, \Omega_2, y).\end{aligned}$$

(D3): Sean $h \in C([0,1] \times \overline{\Omega})$ y $y \in C([0,1])$ tales que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$. Definimos $h_*(t,x) := Lh(t, L^{-1}P_D x) + P_H x$ para $x \in \mathbb{R}^N$ y $y_*(t) := Ly(t)$. Por contradicción, supongamos que existen $t \in [0,1]$ y $x \in \partial\Omega_*$ tales que $h_*(t,x) = y_*(t)$. Otra vez esto implica que $L^{-1}P_D x \in \partial\Omega$ y $h(t, L^{-1}P_D x) = y(t)$, una contradicción. En consecuencia, $y_*(t) \notin h_*(t, \partial\Omega_*)$ para todo $t \in [0,1]$ y obtenemos que

$$\deg_1(h(t,\cdot), \Omega, y) = \deg(h_*(t,\cdot), \Omega_*, y_*(t))$$

es independiente de t.

Observamos que $-P_D + P_H$ es un isomorfismo y que $L \circ (-\mathrm{id}) \circ L^{-1} \circ P_D = -P_D$. Definimos $\Omega := L^{-1}(B_1 D)$ y notamos que $0 \in \Omega$. Utilizando (D2) y el Lema 2.31, calculamos

$$\deg(-P_D + P_H, B_1\mathbb{R}^N, 0) = \deg(-P_D + P_H, B_1 D + B_1 H, 0) = \deg_1(-\mathrm{id}, \Omega, 0) = -1.$$

Con esto hemos probado (2.35) y concluimos. □

Resumando, las Proposiciones 2.25, 2.26 y 2.32 y sus demostraciones implican

2.33 Teorema. *Sea "deg" un grado que cumple* (D1)–(D3). *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado,* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, *y* $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. *Ponemos* $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. *Entonces existen* $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *y un valor regular* $z \in \mathbb{R}^N \backslash g(\partial\Omega)$ *de* g *tal que* $\|f - g\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \rho/3$ *y* $|y - z| \leq \rho/3$. *Para todo aquellos* g *y* z *se cumple que* $g^{-1}(z)$ *es un conjunto finito y que*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} \operatorname{sgn}(J_g(x)). \tag{2.36}$$

2.3. Existencia

2.3.1. Valores Regulares y Funciones en C^2

2.34 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega \cup K_f)$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x).$$

2.35 Notas. (a) El Lema 2.20 implica que la suma en la definición es finita.

(b) Si $f^{-1}(y) = \varnothing$, entonces $\deg(f, \Omega, y) = 0$ porque la suma es vacía.

Nos interesa extender la Definición 2.34 a valores singulares y de f. Sea $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Como $f(K_f)$ tiene medida 0 en $\mathbb{R}^N$ existen valores regulares en la bola $B_\rho(y)$. Es natural definir el grado $\deg(f, \Omega, y)$ por $\deg(f, \Omega, y_1)$ si $y_1 \in B_\rho(y)$ es un valor regular de f. Pero uno tiene que demostrar que esta definición no depende de la selección de y_1, y para eso necesitamos unas herramientas.

2.36 Lema. *Sean* Ω, f *y* y *como en la Definición* 2.34. *Para* $\delta > 0$ *sea* η_δ *dado por la Definición* 2.17. *Entonces existe* $\delta_0 > 0$ *tal que*

$$\deg(f, \Omega, y) = \int_\Omega \eta_\delta(f(x) - y) J_f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \textit{para todo } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{2.37}$$

Demostración. Si $f^{-1}(y) = \varnothing$, entonces escogemos $0 < \delta_0 < \operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega}))$. Se sigue que $\eta_\delta(f(x) - y) = 0$ para todo $x \in \Omega$ y $\delta \in (0, \delta_0]$ porque $\operatorname{supp}(\eta_\delta) = \overline{B}_\delta$. Por lo tanto, se cumple (2.37).

Supongamos que $f^{-1}(y) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$. Encontramos $r_1 > 0$ tal que los $\overline{B}_{r_1}(x_k) \subseteq \Omega$ son bolas ajenas y la restricción de f a $B_{r_1}(x_k)$ es un difeomorfismo con una vecindad abierta V_k de y. Se sigue por la continuidad de J_f en x que

$$\operatorname{sgn} J_f(x) = \operatorname{sgn} J_f(x_k) \qquad \text{para todo } x \in B_{r_1}(x_k). \tag{2.38}$$

Existe $r_2 > 0$ tal que $\overline{B}_{r_2}(y) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_k$. Definimos los conjuntos abiertos $W_k := f^{-1}(B_{r_2}(y)) \cap B_{r_1}(x_k)$. Entonces $\operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{k=1}^n W_k)) \geq r_2$. Si $\delta \leq \delta_0 := r_2$, entonces $f(x) - y \notin B_\delta$ y $\eta_\delta(f(x) - y) = 0$ para $x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{k=1}^n W_k$. En consecuencia, (2.38) implica que

$$\int_\Omega \eta_\delta(f(x) - y) J_f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn} J_f(x_k) \int_{W_k} \eta_\delta(f(x) - y) |J_f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{2.39}$$

Observamos que $J_{f-y} = J_f$. Además, f es un difeomorfismo de W_k y $B_{r_2}(y)$, y por lo tanto $f - y$ es un difeomorfismo de W_k y B_{r_2}. Se sigue por la fórmula de sustitución y por $B_\delta \subseteq B_{r_2}$ que

$$\int_{W_k} \eta_\delta(f(x) - y) |J_f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{B_{r_2}} \eta_\delta(z) \, \mathrm{d}z = 1.$$

Por eso (2.39) implica (2.37). □

2.37 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. La *divergencia* $\operatorname{div} u \in C(\Omega)$ se define por

$$\operatorname{div} u(x) := \sum_{i=1}^N \partial_i u^i(x).$$

2.38 Lema. *Sea $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Entonces $\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} u \, \mathrm{d}x = 0$.*

Demostración. Para $i = 1, 2, \ldots, N$ tenemos que $u^i \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$, y como en la prueba de (2.10) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u^i(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} u(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \partial_i u^i(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u^i(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

□

2.39 Definición. Sea $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz. El *cofactor* $\det_{ij}(A)$ es $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz de A quitando el renglón i y la columna j:

$$\det_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,N} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N,j-1} & a_{N,j+1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

2.40 Lema. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y* $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Definimos* $d_{ij}(x) := \det_{ij}(\mathrm{D}f(x))$*. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{N} \partial_j d_{ij}(x) = 0 \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, N \text{ y } x \in \Omega.$$

Demostración. En esta prueba el símbolo $\widehat{\ }$ denotará omisión del mismo objeto.

Fijemos i y denotemos

$$g_k := \partial_k (f^1, f^2, \dots, \widehat{f^i}, \dots, f^N)^T.$$

Se sigue que

$$d_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det(g_1, g_2, \dots, \widehat{g_j}, \dots, g_N).$$

La determinante es lineal en cada columna. Similarmente como en la Tarea 3, Nº6.b) se sigue que

$$\partial_j d_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \sum_{k \neq j} \det(g_1, g_2, \dots, \widehat{g_j}, \dots, \partial_j g_k, \dots, g_N). \tag{2.40}$$

Ponemos

$$c_{kj} := \det(\partial_j g_k, g_1, g_2, \dots, \widehat{g_j}, \dots, \widehat{g_k}, \dots, g_N)$$

Como $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tenemos que $\partial_k g_j = \partial_j g_k$. Eso implica que $c_{kj} = c_{jk}$. Intercambiando dos columnas vecinas en una determinante solo cambia el signo de la determinante. Por lo tanto

$$\det(g_1, g_2, \dots, \widehat{g_j}, \dots, \partial_j g_k, \dots, g_N) = \begin{cases} (-1)^{k-1} c_{kj} & k < j \\ (-1)^{k-2} c_{kj} & k > j. \end{cases} \tag{2.41}$$

Definimos $\sigma_{kj} = 1$ para $k < j$, $\sigma_{jj} = 0$ y $\sigma_{kj} = -1$ para $k > j$. Con esta notación (2.40) y (2.41) implican que

$$(-1)^{i+j} \partial_j d_{ij}(x) = \sum_{k<j} (-1)^{k-1} c_{kj} + \sum_{k>j} (-1)^{k-2} c_{kj} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sigma_{kj} c_{kj}.$$

Formando la suma respecto a j obtenemos

$$\begin{aligned} (-1)^i \sum_{j=1}^{N} \partial_j d_{ij}(x) &= \sum_{j,k=1}^{N} (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj} \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} (-1)^{j-1+k} \sigma_{jk} c_{jk} && \text{cambio de índice} \\ &= - \sum_{j,k=1}^{N} (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj} && \sigma_{jk} = -\sigma_{kj},\ c_{jk} = c_{kj}. \end{aligned}$$

Eso implica que la suma es 0. □

2.41 Proposición. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado,* $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *y* $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$*. Ponemos* $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$*. Si* $y_1, y_2 \in B_\rho(y)$ *son valores regulares de* f*, entonces*

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2),$$

*donde el grado "*deg*" está dado por la Definición* 2.34.

Demostración. Utilizando el Lema 2.36 es suficiente demostrar que

$$\int_\Omega (\eta_\delta(f(x) - y_2) - \eta_\delta(f(x) - y_1)) J_f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{2.42}$$

para $\delta > 0$ chico. La idea es expresar $(\eta_\delta(f(x)-y_2)-\eta_\delta(f(x)-y_1))J_f(x)$ como la divergencia de una función v con soporte compacto en Ω y utilizar el Lema 2.38.

En la Tarea 4, Nº7 se demuestra que para $\delta > 0$ la función

$$w(x) := (y_1 - y_2) \int_0^1 \eta_\delta(x - (1-t)y_1 - ty_2) \, \mathrm{d}t.$$

cumple

$$\operatorname{div} w(x) = \eta_\delta(x - y_2) - \eta_\delta(x - y_1). \tag{2.43}$$

Desafortunadamente eso no implica que $w \circ f$ tiene divergencia $(\eta_\delta(f(x) - y_1) - \eta_\delta(f(x) - y_2))J_f(x)$.

Definimos $\rho_1 := \max\{\, |y - y_1|, |y - y_2| \,\} < \rho$ y escogemos $0 < \delta_0 < \rho - \rho_1$. Para $\delta \in (0, \delta_0]$, $t \in [0,1]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x - y| > \rho_1 + \delta_0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |x - (1-t)y_1 - ty_2| &\geq |x - y| - ((1-t)|y - y_1| + t|y - y_2|) \\ &> \rho_1 + \delta_0 - \rho_1 \\ &\geq \delta. \end{aligned}$$

Entonces $w(x) = 0$. Eso demuestra que

$$\operatorname{supp}(w) \subseteq \overline{B}_{\rho_1 + \delta_0}(y) \subseteq B_\rho(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega) \qquad \text{si } \delta \leq \delta_0. \tag{2.44}$$

Fijamos $\delta \in (0, \delta_0]$, definimos $d_{ij} := \det_{ij}(\mathrm{D}f)$ como en el Lema 2.40 y $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ por

$$v^j(x) := \sum_{i=1}^N w^i(f(x)) d_{ij}(x).$$

Por (2.44) $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(w \circ f), \partial\Omega) > 0$ y luego $\operatorname{supp}(v)$ es compacto. Extendiendo v a $\mathbb{R}^N$ por 0 tenemos que $v \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Calculamos

$$\partial_j v^j(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \partial_k w^i(f(x)) \partial_j f^k(x) d_{ij}(x) + \sum_{i=1}^N w^i(f(x)) \partial_j d_{ij}(x). \tag{2.45}$$

Falta sumar esta expresión respecto a j. Para $i = k$ en la primera suma tenemos que

$$\sum_{j=1}^{N} d_{ij}(x)\partial_j f^k(x) = \sum_{j=1}^{N} d_{ij}(x)\partial_j f^i(x) = J_f(x)$$

(desarrollo del determinante de $\mathrm{D}f(x)$ por el i-ésimo renglón). Para $i < k$ observamos que

$$\sum_{j=1}^{N} d_{ij}(x)\partial_j f^k(x) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \dots & \partial_N f^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^{i-1}(x) & \dots & \partial_N f^{i-1}(x) \\ \partial_1 f^{k}(x) & \dots & \partial_N f^{k}(x) \\ \partial_1 f^{i+1}(x) & \dots & \partial_N f^{i+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^{k-1}(x) & \dots & \partial_N f^{k-1}(x) \\ \partial_1 f^{k}(x) & \dots & \partial_N f^{k}(x) \\ \partial_1 f^{k+1}(x) & \dots & \partial_N f^{k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^{N}(x) & \dots & \partial_N f^{N}(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Similarmente se obtiene que $\sum_{j=1}^{N} d_{ij}(x)\partial_j f^k(x) = 0$ si $i > k$. Resumando, eso nos da

$$\sum_{j=1}^{N} d_{ij}(x)\partial_j f^k(x) = \delta_{ik} J_f(x) \qquad \text{para todo } i, k = 1, 2, \dots, N. \tag{2.46}$$

Ahora juntemos (2.45) con el Lema 2.40 y (2.46) y obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \partial_k w^i(f(x)) \sum_{j=1}^{N} \partial_j f^k(x) d_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{N} w^i(f(x)) \sum_{j=1}^{N} \partial_j d_{ij}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \partial_k w^i(f(x))\delta_{ik} J_f(x) \\ &= J_f(x) \sum_{i=1}^{N} \partial_i w^i(f(x)) \\ &= J_f(x) \operatorname{div} w(f(x)). \end{aligned}$$

Como $v \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, utilizando el Lema 2.38 y (2.43), esto demuestra (2.42). $\square$

2.3.2. Valores Singulares y Funciones en C^1

Utilizaremos que para $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ se cumple

$$\|AB\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.47}$$

2.42 Lema. *Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y A invertible. Si*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}, \tag{2.48}$$

entonces $\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\det B)$.

Demostración. Definimos $\gamma \in C([0,1], \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ por $\gamma(t) := (1-t)A + tB$. Notemos que $\gamma(t) = (I - (A - \gamma(t))A^{-1})A$. Tenemos por (2.48) que $\|(A - \gamma(t))A^{-1}\| \le t\|A - B\|\,\|A^{-1}\| < 1$. La series de Neumann dice que existe $\gamma(t)^{-1}$ y que

$$\gamma(t)^{-1} = A^{-1}(I - (A - \gamma(t))A^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}((A - \gamma(t))A^{-1})^k.$$

Por lo tanto, $\det(\gamma(t)) \neq 0$ para $t \in [0,1]$. La continuidad del determinante y el teorema del valor intermedio implica que $\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\det \gamma(0)) = \operatorname{sgn}(\det \gamma(1)) = \operatorname{sgn}(\det B)$. □

2.43 Lema. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega \cup K_f)$. Entonces existen un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$ y $r > 0$ tal que para todo $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ con*

$$\|f - g\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} + \|\mathrm{D}f - \mathrm{D}g\|_{C(K, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))} \le r \tag{2.49}$$

se cumple que $y \in \mathbb{R}^N \backslash g(\partial\Omega \cup K_g)$ y

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y),$$

donde el grado "$\deg$*" está dado por la Definición* 2.34.

Demostración. Supongamos que $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Definimos los isomorfismos lineales $A_k := \mathrm{D}f(x_k)$. Existe $r_1 > 0$ tal que las bolas $\overline{B}_{r_1}(x_k) \subseteq \Omega$ son ajenas y que

$$|f(x) - y - A_k[x - x_k]| \le \frac{r_1}{2\|A_k^{-1}\|} \tag{2.50}$$

y

$$\|\mathrm{D}f(x) - A_k\| \le \frac{1}{4\|A_k^{-1}\|} \tag{2.51}$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$ y $x \in \overline{B}_{r_1}(x_k)$. Esto sigue porque y es un valor regular de f y por la diferenciabilidad continua de f. Ponemos $W := \bigcup_{k=1}^{n} B_{r_1}(x_k)$.

Demostremos que si $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ cumple

$$\|f - g\|_{C(\overline{W}, \mathbb{R}^N)} \le \frac{r_1}{2\max_{k=1}^{n}\|A_k^{-1}\|} \tag{2.52}$$

y

$$\sup_{x\in\overline{W}}\|\mathrm{D}f(x)-\mathrm{D}g(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{1}{4\,\text{máx}_{k=1}^n\|A_k^{-1}\|},\tag{2.53}$$

entonces para todo $k=1,2,\dots,n$

$$\operatorname{sgn} J_g(x)=\operatorname{sgn} J_f(x_k)\qquad\text{para } x\in\overline{B}_{r_1}(x_k)\tag{2.54}$$

y

(2.55) g tiene precisamente un punto y en $\overline{B}_{r_1}(x_k)$.

Para demostrar (2.54) fijamos k, $x\in\overline{B}_{r_1}(x_k)$, $A:=\mathrm{D}f(x)$ y $B:=\mathrm{D}g(x)$, y calculamos, utilizando (2.51) y (2.53):

$$\|A_k-B\|\leq\|A_k-A\|+\|A-B\|\leq\frac{1}{2\|A_k^{-1}\|}.$$

El Lema 2.42 implica que $\operatorname{sgn} J_g(x)=\operatorname{sgn} J_f(x_k)$.

Para demostrar (2.55) fijamos k y definimos $\varphi\colon\overline{B}_{r_1}(x_k)\to\mathbb{R}^N$ por

$$\varphi(x):=x-A_k^{-1}(g(x)-y).$$

Se sigue que $\varphi(x)=x$ si y sólo si $g(x)=y$. Si $x\in\overline{B}_{r_1}(x_k)$, entonces tenemos por (2.50) y (2.52)

$$|\varphi(x)-x_k|\leq\|A_k^{-1}\|\big(|A_k[x-x_k]+y-f(x)|+|f(x)-g(x)|\big)\leq r_1,$$

es decir, $\varphi(\overline{B}_{r_1}(x_k))\subseteq\overline{B}_{r_1}(x_k)$. Además

$$\|\mathrm{D}\varphi(x)\|=\|I-A_k^{-1}\mathrm{D}g(x)\|\leq\|A_k^{-1}\|\big(\|A_k-\mathrm{D}f(x)\|+\|\mathrm{D}f(x)-\mathrm{D}g(x)\|\big)\leq\frac{1}{2}$$

por (2.51) y (2.53). Para $x_1,x_2\in\overline{B}_{r_1}(x_k)$ eso implica que

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leq\int_0^1|\mathrm{D}\varphi((1-t)x_1+tx_2)[x_2-x_1]|\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}|x_1-x_2|.$$

Entonces φ es una contracción estricta en $\overline{B}_{r_1}(x_k)$ y el teorema del punto fijo de Banach dice que existe precisamente un punto fijo de φ en $\overline{B}_{r_1}(x_k)$. Eso nos da (2.55).

Ponemos

$$r:=\text{mín}\left\{\frac{r_1}{2\,\text{máx}_{k=1}^n\|A_k^{-1}\|},\ \frac{1}{4\,\text{máx}_{k=1}^n\|A_k^{-1}\|},\ \frac{1}{2}\operatorname{dist}(y,f(\overline{\Omega}\backslash W))\right\}.$$

Por tanto $r>0$. Si $g\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)\cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ cumple (2.49) con este r y con $K:=\overline{W}$, entonces (2.52) y (2.53) se cumplen y implican (2.54) y (2.55). La definición de r dice que

$g^{-1}(y) \subseteq W$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$ denotemos por z_k el único punto y de g en $\overline{B}_{r_1}(x_k)$. Luego $g^{-1}(y) = \{ z_1, z_2, \ldots, z_n \}$, y y es un valor regular de g, por (2.54) y porque y es un valor regular de f. Además, (2.54) implica que

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} J_f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} J_g(z_k) = \deg(g, \Omega, y).$$

□

La diferencia de la siguiente proposición con la Proposición 2.41 es que sólo suponemos que f está en C^1.

2.44 Proposición. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Ponemos $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Si $y_1, y_2 \in B_\rho(y)$ son valores regulares de f, entonces*

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2),$$

donde el grado "deg" está dado por la Definición 2.34.

Demostración. Sean K_i y r_i dados por el Lema 2.43 respecto a y_i, $i = 1, 2$. Sea $\rho_1 \in (0, \rho)$ tal que $y_1, y_2 \in B_{\rho_1}(y)$. Aplicando regularización a las coordenadas de f, extendidas a $\mathbb{R}^N$ continuamente con la Proposición 2.14, la Proposición 2.18 nos da $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que se cumple (2.49), donde definimos $K := K_1 \cup K_2$ y $r := \min\{r_1, r_2\}$. Además podemos suponer que

$$\|f - g\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \rho - \rho_1. \tag{2.56}$$

Por tanto, $\rho_1 \leq \operatorname{dist}(y, g(\partial\Omega))$. Usando el Lema 2.43 y la Proposición 2.41 obtenemos

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(g, \Omega, y_1) = \deg(g, \Omega, y_2) = \deg(f, \Omega, y_2).$$

□

Utilizando la Proposición 2.44 y el Lema de Sard (Proposición 2.24) tiene sentido la

2.45 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$, y ponemos $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f, \Omega, y_1)$$

donde $y_1 \in B_\rho(y)$ es cualquier valor regular de f y $\deg(f, \Omega, y_1)$ está dado por la Definición 2.34.

2.46 Nota. Si $f^{-1}(y) = \varnothing$, entonces $f^{-1}(y_1) = \varnothing$ para $y_1 \in \mathbb{R}^N \backslash f(K_f)$ que cumple con $|y_1 - y| < \operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega}))$. Las Definiciones 2.34 y 2.45 dicen que $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y_1) = 0$.

2.3.3. Aproximación de Funciones Continuas

Para la extensión de esta definición a aplicaciones que solo son continuas necesitamos la

2.47 Proposición. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado,* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *y* $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. *Ponemos* $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. *Si* $g_1, g_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *cumplen* $\|f - g_i\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \rho$ *para* $i = 1, 2$, *entonces*

$$\deg(g_1, \Omega, y) = \deg(g_2, \Omega, y),$$

donde "deg" está dado por la Definición 2.45.

Demostración. Escribimos $J := [0, 1]$. Definimos $h(t, x) := (1-t)g_1(x) + tg_2(x)$. Utilizaremos la notación $h_t := h(t, \cdot)$. Para $t \in J$ y $x \in \partial\Omega$ tenemos

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y| &\geq |f(x) - y| - \big((1-t)|g_1(x) - f(x)| + t|g_2(x) - f(x)|\big) \\ &> \rho - ((1-t)\rho + t\rho) = 0. \end{aligned}$$

Entonces está bien definido $\varphi(t) := \deg(h_t, \Omega, y)$ para todo $t \in J$, utilizando la Definición 2.45.

Fijamos $t_0 \in J$. Demostremos que

(2.57) $\quad \varphi$ es constante en una vecindad de t_0.

Caso 1: $h_{t_0}^{-1}(y) = \varnothing$. Ponemos $\delta := \operatorname{dist}(y, h_{t_0}(\overline{\Omega}))$. Si $|t - t_0| \leq \delta/(2\rho)$, entonces

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y| &\geq |h(t_0, x) - y| - |h(t_0, x) - h(t, x)| \\ &\geq \delta - |t - t_0| \, \|g_1 - g_2\|_\infty \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2\rho}(\|g_1 - f\|_\infty + \|g_2 - f\|_\infty) \\ &> 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por lo tanto, $h_t^{-1}(y) = \varnothing$, y entonces por la Nota 2.46 $\varphi(t) = \deg(h_t, \Omega, y) = 0$ para $t \in [t_0 - \delta/(2\rho), t_0 + \delta/(2\rho)] \cap J$.

Caso 2: $y \in h_{t_0}(\Omega)$ es un valor regular de h_{t_0}. Escribimos $h_{t_0}^{-1}(y) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$. El teorema de la función implícita dice que existen $r, s_1 > 0$ y funciones $z_k \in C^1((t_0 - s_1, t_0 + s_1), B_r(x_k))$ tales que $h_t^{-1}(y) \cap B_r(x_k) = z_k(t)$ y $z_k(t_0) = x_k$, para $t \in (t_0 - s_1, t_0 + s_1)$ y $k = 1, 2, \ldots, n$. Sin restricción supongamos que las bolas $B_r(x_k)$ son ajenas y que $\operatorname{sgn} J_{h_{t_0}}(x) = \operatorname{sgn} J_{h_{t_0}}(x_k)$ para $x \in \overline{B}_r(x_k)$, utilizando el Lema 2.42.

Definimos $V := \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k)$ y $\delta := \operatorname{dist}(y, h_{t_0}(\overline{\Omega} \backslash V)) > 0$. Como en el Caso 1 se demuestra que

$$h_t^{-1}(y) \cap (\overline{\Omega} \backslash V) = \varnothing \qquad \text{para } |t - t_0| \leq \frac{\delta}{2\rho}.$$

La función $(t,x) \mapsto J_{h_t}(x)$ es uniformemente continua en $J \times \overline{V}$, y $J_{h_{t_0}}$ no tiene cero en $\overline{V}$. Existe $s_2 > 0$ tal que $J_{h_t}(x) \neq 0$ para $(t,x) \in (t_0 - s_2, t_0 + s_2) \times \overline{V}$.

Con $\mu := \text{mín}\{s_1, s_2, \delta/(2\rho)\}$ obtenemos que

$$h_t^{-1}(y) = \{\, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t) \,\}$$

y que $\operatorname{sgn} J_{h_t}(z_k(t)) = \operatorname{sgn} J_{h_{t_0}}(x_k) \neq 0$ para todo $t \in (t_0 - \mu, t_0 + \mu) \cap J$ y todo k. Se sigue para $t \in (t_0 - \mu, t_0 + \mu) \cap J$ que

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} J_{h_t}(z_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} J_{h_{t_0}}(x_k) = \varphi(t_0).$$

Caso 3: $y \in h_{t_0}(\Omega)$ es un valor singular de h_{t_0}. Ponemos $\delta := \operatorname{dist}(y, h_{t_0}(\partial\Omega))$ y escogemos un valor regular $y_1 \in B_\delta(y)$ de h_{t_0}. Como en el Caso 2 se sigue que existe $s > 0$ tal que y_1 es un valor regular de h_t y que $\deg(h_t, \Omega, y_1) = \deg(h_{t_0}, \Omega, y_1)$ para $t \in (t_0 - s, t_0 + s)$. Tomando s suficientemente chico podemos suponer que $|y - y_1| < \operatorname{dist}(y, h_t(\partial\Omega))$ para estos valores de t. Utilizando la Definición 2.45 obtenemos que $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ si $t \in (t_0 - s, t_0 + s)$.

Con esto concluimos la demostración de (2.57).

La constancia local de φ dice que $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ es continuo. Razonando por contradicción, supongamos (sin restricción) que $\varphi(0) < \varphi(1)$. Existen $\alpha \in [\varphi(0), \varphi(1)] \backslash \mathbb{Z}$ y $t \in J$ tal que $\alpha = \varphi(t)$, por el teorema del valor intermedio. Pero eso contradice $\varphi(t) \in \mathbb{Z}$. ¡Concluimos! $\square$

Por la Proposición anterior y la Proposición 2.18 tiene sentido la siguiente

2.48 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Definimos

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(g, \Omega, y),$$

donde $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ cumple $\|f - g\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ y $\deg(g, \Omega, y)$ está dado por la Definición 2.45.

2.49 Nota. Sean Ω, f y y como en la Definición anterior. Podemos calcular el grado directamente con la Definición 2.34 (utilizando un valor regular) así: Ponemos $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ y encontramos $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y un valor regular $z \in \mathbb{R}^N \backslash g(\partial\Omega)$ de g tal que $\|f - g\|_\infty \leq \rho/3$ y $|y - z| \leq \rho/3$. Se sigue que $\|f - g\|_\infty < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ y

$$|y - z| \leq \rho/3 < 2\rho/3 \leq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) - \|f - g\|_\infty \leq \operatorname{dist}(y, g(\partial\Omega)).$$

Por las Definiciones 2.45 y 2.34 obtenemos

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, z). \tag{2.58}$$

2.50 Teorema. *El grado en la Definición* 2.48 *cumple con* (D1)–(D3).

Demostración. **(D1)** Como id es diferenciable y 0 un valor regular, la Definición 2.34 implica la afirmación.

(D2) Definimos $A := \overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ y $\rho := \operatorname{dist}(y, f(A)) > 0$. Por extensión y regularización (Proposiciones 2.14 y 2.18) encontramos $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y un valor regular $z \in \mathbb{R}^N\backslash g(\partial\Omega)$ de g tal que $\|f - g\|_\infty \leq \rho/3$ y $|y - z| \leq \rho/3$. Notemos que $\partial\Omega \subseteq A$ implica que $\rho \leq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Por lo tanto la Nota 2.49 dice que

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, z). \tag{2.59}$$

Como $g^{-1}(z) \cap A = \varnothing$ la Definición 2.34 nos da

$$\begin{aligned} \deg(g, \Omega, z) &= \sum_{x \in g^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_g(x) \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(z) \cap \Omega_1} \operatorname{sgn} J_g(x) + \sum_{x \in g^{-1}(z) \cap \Omega_2} \operatorname{sgn} J_g(x) \\ &= \deg(g, \Omega_1, z) + \deg(g, \Omega_2, z). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Las inclusiones $\partial\Omega_i \subseteq A$ implican que $\rho \leq \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_i))$ para $i = 1, 2$. Otra vez la Nota 2.49 nos dice que

$$\deg(f, \Omega_i, y) = \deg(g, \Omega_i, z) \qquad \text{para } i = 1, 2. \tag{2.61}$$

Juntando las ecuaciones (2.59), (2.60) y (2.61) concluimos.

(D3) Sean $J := [0, 1]$, $h \in C(J \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ una homotopía y $y \in C(J, \mathbb{R}^N)$ tales que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$. Definimos $\rho(t) := \operatorname{dist}(y(t), h(t, \partial\Omega)) > 0$ para $t \in J$ y demostremos que $\rho_0 := \operatorname{mín} \rho(J) > 0$. Por contradicción, supongamos que existe $(t_n) \subseteq J$ tal que $\rho(t_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cada n existe $x_n \in \partial\Omega$ con $|y(t_n) - h(t_n, x_n)| \leq \rho(t_n) + 1/n$, por la definición de ρ. Como $\partial\Omega$ y J son compactos, pasando a una subsucesión podemos suponer que $t_n \to t^* \in J$ y $x_n \to x^* \in \partial\Omega$ cuando $n \to \infty$. La continuidad de y y h implica que

$$0 < \rho(t^*) \leq |y(t^*) - h(t^*, x^*)| = \lim_{n \to \infty} |y(t_n) - h(t_n, x_n)| \leq \lim_{n \to \infty} (\rho(t_n) + 1/n) = 0,$$

una contradicción.

Por extensión y regularización encontramos $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|h - H\|_{C(J \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \rho_0/4$. Como es usual, escribimos $h_t := h(t, \cdot)$ y $H_t := H(t, \cdot)$. Se sigue que

$$\|h_t - H_t\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\rho_0}{4} < \rho_0 \leq \rho(t) = \operatorname{dist}(y(t), h_t(\partial\Omega))$$

y entonces por la Definición 2.48 que

$$\deg(h_t, \Omega, y(t)) = \deg(H_t, \Omega, y(t)) \qquad \text{para todo } t \in J. \tag{2.62}$$

Notemos que

$$\operatorname{dist}(y(t), H_t(\partial\Omega)) \geq \frac{3\rho_0}{4} \qquad \text{para todo } t \in J. \tag{2.63}$$

Como H es uniformemente continuo en $J \times \overline{\Omega}$ y y es uniformemente continuo en J existe $\delta > 0$ tal que $\|H_s - H_t\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)} \leq \rho_0/4$ y $|y(s) - y(t)| \leq \rho_0/4$ para $s, t \in J$ con $|s - t| \leq \delta$. Fijemos tales s, t y notemos que $V := B_{\rho_0/4}(y(s)) \cap B_{\rho_0/4}(y(t))$ es abierto y no vacío. El Lema de Sard y el Lema 2.22(b) implican que $A := H_s(K_{H_s}) \cup H_t(K_{H_t})$ tiene medida 0. Por el Lema 2.22(a) $\mathbb{R}^N \backslash A$ es denso en $\mathbb{R}^N$. En seguida, existe $z \in V \backslash A$, es decir, $z \in V$ es un valor regular de H_s y de H_t. Notemos que (2.63) y $|z - y(s)| \leq \rho_0/4$ implican que

$$\operatorname{dist}(z, H_s(\partial\Omega)) \geq \frac{\rho_0}{2}. \tag{2.64}$$

Utilizando (2.63) otra vez obtenemos que

$$|z - y(s)| \leq \frac{\rho_0}{4} < \frac{3\rho_0}{4} \leq \operatorname{dist}(y(s), H_s(\partial\Omega)).$$

Entonces la Definición 2.45 nos dice que

$$\deg(H_s, \Omega, y(s)) = \deg(H_s, \Omega, z). \tag{2.65}$$

Similarmente obtenemos

$$\deg(H_t, \Omega, y(t)) = \deg(H_t, \Omega, z). \tag{2.66}$$

Las desigualdades $\|H_s - H_t\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\rho_0}{4}$ (definición de δ, s y t), (2.64) y la Proposición 2.47 implican que

$$\deg(H_s, \Omega, z) = \deg(H_t, \Omega, z). \tag{2.67}$$

Juntando las ecuaciones anteriores, deducimos para estos s, t que

$$\begin{aligned}
\deg(h_s, \Omega, y(s)) &= \deg(H_s, \Omega, y(s)), && \text{por (2.62)},\\
&= \deg(H_s, \Omega, z), && \text{por (2.65)},\\
&= \deg(H_t, \Omega, z), && \text{por (2.67)},\\
&= \deg(H_t, \Omega, y(t)), && \text{por (2.66)},\\
&= \deg(h_t, \Omega, y(t)), && \text{por (2.62)}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Definimos $\varphi \colon J \to \mathbb{Z}$ por $\varphi(t) := \deg(h_t, \Omega, y(t))$. La ecuación (2.68) implica que φ es localmente constante, es decir, $\varphi \in C(J)$. Como en la demostración de la Proposición 2.47 obtenemos por el teorema del valor intermedio que φ es constante en J. $\square$

3. Propiedades y Aplicaciones del Grado

3.1. Conexidad

En esta sección sean X, Y espacios métricos. Un *camino* (o un *arco*) en un espacio métrico X es un mapeo continuo $\gamma\colon [0,1] \to X$. Un camino γ *junta dos puntos* $x, y \in X$ si $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

3.1 Definición. X es *conexo* si X y $\varnothing$ son los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados al mismo tiempo. X es *arcoconexo* si para todo $x, y \in X$ existe un camino en X juntando x y y. $A \subseteq X$ es (arco)conexo si es (arco)conexo en si mismo, respecto a la topología inducida por X.

Por definición, los *intervalos* son los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$.

3.2 Proposición. *Los intervalos son precisamente los subconjuntos conexos de* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Sea J un intervalo en $\mathbb{R}$. Demostremos que J es conexo. Sea $A \neq \varnothing$ un subconjunto de J, abierto y cerrado relativamente en J. Tenemos que mostrar que $A = J$. Razonemos por contradicción, suponiendo que existe $x \in J \setminus A$. Sea $y \in A$ y supongamos que $x < y$ (el otro caso se trata similarmente). Definimos

$$\alpha := \inf\{\, z \in A \mid z > x \,\}.$$

Se sigue que $x \leq \alpha \leq y$ y entonces que $\alpha \in J$ porque J es un intervalo y $x, y \in J$. Como A es cerrado en J, $\alpha \in A$ y en consecuencia $\alpha > x$. Como A es abierto relativo a J y J es un intervalo, existe $z \in A$ tal que $x < z < \alpha$. Esto contradice la definición de α. Concluimos que $A = J$.

Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ conexo. Suponiendo que $x, y \in J$ y $x \leq y$ hay que mostrar que $[x, y] \subseteq J$. Sea $z \in [x, y]$. Si $z \notin J$, entonces $z \in (x, y)$. Definimos

$$J_1 := \{\, w \in J \mid w > z \,\}.$$

Como $y \in J_1$, $J_1 \neq \varnothing$. Como $x \in J \setminus J_1$, $J_1 \neq J$. $J_1 = [z, \infty) \cap J$ implica que J_1 es cerrado en J, y $J_1 = (z, \infty) \cap J$ implica que J_1 es abierto en J. Esto contradice la conexidad de J. $\square$

3.3 Lema. *Sea X arcoconexo. Entonces X es conexo.*

Demostración. Sea $A \neq \varnothing$ un subconjunto de X, abierto y cerrado. Si $A \neq X$, entonces existen $x \in A$ y $y \in X \backslash A$ y un camino γ de x a y. Definimos $B := \gamma^{-1}(A) \subseteq [0,1]$. Se sigue que $B \neq \varnothing$, $B \neq [0,1]$, y que B es abierto y cerrado en $[0,1]$ porque γ es continuo. Eso contradice la conexidad de $[0,1]$, dada por la Proposición 3.2. En consecuencia, $A = X$. $\square$

3.4 Nota. Conexidad es estrictamente mas débil que arcoconexidad: Sea

$$X := \overline{\{\, (t, \sin(1/t)) \mid t \in (0,1] \,\}} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Entonces X es conexo pero no arcoconexo.

3.5 Lema. *Cualquier unión de subconjuntos (arco)conexos de X que tienen un punto en común es (arco)conexo.*

Demostración. Sea $A := \bigcup_{\iota \in J} A_\iota$ una unión de conexos $A_\iota \subseteq X$ tal que $x \in \bigcap_{\iota \in J} A_\iota$. Sea $B \subseteq A$ no vacío, abierto y cerrado (en A). Si $B \neq A$, entonces supongamos sin restricción que $x \in B$ (tomando el complemento de B en A en vez de B si no es el caso). Existe A_ι tal que $A_\iota \backslash B \neq \varnothing$. A_ι tiene la topología inducida por la topología en A. Por eso $A_\iota \cap B$ es abierto y cerrado en A_ι. Además $x \in A_\iota \cap B$ y $A_\iota \cap B \neq A_\iota$. Eso contradice la conexidad de A_ι. Por lo tanto $B = A$.

La demostración es trivial para arcoconexos porque siempre existen caminos que juntan puntos con el punto común. $\square$

3.6 Lema. *Sea $A \subseteq X$ conexo. Entonces B es conexo si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.*

Demostración. Sea $C \subseteq B$ no vacío, abierto y cerrado en B. Demostremos que $C = B$. Entonces existen U abierto en X, Z cerrado en X, tal que $C = B \cap U = B \cap Z$. Sea $x \in C$. Como $x \in \overline{A}$ y U es una vecindad de x, existe $y \in U \cap A = U \cap B \cap A = C \cap A =: C_1$ y C_1 es abierto en A. Aquí usamos que $A \cap B = A$ porque $A \subseteq B$. Como $C_1 = C \cap A = Z \cap B \cap A = Z \cap A$, C_1 es cerrado en A. A siendo conexo implica que $C_1 = A$, es decir, $A = Z \cap A$ o $A \subseteq Z$. Por lo tanto $B \subseteq \overline{A} \subseteq Z$ y luego $C = B \cap Z = B$. $\square$

3.7 Definición. Sea $x \in X$. Definimos la *componente conexa $C(x)$ de x* como la unión de todos subconjuntos conexos de X que contienen x. Similarmente, definimos la *componente arcoconexa $AC(x)$ de x* como la unión de todos subconjuntos arcoconexos de X que contienen x.

3.8 Nota. Se dice que un conjunto A es *maximal respecto a una propiedad* si cada conjunto $B \supseteq A$ con esta propiedad cumple $B = A$.

3.9 Lema. *(a) Para $x \in X$, $C(x)$ es maximal respecto a ser conexo y contener x.*

(b) Para $x \in X$, $AC(x)$ es maximal respecto a ser arcoconexo y contener x.

(c) El conjunto te todas componentes (arco)conexas forma una partición de X.

(d) $C(x)$ es cerrado en X para $x \in X$.

Demostración. **(a)** $C(x)$ es conexo por el Lema 3.5. Sea $A \subseteq X$ conexo y $x \in A$. Por definición $A \subseteq C(x)$.

(b) se demuestra similarmente.

(c) Si $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, demostremos que $C(x) = C(y)$. El Lema 3.5 implica que $C(x) \cup C(y)$ es conexo y contiene x. Como $C(x)$ es maximal respecto a estas propiedades, $C(x) \cup C(y) \subseteq C(x)$, es decir, $C(y) \subseteq C(x)$. Similarmente $C(x) \subseteq C(y)$, es decir, $C(x) = C(y)$. Además, obviamente $\{ C(x) \mid x \in X \}$ es una cubierta de X. Esto demuestra que $\{ C(x) \mid x \in X \}$ es una partición de X.

La prueba para los $AC(x)$ es igual.

(d) Por el Lema 3.6 $\overline{C(x)}$ es conexo y contiene x. La maximalidad de $C(x)$ implica que $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$, es decir, $C(x)$ es cerrado. □

3.10 Nota. En general, $AC(x)$ no es cerrado: La componente arcoconexa del punto $(1, \sin(1))$ en el ejemplo de la Nota 3.4 es $\{ (t, \sin(1/t)) \mid t \in (0,1] \}$, que es un subconjunto no cerrado.

3.11 Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Entonces coinciden las componentes conexas y las componentes arcoconexas de Ω. Además, las componentes (arco)conexas de Ω son abiertas en Ω (y en $\mathbb{R}^N$), y cerradas en Ω.*

Demostración. Sean $x \in \Omega$ y $y \in AC(x)$. Existe $r > 0$ tal que $B_r(y) \subseteq \Omega$. Es claro que $B_r(y) \subseteq AC(y) = AC(x)$. Eso implica que $AC(x)$ es abierto en $\mathbb{R}^N$ y en Ω.

Como todas componentes arcoconexas de Ω son abiertas en Ω y forman una partición de Ω, se sigue que también son cerradas en Ω.

Sea $x \in \Omega$. Como $AC(x)$ es arcoconexo, el Lema 3.3 dice que $AC(x)$ es conexo. Por el Lema 3.9(a) $AC(x) \subseteq C(x)$. Como $AC(x)$ es abierto y cerrado en Ω, también es abierto y cerrado en $C(x)$, es decir, $AC(x) = C(x)$ porque $C(x)$ es conexo y $AC(x) \neq \varnothing$. □

3.2. Propiedades y Aplicaciones Básicas

Para $N \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{A}_N := \{ (f, \Omega, y) \mid \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ abierto y acotado, } f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega) \}, \tag{3.1}$$

el conjunto de los triples admisibles en dimensión N. La Definición 2.48 da el grado como una aplicación $\deg\colon \mathcal{A}_N \to \mathbb{Z}$ con las propiedades (D1)–(D3).

3.12 Proposición. *El grado cumple las siguientes propiedades adicionales:*

(D4) $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$ *implica que* $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.

(D5) $\deg(\cdot, \Omega, y)$ *y* $\deg(f, \Omega, \cdot)$ *son funciones constantes en* $B_\rho(f; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N))$ *y* $B_\rho(y; \mathbb{R}^N)$, *respectivamente, donde* $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$*. Además,* $\deg(f, \Omega, \cdot)$ *es constante en toda componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$*.*

(D6) $\deg(g, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y)$ *si* $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$*.*

(D7) $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y)$ *para todo subconjunto abierto* Ω_1 *de* Ω *tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$*.*

Demostración. **(D4)** Mostramos en el segundo párrafo de la prueba de la Proposición 2.26 que $f^{-1}(y) = \varnothing$ implica que $\deg(f, \Omega, y) = 0$.

(D5) La primera afirmación fue demostrada en la Tarea 3, Nº5. La segunda afirmación sigue así: Si y_1 y y_2 están en la misma componente conexa, la Proposición 3.11 implica que existe un camino $y(t)$ de y_1 a y_2 en $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. La propiedad (D3) dice que $\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2)$.

(D6) Este es un caso especial de la Tarea 3, Nº5(b).

(D7) Esto es una consecuencia de las propiedades (D4) y (D2) donde $\Omega_2 = \varnothing$. □

3.13 Teorema (Brouwer)**.** *Sea* $K \subseteq \mathbb{R}^N$ *compacto, convexo y no vacío, y sea* $f\colon K \to K$ *continuo. Entonces* f *tiene un punto fijo. Lo mismo se cumple si* K *es homeomorfo a un conjunto compacto, convexo y no vacío en* $\mathbb{R}^N$*.*

Demostración. Demostremos que $x - f(x)$ tiene un cero en K. Primero supongamos que $K = \overline{B}_r$ para $r > 0$. Si existe $x \in S_r$ tal que $f(x) = x$ entonces concluimos. Si no, entonces $x - f(x) \neq 0$ para todo $x \in S_r$. La homotopía $h(t, x) = (1-t)x + t(x - f(x)) = x - tf(x)$ de $\mathrm{id}_{\overline{B}_r}$ a $\mathrm{id}_{\overline{B}_r} - f$ cumple para $x \in S_r$ y $t \in [0, 1)$ que

$$|h(t, x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq (1-t)r > 0.$$

Para $t = 1$ y $x \in S_r$ tenemos que $h(t, x) = x - f(x) \neq 0$. Entonces $0 \in B_r$, (D3) y (D1) implican que $\deg(\mathrm{id} - f, B_r, 0) = 1$. Por eso (D4) dice que $x - f(x) = 0$ para un $x \in B_r$.

Si K es general como en la formulación del teorema, extendemos f a $\mathbb{R}^N$ como en la Proposición 2.14, y denotemos la extensión continua por g. La Nota 2.15 y convexidad de K implican que $g(\mathbb{R}^N) \subseteq K$. Encontramos $r > 0$ suficiente grande tal que $K \subseteq \overline{B}_r$. En consecuencia, $g(\overline{B}_r) \subseteq K \subseteq \overline{B}_r$. Por la primera parte existe un punto fijo x de g en $\overline{B}_r$, es decir en K. Como $g|_K = f$, x es un punto fijo de f.

Sean K un espacio métrico, $f\colon K \to K$ continuo, $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, convexo y no vacío, y sea $\varphi\colon K \to A$ un homeomorfismo, es decir, φ es biyectivo y φ, φ^{-1} son continuos. Entonces $g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ tiene un punto fijo x en A por la parte anterior, y en consecuencia $\varphi^{-1}(x)$ es un punto fijo de f:

$$f(\varphi^{-1}(x)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1} \circ g)(x) = \varphi^{-1}(x).$$

□

3.14 Definición. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Una *retracción de X a A* es una aplicación continua $\varphi\colon X \to A$ tal que $\varphi|_A = \mathrm{id}_A$. En este caso A es un *retracto de X.*

3.15 Ejemplo. $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \overline{B}_1$, dado por

$$\varphi(x) := \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{x}{|x|}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

es una retracción de $\mathbb{R}^N$ a $\overline{B}_1$.

3.16 Corolario (al teorema de Brouwer)**.** *No existe ninguna retracción de $\overline{B}_r$ a S_r.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que φ es una retracción de $\overline{B}_r$ a S_r. Entonces $-\varphi$ tiene un punto fijo x en $\overline{B}_r$ por el Teorema 3.13. Como $\varphi(\overline{B}_r) \subseteq S_r$ se sigue que $x \in S_r$, es decir, $x \neq 0$ también es punto fijo de φ. Se sigue que $\varphi(x) = x = -\varphi(x) = -x$. ¡Contradicción! □

3.17 Proposición (Teorema del Erizo)**.** *Sean N impar, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado tal que $0 \in \Omega$, y sea $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$. Entonces existen $x \in \partial\Omega$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda x$.*

Demostración. Extendemos f continuamente a $\overline{\Omega}$ utilizando la Proposición 2.14. Como N es impar tenemos que $\deg(-\mathrm{id}, \Omega, 0) = -1$. Si $\deg(f, \Omega, 0) \neq -1$ definimos la homotopía $h(t, x) = (1-t)f(x) - tx$ de f a $-\mathrm{id}$. Por (D3) existen $t_0 \in [0, 1)$ y $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $h(t_0, x_0) = 0$. Obtenemos que

$$f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0} x_0.$$

Si $\deg(f, \Omega, 0) = -1$ utilicemos la homotopía lineal de f a id, $\deg(\mathrm{id}, \Omega, 0) = 1$ y un argumento similar. □

3.18 Nota. El nombre del último teorema se entiende así: Para cualquier $r > 0$ la bola $\overline{B}_r\mathbb{R}^3$ simboliza el erizo. Los pinchos en $S_r\mathbb{R}^3$ son dados por un campo vectorial $f\colon S_r \to \mathbb{R}^3$. Un punto de calva es un cero de f. Peinar significa poner los pinchos en posición tangencial a S_r, es decir, tal que $f(x) \cdot x = 0$ para todo $x \in S_r$. Si f es continuo y tangencial, por la Proposición 3.17 existen $x_0 \in S_r$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \lambda x_0$. Entonces

$$\lambda = \frac{\lambda}{r^2} x_0 \cdot x_0 = \frac{1}{r^2} f(x_0) \cdot x_0 = 0,$$

es decir, $f(x_0) = \lambda x_0 = 0$. En consecuencia, la Proposición 3.17 dice que uno no puede peinar el erizo continuamente sin punto de calva.

3.19 Ejemplo. El teorema del erizo no es válido en dimensión par. Por ejemplo, para $N = 2$ el campo vectorial f en S_1 dado por

$$f(x) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

es continuo, tangencial y no tiene cero.

3.20 Proposición. *Sea $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\frac{f(x) \cdot x}{|x|} \to \infty \qquad \textit{cuando } |x| \to \infty. \tag{3.2}$$

Entonces $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$.

Demostración. Fijamos $y \in \mathbb{R}^N$ y definimos $h(t,x) := (1-t)f(x) + tx$. Sea $r \geq 2|y| + 1$ tan grande que

$$\frac{f(x) \cdot x}{|x|} \geq 2|y| + 1 \qquad \text{para todo } x \in S_r.$$

Con esto calculamos para $x \in S_r$:

$$\begin{aligned}(h(t,x) - y) \cdot x &= (1-t)f(x) \cdot x + tr^2 - y \cdot x \\ &\geq (1-t)(2|y|+1)r + t(2|y|+1)r - |y|r = (|y|+1)r > 0.\end{aligned}$$

Ésto implica por (D1) y (D3) que $\deg(f, B_r, y) = \deg(\mathrm{id}, B_r, y) = 1$, es decir, $f^{-1}(y) \cap B_r \neq \varnothing$. □

3.3. El Teorema de Borsuk

En muchas situaciones nos interesa demostrar que un grado no es cero, para encontrar un cero de una función. La existencia de ciertas simetrías puede facilitar ésto.

En esta sección analizaremos la simetría dada por la acción isométrica antipodal del grupo abeliano $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ en $\mathbb{R}^N$ (la operación en $\mathbb{Z}_2$ es dada por $1 + 1 = 0$). Esta acción se define por $\delta x := (-1)^\delta x$ para $\delta \in \mathbb{Z}_2$.

En estas notas solamente tratarémos esta simetría. En seguida, tienen razón los siguientes acuerdos: un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es *simétrico* si $-A = A$. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es simétrico y $f\colon A \to \mathbb{R}^M$ es una aplicación, decimos que f es *invariante* (o *par*) si $f(-x) = f(x)$, y que f es *equivariante* (o *impar*) si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.

3.21 Teorema (Teorema de Borsuk)**.** *Sea $(f, \Omega, 0) \in \mathcal{A}_N$ tal que Ω es simétrico, $0 \in \Omega$, y f es impar. Entonces $\deg(f, \Omega, 0)$ es impar (particularmente no es cero).*

Demostración. **Caso 1**, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y 0 es un valor regular de f: Para $x \in \Omega$ calculamos

$$\frac{f(-x+h) - f(-x) - \mathrm{D}f(x)h}{|h|} = \frac{-(f(x-h) - f(x) - \mathrm{D}f(x)[-h])}{|h|} \to 0$$

cuando $|h| \to 0$, por la definición de $\mathrm{D}f(x)$. Ésto implica que $\mathrm{D}f(-x) = \mathrm{D}f(x)$, es decir, $\mathrm{D}f$ es una función par. En consecuencia, también $\operatorname{sgn} J_f$ es una función par. Como $f(x) = 0$

si y sólo si $f(-x) = 0$, tenemos que $f^{-1}(0)\backslash\{0\}$ tiene un numero par de elementos. Como f es impar, $f(0) = 0$. Se sigue que

$$\deg(f, \Omega, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn} J_f(x) = \operatorname{sgn} J_f(0) + \sum_{x \in f^{-1}(0)\backslash\{0\}} \operatorname{sgn} J_f(x)$$

es impar.

Caso 2, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y 0 es un punto regular de f: Definimos

$$W_k := \{\, x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0 \,\}$$

y

$$\Omega_k := \Omega \backslash W_k$$

para $k = 1, 2, \ldots, N$. Eso implica que $W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_N = \{0\}$, que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_N = \Omega\backslash\{0\}$ y que los Ω_k son conjuntos abiertos y simétricos. Para $k = 1, 2, \ldots, N$ construiremos funciones $g_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ por inducción tales que

$$g_k \text{ es impar,} \tag{3.3}$$

$$0 \text{ es un punto regular de } g_k, \tag{3.4}$$

$$g_k^{-1}(0) \cap K_{g_k}(\Omega_k) = \varnothing, \tag{3.5}$$

$$\|f - g_k\|_\infty \le \frac{k \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))}{2N}. \tag{3.6}$$

Entonces aplica el Caso 1 a g_N porque g_N tiene 0 como valor regular, es decir, $\deg(g_N, \Omega, 0)$ es impar. Además, la definición del grado y $\|f - g_N\|_\infty < \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))$ implican que

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g_N, \Omega, 0).$$

Falta construir los g_k: Definimos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ por $\varphi(t) := t^3$. Ponemos $\rho := \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))$ y escogemos $r > 0$ tal que $\Omega \subset \overline{B}_r$. Ponemos $g_0 := f$, $W_0 := \mathbb{R}^N$ y $\Omega_0 := \varnothing$. Por lo tanto g_0 cumple (3.3)–(3.6) para $k = 0$. Si está construido g_{k-1} para un $k \in \{\, 1, 2, \ldots, N \,\}$ que cumple (3.3)–(3.6) (donde k está reemplazado por $k-1$), entonces definimos $V_k := \{\, x \in \Omega \mid x^k \neq 0 \,\} \subset \Omega_k$ y la función $h_k \in C^1(V_k, \mathbb{R}^N)$ por $h_k(x) := g_{k-1}(x)/\varphi(x^k)$. Usando el Lema de Sard escogemos $y_k \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$2|y_k| r^3 N \le \rho \tag{3.7}$$

y tal que y_k es un valor regular de h_k. Definimos $g_k(x) := g_{k-1}(x) - \varphi(x^k) y_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Es obvio que g_k cumple (3.3). Como $\varphi'(0) = 0$, tenemos que $\mathrm{D}g_k(0) = \mathrm{D}g_{k-1}(0)$, es decir, g_k cumple (3.4).

Necesitamos que demostrar que un cero x de g_k en Ω_k es un punto regular de g_k. Primero sea $x \in V_k$. Se sigue que

$$y_k = \frac{g_{k-1}(x)}{\varphi(x^k)} = h_k(x). \tag{3.8}$$

Como y_k es un valor regular de h_k tenemos para $v \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ que

$$
\begin{aligned}
0 &\neq \mathrm{D}h_k(x)[v] \\
&= \frac{1}{\varphi(x^k)}\mathrm{D}g_{k-1}(x)[v] - \frac{1}{\varphi(x^k)^2}\varphi'(x^k)v^k g_{k-1}(x) \\
&= \frac{1}{\varphi(x^k)}\left(\mathrm{D}g_{k-1}(x)[v] - \varphi'(x^k)v^k h_k(x)\right).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Las calculaciones (3.8) y (3.9) implican que

$$\mathrm{D}g_k(x)[v] = \mathrm{D}g_{k-1}(x)[v] - \varphi'(x^k)v^k y_k = \mathrm{D}g_{k-1}(x)[v] - \varphi'(x^k)v^k h_k(x) \neq 0,$$

es decir, x es un punto regular de g_k. Segundo, sea $x \in \Omega_k \backslash V_k$, es decir, $x \in \Omega_k$ y $x^k = 0$. Por lo tanto, $x \in \Omega_{k-1}$. Se sigue que $0 = g_k(x) = g_{k-1}(x)$ y $\mathrm{D}g_k(x) = \mathrm{D}g_{k-1}(x)$, porque $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Como 0 es un valor regular de $g_{k-1}|_{\Omega_{k-1}}$ tenemos que $J_{g_k}(x) = J_{g_{k-1}}(x) \neq 0$. Eso demuestra la propiedad (3.5).

Para demostrar la propiedad (3.6) calculamos para $x \in \overline{\Omega}$, usando (3.7) y $\Omega \subset \overline{B}_r$:

$$|g_{k-1}(x) - g_k(x)| = |\varphi(x^k)y_k| \leq r^3|y_k| \leq \frac{\rho}{2N}.$$

Con la hipótesis de inducción eso implica que

$$\|f - g_k\|_\infty \leq \|f - g_{k-1}\|_\infty + \|g_{k-1} - g_k\|_\infty \leq \frac{(k-1)\rho}{2N} + \frac{\rho}{2N} = \frac{k\rho}{2N},$$

es decir (3.6). Eso finaliza la demostración del caso 2.

Caso 3, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$: Reduciremos este caso al caso 2, aproximando f por una función $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ que es impar y tal que $\|f - g\|_\infty < \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))$ y 0 es un punto regular de g. Supongamos que $\Omega \subset \overline{B}_r$, y ponemos $\rho := \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))$. Primero aproximamos f por un $g_1 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - g_1\|_\infty \leq \rho/2$ y definimos $g_2(x) := (g_1(x) - g_1(-x))/2$. Escogemos $\delta \in (0, \rho/(2r))$ que no es un valor propio de $\mathrm{D}g_2(0)$ y definimos $g(x) := g_2(x) - \delta x$. Se sigue que $J_g(0) \neq 0$ y que g es impar. Además, usando $f(x) = (f(x) - f(-x))/2$, tenemos para $x \in \overline{\Omega}$ que

$$
\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - g_2(x)| + |\delta x| \\
&\leq \frac{1}{2}(|f(x) - g_1(x)| + |f(-x) - g_1(-x)|) + r\delta \\
&< \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \frac{\rho}{2} \\
&= \rho
\end{aligned}
$$

y concluimos. □

3.22 Corolario. *Sea* $(f, \Omega, 0) \in \mathcal{A}_N$ *tal que* Ω *es simétrico,* $0 \in \Omega$ *y tal que* $f(-x) \neq \lambda f(x)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *y* $\lambda \geq 1$*. Entonces* $\deg(f, \Omega, 0)$ *es impar.*

Demostración. La función $g(x) := (f(x) - f(-x))/2$ es impar. Definimos $h(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x)$. Si $h(t, x) = 0$ para un $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$0 = (1-t)f(x) + \frac{t}{2}(f(x) - f(-x)). \tag{3.10}$$

Ésto no puede pasar para $t = 0$ porque $0 \notin f(\partial\Omega)$. Entonces $t > 0$ y (3.10) implican que

$$f(-x) = \underbrace{\left(\frac{2}{t} - 1\right)}_{\geq 1} f(x).$$

¡Contradicción! Por lo tanto el Teorema 3.21 implica que

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$$

es impar. □

3.4. Aplicaciones del Teorema de Borsuk

3.23 Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, acotado, simétrico y tal que $0 \in \Omega$. Si $M \in \mathbb{N}$ cumple $M < N$ y si $f\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^M$ es continua, entonces existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(-x) = f(x)$.*

Demostración. Definimos $g(x) := f(x) - f(-x)$. Como existe un encaje natural de $\mathbb{R}^M$ en $\mathbb{R}^N$ como subespacio, tenemos que $g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ es impar. Extendemos g a una función $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $g(\overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{R}^M$. Razonando por contradicción supongamos que $f(-x) \neq f(x)$, es decir, $g(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Como g es impar y no tiene cero en $\partial\Omega$ podemos aplicar propiedad (D5) y el Corolario 3.22 para obtener que

$$\deg(g, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, 0) \neq 0$$

para y en la componente conexa $C(0)$ de $\mathbb{R}^N \backslash g(\partial\Omega)$. La propiedad (D4) dice que $C(0) \subseteq g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^M$. Pero por la Proposición 3.11 $C(0)$ es abierta en $\mathbb{R}^N$. Esto contradice $M < N$. □

3.24 Nota. En meteorología uno puede interpretar el corolario anterior así: Siempre existe una pareja de puntos antipodales en la tierra con el mismo estado del tiempo (respecto a los dos parámetros temperatura y presión).

3.25 Teorema. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ como en el Corolario 3.23. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \partial\Omega$ conjuntos cerrados que cubren $\partial\Omega$, tal que $A_k \cap (-A_k) = \varnothing$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $n \geq N + 1$.*

Demostración. Suponiendo que $n \leq N$ razonemos por contradicción. Definimos $f^k \equiv 1$ en A_k y $f^k \equiv -1$ en $-A_k$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Eso es posible porque $A_k \cap (-A_k) = \varnothing$ para todo k. Extendemos los f^k continuamente a $\overline{\Omega}$, usando la Proposición 2.14 y que los A_k son compactos. Definimos $f^k(x) = 1$ para $x \in \overline{\Omega}$ y $k = n, n+1, \ldots, N$. Entonces hemos definido una aplicación $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ por sus coordenadas.

Demostremos que

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \cup (-A_k)). \tag{3.11}$$

Sea $x \in \partial\Omega$. Si $x \in A_n$, entonces $-x \notin A_n$. Como los A_k cubren $\partial\Omega$ se sigue que $-x \in A_k$ para un $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, es decir, $x \in -A_k$. Eso implica (3.11).

Demostremos que

$$f(-x) \neq \lambda f(x) \qquad \text{para todo } x \in \partial\Omega \text{ y } \lambda \geq 0. \tag{3.12}$$

Si $x \in \partial\Omega$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $x \in A_k$ o $x \in -A_k$. En el primer caso tenemos que $f^k(x) = 1 = -(-1) = -f^k(-x)$, y en el segundo caso tenemos que $f^k(x) = -1 = -f^k(-x)$. Resumando, para todo $x \in \partial\Omega$ existe k tal que

$$f^k(-x) = -f^k(x) \neq 0.$$

Ésto implica (3.12).

El Corolario 3.22 dice que por (3.12) existe un cero de f en Ω. Pero eso contradice $f^N \equiv 1$. □

3.26 Nota. En el caso especial $\Omega = B_r\mathbb{R}^N$, uno necesita solo $N+1$ conjuntos cerrados que no contienen una pareja de puntos antipodales para cubrir $S_r\mathbb{R}^N$. Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ uno necesita tres arcos con apertura $2\pi/3$.

3.27 Proposición (El problema del sandwich con jamón)**.** *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_N$ subconjuntos medibles de Lebesgue y acotados en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe un hiperplano que corta A_k en medio respecto a su medida, al mismo tiempo para todo $k = 1, \ldots, N$.*

3.28 Nota. La Proposición 3.27 se trata de compartir de manera justa un sandwich con jamón: $N = 3$, dos piezas de pan y una pieza de jamón.

Demostración. Sea $P\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ la proyección a las primeras N coordenadas, es decir, $Px = (x^1, x^2, \ldots, x^N)^T$. Ponemos $x_{\mathrm{N}} := \{0, 0, \ldots, 0, 1\} \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $x_{\mathrm{S}} := \{0, 0, \ldots, 0, -1\} \in \mathbb{R}^{N+1}$ (polo norte y polo sur de $S_1\mathbb{R}^{N+1}$) y $S^* := S_1\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{x_{\mathrm{N}}, x_{\mathrm{S}}\}$. Definimos aplicaciones continuas $v, w\colon S^* \to \mathbb{R}^N$ por

$$v(x) := \frac{x^{N+1} Px}{|Px|^2},$$
$$w(x) := \frac{Px}{|Px|}.$$

También definimos para cada $x \in S^*$ el subespacio afino

$$H(x) := \{\, y \in \mathbb{R}^N \mid (y - v(x)) \cdot w(x) = 0 \,\}$$

y los conjuntos abiertos

$$\begin{aligned} H^+(x) &:= \{\, y \in \mathbb{R}^N \mid (y - v(x)) \cdot w(x) > 0 \,\}, \\ H^-(x) &:= \{\, y \in \mathbb{R}^N \mid (y - v(x)) \cdot w(x) < 0 \,\}. \end{aligned}$$

Se sigue que $\mathbb{R}^N = H(x) \cup H^+(x) \cup H^-(x)$ y que $H(x)$ corta un subconjunto A_k en medio si $\mu_N(H^+(x) \cap A_k) = \mu_N(H^-(x) \cap A_k)$, donde μ_N significa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Aquí usamos que $\mu_N(H) = 0$ para un subespacio afino H de dimensión $< N$ en $\mathbb{R}^N$. Además tenemos que

$$v(-x) = v(x), \tag{3.13}$$

$$w(-x) = -w(x), \tag{3.14}$$

$$H(-x) = H(x), \tag{3.15}$$

$$H^+(-x) = H^-(x). \tag{3.16}$$

Definimos $f\colon S_1\mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ por

$$f^k(x) := \begin{cases} 0 & x = x_{\mathrm{N}}, \\ \mu_N(A_k) & x = x_{\mathrm{S}}, \\ \mu_N(H^+(x) \cap A_k) & x \in S^*. \end{cases}$$

Demostraremos que f es continua. Entonces el corolario 3.23 implica que existe $x \in S_1\mathbb{R}^{N+1}$ con $f(-x) = f(x)$. Por (3.16) eso implica que $H(x)$ corta todos A_k en dos partes iguales, al mismo tiempo.

Falta demostrar que f es continua. Sea $r > 0$ tal que $A_k \subseteq \overline{B}_r\mathbb{R}^N$ para todo k.

Primero sean $x \in S^*$ y $(x_n) \subseteq S^*$ tales que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Fijamos k y demostremos que $f^k(x_n) \to f^k(x)$. Para dos conjuntos A, B denotamos $A\Delta B := A\backslash B \cup B\backslash A$, la diferencia simétrica de A y B. Definimos

$$\chi_n := \chi_{(H^+(x)\Delta H^+(x_n))\cap \overline{B}_r},$$

la función característica del conjunto $(H^+(x)\Delta H^+(x_n)) \cap \overline{B}_r$. Demostremos que $\chi_n(y) \to 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N \backslash H(x)$: Si $y \in H^+(x)$, entonces $(y - v(x)) \cdot w(x) > 0$. Por la continuidad de v y w existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(y - v(x_n)) \cdot w(x_n) > 0$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $y \in H^+(x_n)$. En consecuencia, $\chi_n(y) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Similarmente $\chi_n(y) \to 0$ si $y \in H^-(x)$. Tenemos que $\chi_n \to 0$ en c.t.p. en $\mathbb{R}^N$ y que $0 \leq \chi_n \leq \chi_{\overline{B}_r}$. Como $\chi_{\overline{B}_r} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ el teorema de Lebesgue implica que $\chi_n \to 0$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\mu_N((H^+(x)\Delta H^+(x_n)) \cap \overline{B}_r) = \int_{(H^+(x)\Delta H^+(x_n))\cap \overline{B}_r} \mathrm{d}\mu_N = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_n \,\mathrm{d}\mu_N \to 0.$$

Ésto implica que

$$\begin{aligned}
|f^k(x) - f^k(x_n)| &= |\mu_N(H^+(x) \cap A_k) - \mu_N(H^+(x_n) \cap A_k)| \\
&= |\mu_N((H^+(x) \backslash H^+(x_n)) \cap A_k) - \mu_N((H^+(x_n) \backslash H^+(x)) \cap A_k)| \\
&\leq \mu_N((H^+(x) \backslash H^+(x_n)) \cap A_k) + \mu_N((H^+(x_n) \backslash H^+(x)) \cap A_k) \\
&= \mu_N((H^+(x) \Delta H^+(x_n)) \cap A_k) \\
&\leq \mu_N((H^+(x) \Delta H^+(x_n)) \cap \overline{B}_r) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

Segundo demostremos continuidad de f^k en x_{N}: Sea $(x_n) \subseteq S^*$ tal que $x_n \to x_{\mathrm{N}}$. Como $x_{\mathrm{N}}^{N+1} = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_n^{N+1}}{|Px_n|} \geq r \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Ésto implica para $n \geq n_0$ y $y \in H^+(x_n)$ que

$$0 < (y - v(x_n)) \cdot w(x_n) = y \cdot w(x_n) - v(x_n) \cdot w(x_n) \leq |y| - \frac{x_n^{N+1}}{|Px_n|} \leq |y| - r.$$

Por lo tanto $H^+(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \overline{B}_r$ y $f^k(x_n) = 0$ para $n \geq n_0$. Eso demuestra que $f^k(x_n) \to 0 = f^k(x_{\mathrm{N}})$ cuando $n \to \infty$.

Tercero demostremos continuidad de f^k en x_{S}: Sea $(x_n) \subseteq S^*$ tal que $x_n \to x_{\mathrm{S}}$. Como $x_{\mathrm{S}}^{N+1} = -1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_n^{N+1}}{|Px_n|} \leq -2r \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Similarmente como antes eso implica que $H^-(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \overline{B}_{2r}$, respectivamente que $\overline{B}_r \subseteq H^+(x_n)$ y $f^k(x_n) = \mu_N(A_k) = f^k(x_{\mathrm{S}})$ para $n \geq n_0$. Se sigue que $f^k(x_n) \to f^k(x_{\mathrm{S}})$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Sean X, Y espacios métricos y $f \colon X \to Y$ una aplicación. Si $f(U)$ es abierto en Y para todo $U \subseteq X$ que es abierto entonces llamamos f una *aplicación abierta*. Si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad U en X tal que $f|_U$ es inyectiva entonces llamamos f *localmente inyectiva*.

3.29 Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y sea $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ localmente inyectiva. Entonces f es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea $y_0 \in f(\Omega)$. Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = y_0$. Definimos $\Omega' := \Omega - x_0$ y $g \in C(\Omega', \mathbb{R}^N)$ por $g(x) := f(x + x_0) - y_0$. Tenemos que Ω' es una vecindad de 0 y que $g(0) = 0$. Es suficiente demostrar que existe $r > 0$ tal que $B_r \subseteq g(\Omega')$ porque luego $B_r(y_0) \subseteq f(\Omega)$.

Sea $\delta > 0$ tan chico que $g|_{\overline{B}_\delta}$ es inyectivo. Definimos

$$h(t,x) := g\left(\frac{1}{1+t}x\right) - g\left(\frac{-t}{1+t}x\right)$$

para $(t,x) \in [0,1] \times \overline{B}_\delta$. Entonces h es una homotopía de g a $g_1(x) := g(x/2) - g(-x/2)$, una aplicación impar. Si $h(t,x) = 0$ para $t \in [0,1]$ y $x \in S_\delta$, entonces

$$\frac{x}{1+t} = \frac{-tx}{1+t}$$

porque $g|_{\overline{B}_\delta}$ es inyectiva. Eso implica que $x = 0$, una contradicción. En consecuencia, el Teorema de Borsuk 3.21 implica que

$$\deg(g, B_\delta, 0) = \deg(g_1, B_\delta, 0) \neq 0.$$

La propiedad (D5) del grado dice que $\deg(g, B_\delta, y) \neq 0$ para todo y en la componente conexa $C(0)$ de $\mathbb{R}^N \backslash g(S_\delta)$, es decir, $C(0) \subseteq g(B_\delta) \subseteq g(\Omega')$. La Proposición 3.11 implica que $C(0)$ es abierto en $\mathbb{R}^N$. Por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B_r \subseteq C(0) \subseteq g(\Omega')$. □

3.5. El Grado de una Composición de Funciones

3.30 Lema. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Entonces el conjunto de componentes conexas de Ω es numerable.*

Demostración. Por ser abierta (Proposición 3.11), toda componente conexa contiene un punto de $\mathbb{Q}^N$. Como las componentes conexas son ajenas, esto define un mapeo inyectivo de las componentes en $\mathbb{Q}^N$, un conjunto numerable.

□

3.31 Lema. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto. Si $N \geq 2$ entonces existe precisamente una componente conexa no acotada V_∞ de $\mathbb{R}^N \backslash K$. Para $N = 1$, si K no es vacío existen precisamente dos componentes conexas no acotadas de $\mathbb{R} \backslash K$ cuya unión denotamos por V_∞. Se cumple que $\mathbb{R}^N \backslash V_\infty$ es acotado. Llamamos V_∞ la* componente conexa pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N \backslash K$ *en ambos casos.*

Demostración. Sea $r > 0$ tan grande que $K \subseteq \overline{B}_r$. Si $N \geq 2$ entonces $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B}_r$ claramente es arcoconexo, es decir conexo, y en consecuencia es un subconjunto de una sola componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash K$ (por la definición de una componente conexa). Eso implica que solo una componente conexa V_∞ contiene una sucesión x_n tal que $|x_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, es decir, no es acotada. Como $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B}_r \subseteq V_\infty$, $\mathbb{R}^N \backslash V_\infty \subseteq \overline{B}_r$ es acotado.

Si $N = 1$ entonces $\mathbb{R} \backslash \overline{B}_r$ consiste de los intervalos $(-\infty, -r)$ y (r, ∞). Como K no es vacío, estos intervalos pertenecen a dos componentes conexas distintas de $\mathbb{R} \backslash K$. El resto sigue como para $N \geq 2$. □

Sea $(f,\Omega,y)\in\mathcal{A}_N$. La propiedad (D5) implica que $\deg(f,\Omega,y)$ es lo mismo para todo y en una componente conexa V de $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$. Por tanto utilizaremos la notación $\deg(f,\Omega,V):=\deg(f,\Omega,y)$ cuando $y\in V$. Como $f(\overline{\Omega})$ es compacto, existe $y\in V_\infty\backslash f(\overline{\Omega})$, donde V_∞ es la componente conexa pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$. La propiedad (D4) dice que $\deg(f,\Omega,V_\infty)=\deg(f,\Omega,y)=0$.

3.32 Teorema. *Sean $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ y V_i las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$. Sea $g\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$. Si $y\in\mathbb{R}^N\backslash g(f(\partial\Omega))$ entonces*

$$\deg(g\circ f,\Omega,y)=\sum_i \deg(f,\Omega,V_i)\deg(g,V_i,y). \tag{3.17}$$

En la suma solo un número finito de términos no es cero.

Demostración. En toda la demostración sea V_∞ la componente pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$. Como $V_i\subseteq\mathbb{R}^N\backslash V_\infty$, el Lema 3.31 implica que $V:=\bigcup_i V_i\subseteq\mathbb{R}^N\backslash V_\infty$ es acotado. Denotamos $K:=f(\overline{\Omega})$ y $L:=g^{-1}(y)$. Tenemos que $L\cap V$ es cerrado en $\mathbb{R}^N$ porque g es continuo y $L\cap f(\partial\Omega)=\varnothing$. Como V es acotado $L\cap V$ es compacto, y por tanto existe un número finito de componentes V_i tal que $L\cap V\subseteq\bigcup_{i=1}^n V_i$. Sea

$$\Lambda:=\{\, i\in\mathbb{N}\mid \deg(f,\Omega,V_i)\neq 0,\ L\cap V_i\neq\varnothing\,\}.$$

Entonces Λ es un conjunto finito. La propiedad (D4) dice que

$$\forall i\in\mathbb{N}\backslash\Lambda:\ \deg(f,\Omega,V_i)=0 \text{ o } \deg(g,V_i,y)=0.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\sum_i \deg(f,\Omega,V_i)\deg(g,V_i,y)=\sum_{i\in\Lambda}\deg(f,\Omega,V_i)\deg(g,V_i,y). \tag{3.18}$$

Eso demuestra que la suma en (3.17) está bien definida. Notemos que $(L\cap K)\backslash V\subseteq V_\infty$. Entonces

$$\forall z\in(L\cap K)\backslash V:\ \deg(f,\Omega,z)=0. \tag{3.19}$$

Demostremos (3.17) en el caso donde $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)\cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $g\in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ y y es un valor regular de $g\circ f$. Para $x\in\Omega$ tenemos que $\mathrm{D}(g\circ f)(x)=\mathrm{D}g(f(x))\mathrm{D}f(x)$ y por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} J_{g\circ f}(x)&=\operatorname{sgn}\det\big(\mathrm{D}g(f(x))\mathrm{D}f(x)\big)\\&=\operatorname{sgn}\big(\det(\mathrm{D}g(f(x)))\det(\mathrm{D}f(x))\big)\\&=\operatorname{sgn} J_g(f(x))\operatorname{sgn} J_f(x).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Como y es un valor regular de $g\circ f$, ésto fácilmente implica que

$$\text{todo } z\in g^{-1}(y) \text{ es un valor regular de } f. \tag{3.21}$$

Si $z \in L \cap K$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $z = f(x)$ (porque $y \in \mathbb{R}^N \backslash g(f(\partial\Omega))$). Luego (3.20) y y siendo regular para $g \circ f$ implica que z es un punto regular de g, es decir, existe $r_z > 0$ tal que $L \cap B_{r_z}(z) = \{z\}$. Ésto demuestra, junto con la compacidad de K, que

$$L \cap K \text{ es un conjunto finito.} \tag{3.22}$$

La propiedad (D4) implica que

$$\forall i \in \Lambda\colon V_i \subseteq K. \tag{3.23}$$

Lo que demostramos antes implica que

$$\forall i \in \Lambda\colon y \text{ es un valor regular de } g|_{V_i}. \tag{3.24}$$

Observamos que

$$(g \circ f)^{-1}(y) = \{\, x \in \Omega \mid f(x) \in L \,\} = f^{-1}(L \cap K) \tag{3.25}$$

y calculamos con sumas finitas

$$\begin{aligned}
\deg(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{x \in (g\circ f)^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_{g\circ f}(x) \\
&= \sum_{x \in (g\circ f)^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_g(f(x)) \operatorname{sgn} J_f(x) && \text{por } (3.20) \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(L\cap K)} \operatorname{sgn} J_g(f(x)) \operatorname{sgn} J_f(x) && \text{por } (3.25) \\
&= \sum_{z \in L\cap K} \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_g(z) \operatorname{sgn} J_f(x) \\
&= \sum_{z \in L\cap K} \operatorname{sgn} J_g(z) \left(\sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_f(x) \right) \\
&= \sum_{z \in L\cap K} \operatorname{sgn} J_g(z) \deg(f, \Omega, z) && \text{por } (3.21) \\
&= \sum_{z \in L\cap K\cap V} \operatorname{sgn} J_g(z) \deg(f, \Omega, z) && \text{por } (3.19) \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \sum_{z \in L\cap V_i} \operatorname{sgn} J_g(z) \deg(f, \Omega, z) && \text{por } (3.23) \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \deg(f, \Omega, V_i) \left(\sum_{z \in L\cap V_i} \operatorname{sgn} J_g(z) \right) \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y) && \text{por } (3.24)
\end{aligned}$$

$$= \sum_i \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y) \qquad \text{por (3.18).}$$

Si f y g son como antes y y es un valor singular de $g \circ f$, entonces encontramos un valor regular y_1 de $g \circ f$ en la componente conexa $C(y)$ de $\mathbb{R}^N \backslash g(f(\partial\Omega))$. Esto implica que y y y_1 pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash g(\partial V_i)$ para todo i, porque $\partial V_i \subseteq f(\partial\Omega)$ y luego $\mathbb{R}^N \backslash g(f(\partial\Omega)) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash g(\partial V_i)$. La propiedad (D5) implica que

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, y) &= \deg(g \circ f, \Omega, y_1)\\ &= \sum_i \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y_1)\\ &= \sum_i \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y).\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Supongamos la representación (3.18) y seguimos utilizando las notaciones K, L y Λ. Para $m \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\Lambda_m := \{\, i \in \Lambda \mid \deg(f, \Omega, V_i) = m \,\},$$

y

$$A_m := \bigcup_{i \in \Lambda_m} V_i.$$

Además, sea

$$M := \{\, m \in \mathbb{Z} \mid \Lambda_m \neq \varnothing \,\}.$$

Entonces M es finito porque $\{\Lambda_m\}_{m \in M}$ es una partición del conjunto finito Λ.

La propiedad (D2) implica que

$$\sum_{i \in \Lambda} \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y) = \sum_{m \in M} m \sum_{i \in \Lambda_m} \deg(g, V_i, y) = \sum_{m \in M} m \deg(g, A_m, y). \tag{3.26}$$

Como $f(\partial\Omega)$ es compacto, L cerrado y $L \cap f(\partial\Omega) = \varnothing$, tenemos que

$$\rho := \operatorname{dist}(L, f(\partial\Omega)) > 0.$$

Encontramos $f_1 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - f_1\|_\infty < \rho$. Tenemos para $t \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$ y $z \in L$ que

$$\begin{aligned}|(1-t)f(x) + tf_1(x) - z| &\geq |f(x) - z| - t|f(x) - f_1(x)|\\ &\geq \rho - |f(x) - f_1(x)| > 0.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Definiendo la homotopía $h(t,x) := g((1-t)f(x) + tf_1(x))$ de $g \circ f$ a $g \circ f_1$, (3.27) implica que $y \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$. Eso resulta en

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \deg(g \circ f_1, \Omega, y). \tag{3.28}$$

Denotamos por $\widetilde{V}_i$ las componentes conexas acotadas y por $\widetilde{V}_\infty$ la componente conexa pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N \backslash f_1(\partial\Omega)$. Definimos $\widetilde{\Lambda}$, $\widetilde{\Lambda}_m$, $\widetilde{A}_m$ y $\widetilde{M}$ análogamente para f_1 como para f.

Para todo $z \in L$ tenemos que $\|f - f_1\|_\infty < \rho \leq \operatorname{dist}(z, f(\partial\Omega))$ y por eso que $\deg(f_1, \Omega, z) = \deg(f, \Omega, z)$. Eso dice que

$$\widetilde{M} = M, \tag{3.29}$$

porque $V_i \cap L \neq \varnothing$ para todo $i \in \Lambda$ y $\widetilde{V}_i \cap L \neq \varnothing$ para todo $i \in \widetilde{\Lambda}$. Además, $A_m \cap L = \widetilde{A}_m \cap L$. En consecuencia, $A_m \cap L \subseteq A_m \cap \widetilde{A}_m$ y $\widetilde{A}_m \cap L \subseteq A_m \cap \widetilde{A}_m$ y luego por (D7)

$$\forall m \in M\colon\ \deg(g, A_m, y) = \deg(g, A_m \cap \widetilde{A}_m, y) = \deg(g, \widetilde{A}_m, y). \tag{3.30}$$

Notamos que $y \in \mathbb{R}^N \backslash g(f_1(\partial\Omega))$ y que $\partial\widetilde{V}_i \subseteq f_1(\partial\Omega)$. Aproximamos g por $g_1 \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\deg(g \circ f_1, \Omega, y) = \deg(g_1 \circ f_1, \Omega, y) \tag{3.31}$$

y

$$\forall i \in \mathbb{N}\colon\ \deg(g, \widetilde{V}_i, y) = \deg(g_1, \widetilde{V}_i, y). \tag{3.32}$$

Finalizamos:

$$\begin{aligned}
\deg(g \circ f, \Omega, y) &= \deg(g \circ f_1, \Omega, y) && \text{por (3.28)} \\
&= \deg(g_1 \circ f_1, \Omega, y) && \text{por (3.31)} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \deg(f_1, \Omega, \widetilde{V}_i) \deg(g_1, \widetilde{V}_i, y) && \text{por el caso diferenciable} \\
&= \sum_{i \in \widetilde{\Lambda}} \deg(f_1, \Omega, \widetilde{V}_i) \deg(g, \widetilde{V}_i, y) && \text{por (3.32)} \\
&= \sum_{m \in \widetilde{M}} m \deg(g, \widetilde{A}_m, y) && \text{como en (3.26)} \\
&= \sum_{m \in M} m \deg(g, A_m, y) && \text{por (3.29) y (3.30)} \\
&= \sum_{i \in \Lambda} \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y) && \text{por (3.26)} \\
&= \sum_{i} \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y) && \text{por (3.18).}
\end{aligned}$$

□

3.6. El Teorema de Separación de Jordan

3.33 Teorema. *(Teorema de separación de Jordan) Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ dos subconjuntos compactos y homeomorfos. Entonces $\mathbb{R}^N \backslash K_1$ y $\mathbb{R}^N \backslash K_2$ tienen el mismo numero de componentes conexas.*

Demostración. Sea $f\colon K_1 \to K_2$ un homeomorfismo y sea $g := f^{-1}$. Supongamos (por extensión) que $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ ($\{W_j\}_{j\in J}$) las componentes conexas acotadas y V_∞ (W_∞) la componente conexa pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N \backslash K_1$ ($\mathbb{R}^N \backslash K_2$). Ponemos $\dot{I} := I \cup \{\infty\}$ y $\dot{J} := J \cup \{\infty\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \partial V_i &\subseteq K_1, & i &\in \dot{I} \\ \partial W_j &\subseteq K_2, & j &\in \dot{J}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Fijamos $i \in I$ y denotamos por $\{X_k\}_{k\in\Lambda}$ las componentes conexas acotadas y por X_∞ la componente conexa pinchada de ∞ en $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial V_i)$. Denotamos $\dot{\Lambda} := \Lambda \cup \{\infty\}$. Como $f(\partial V_i) \subseteq f(K_1) = K_2$ por (3.33), tenemos que

$$\dot{\bigcup}_{j\in\dot{J}} W_j = \mathbb{R}^N \backslash K_2 \subseteq \mathbb{R}^N \backslash f(\partial V_i) = \dot{\bigcup}_{k\in\dot{\Lambda}} X_k.$$

Por las propiedades de componentes conexas eso implica que para todo $j \in \dot{J}$ existe precisamente un $k \in \dot{\Lambda}$ tal que $W_j \cap X_k \neq \varnothing$. En ese caso $W_j \subseteq X_k$, . Particularmente tenemos que $W_\infty \subseteq X_\infty$. Para $k \in \Lambda$ definimos $A_k := \{\, j \in J \mid W_j \subseteq X_k \,\}$ y ponemos

$$\tilde{J} := \bigcup_{k\in\Lambda} A_k.$$

Por lo anterior es claro que

$$\{A_k\}_{k\in\Lambda} \text{ es una partición de } \tilde{J}. \tag{3.34}$$

Fijemos $k \in \Lambda$. Tenemos que

$$\overline{X_k} \cap W_j = \varnothing \qquad \text{para } j \in \dot{J} \backslash A_k$$

y por tanto

$$\overline{X_k} \backslash \bigcup_{j\in A_k} W_j = \overline{X_k} \backslash \bigcup_{j\in\dot{J}} W_j \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \bigcup_{j\in\dot{J}} W_j = K_2. \tag{3.35}$$

Sea $y \in V_i$. Si

$$x \in \left(\overline{X_k} \backslash \bigcup_{j\in A_k} W_j \right) \cap g^{-1}(y),$$

entonces por (3.35) $x \in K_2$ y $y = g(x) \in K_1$, contradiciendo $y \in V_i \subseteq \mathbb{R}^N \backslash K_1$. En consecuencia,

$$\left(\overline{X_k} \setminus \bigcup_{j \in A_k} W_j \right) \cap g^{-1}(y) = \varnothing$$

y $g^{-1}(y) \cap X_k \subseteq \bigcup_{j \in A_k} W_j$. Como X_k es acotado, $g^{-1}(y) \cap X_k$ es compacto, y sólo para un número finito de $j \in A_k$ se tiene que $g^{-1}(y) \cap X_k \cap W_j \neq \varnothing$. Estos hechos y la propiedad (D2) implican

$$\deg(g, X_k, y) = \sum_{j \in A_k} \deg(g, W_j, y), \tag{3.36}$$

donde la suma es finita. Además, observamos que $V_i \subseteq \mathbb{R}^N \backslash g(K_2) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash g(\partial W_j)$ y V_i conexo implican que $\deg(g, W_j, \cdot)$ es constante en V_i. Como $y \in V_i$, podemos escribir

$$\deg(g, W_j, y) = \deg(g, W_j, V_i) \qquad \text{para todo } j \in J. \tag{3.37}$$

También escribimos

$$\deg(f, V_i, X_k) = \deg(f, V_i, W_j) \qquad \text{para todo } j \in A_k \tag{3.38}$$

porque $W_j \subseteq X_k$ y $\deg(f, V_i, \cdot)$ es constante en X_k. Si $j \in J \backslash \tilde{J}$, entonces $W_j \subseteq K_\infty$, y (3.38) implica que

$$\deg(f, V_i, W_j) = 0 \qquad \forall j \in J \backslash \tilde{J}. \tag{3.39}$$

Notemos que $g \circ f|_{\partial V_i} = \mathrm{id}|_{\partial V_i}$ por (3.33). Sumando sobre $k \in \Lambda$, y utilizando las propiedades (D1), (D6) y el Teorema 3.32, obtenemos

$$\begin{aligned}
1 &= \deg(g \circ f, V_i, y) \\
&= \sum_{k \in \Lambda} \deg(f, V_i, X_k) \deg(g, X_k, y) \\
&= \sum_{k \in \Lambda} \deg(f, V_i, X_k) \left(\sum_{j \in A_k} \deg(g, W_j, y) \right) && \text{por (3.36)} \\
&= \sum_{k \in \Lambda} \deg(f, V_i, X_k) \left(\sum_{j \in A_k} \deg(g, W_j, V_i) \right) && \text{por (3.37)} \\
&= \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j \in A_k} \deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) && \text{por (3.38)} \\
&= \sum_{j \in \tilde{J}} \deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) && \text{por (3.34)} \\
&= \sum_{j \in J} \deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) && \text{por (3.39).}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Fijando W_j en lugar de V_i el mismo argumento nos da

$$1 = \sum_{i \in I} \deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i). \tag{3.41}$$

Demostremos que

$$|I| = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad |J| = \infty, \tag{3.42}$$

donde $|A|$ denota la cardinalidad de un conjunto A. Sea $|I| = \infty$ y supongamos que $|J| < \infty$. Para $j \in J$ fijo existe $i_0(j) \in I$ tal que $\deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) = 0$ para $i \in I$, $i \geq i_0(j)$, porque la suma en (3.41) es finita. Ponemos $i_0 := \max\{\, i_0(j) \mid j \in J \,\} < \infty$. Entonces $\deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) = 0$ para $i \in I$ y $j \in J$ tal que $i \geq i_0$. Eso implica que

$$\sum_{j \in J} \deg(f, V_{i_0}, W_j) \deg(g, W_j, V_{i_0}) = 0,$$

contradiciendo (3.40). Por lo tanto $|J| = \infty$. La implicación inversa sigue similarmente. Hemos demostrado (3.42) y entonces el enunciado del teorema en el caso de $|I| = \infty$.

Para tratar el caso de I finito, sea $m := |I| < \infty$. Por (3.42) también $n := |J| < \infty$. Ecuaciones (3.40) y (3.41) implican que

$$\begin{aligned} m = \sum_{i \in I} 1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} &\deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \deg(f, V_i, W_j) \deg(g, W_j, V_i) = \sum_{j \in J} 1 = n \end{aligned}$$

y concluimos. □

3.7. Variando el Espacio

3.34 Proposición. *Sean* $(f_i, \Omega_i, y_i) \in \mathcal{A}_{N_i}$ *triples admisibles para* $i = 1, 2$. *Definimos* $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $F \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ *por*

$$F(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

y $y := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. *Entonces* $(F, \Omega, y) \in \mathcal{A}_{N_1 + N_2}$ *y*

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega_1, y_1) \deg(f_2, \Omega_2, y_2). \tag{3.43}$$

Demostración. Primero notamos que tenemos dos definiciones de métrica en $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^{N_1 + N_2}$, una dada como en la Recapitulación 2.1 que corresponde a la norma $|\cdot|_{\mathbb{R}^{N_1}} + |\cdot|_{\mathbb{R}^{N_2}}$, y otra que corresponde a la norma Euklideana en $\mathbb{R}^{N_1 + N_2}$,

$$\sqrt{|\cdot|^2_{\mathbb{R}^{N_1}} + |\cdot|^2_{\mathbb{R}^{N_2}}}.$$

Estas métricas inducen la misma topología. Lo siguiente vale para cualquier selección entre ellas, hasta las estimaciones.

Es claro que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_2}$. Se sigue fácilmente que

$$\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega = (\partial\Omega_1 \times \overline{\Omega_2}) \cup (\overline{\Omega_1} \times \partial\Omega_2), \tag{3.44}$$

y eso implica que $y \notin F(\partial\Omega)$. Claramente $F \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N_1+N_2})$, y por eso $(F, \Omega, y) \in \mathcal{A}_{N_1+N_2}$.

Sea

$$\rho := \text{mín}\{ \operatorname{dist}(y_1, f_1(\partial\Omega_1)), \operatorname{dist}(y_2, f_2(\partial\Omega_2)) \}.$$

Obtenemos que

$$\rho \leq \operatorname{dist}(y, F(\partial\Omega)). \tag{3.45}$$

Agarramos $g_i \in C^1(\Omega_i, \mathbb{R}^{N_i}) \cap C(\overline{\Omega_i}, \mathbb{R}^{N_i})$ tal que $\|f_i - g_i\|_\infty \leq \rho/6$ y valores regulares z_i de g_i tal que $|y_i - z_i| \leq \rho/6$ para $i = 1, 2$. Definimos $z := (z_1, z_2)$ y $G := (g_1, g_2)$. Como $\mathrm{D}G(x_1, x_2)[(v_1, v_2)] = (\mathrm{D}g_1(x_1)[v_1], \mathrm{D}g_2(x_2)[v_2])$, z es un valor regular de G. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f_i - g_i\|_\infty &\leq \rho/6 \leq \rho/3 && \text{para } i = 1, 2 \\ |y_i - z_i| &\leq \rho/6 \leq \rho/3 && \text{para } i = 1, 2 \\ \|F - G\|_\infty &\leq \rho/3 \\ |y - z| &\leq \rho/3. \end{aligned}$$

Junto con (3.45) la Nota 2.49 dice que

$$\begin{aligned} \deg(f_i, \Omega_i, y_i) &= \deg(g_i, \Omega_i, z_i) && \text{para } i = 1, 2 \\ \deg(F, \Omega, y) &= \deg(G, \Omega, z). \end{aligned}$$

En consecuencia, solo falta que demostrar que

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg(g_1, \Omega_1, z_1) \deg(g_2, \Omega_2, z_2). \tag{3.46}$$

Observamos que $G(x) = z$ si y sólo si $g_i(x_i) = z_i$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$G^{-1}(z) = g_1^{-1}(z_1) \times g_2^{-2}(z_2).$$

Para $x = (x_1, x_2)$ sean A_i matrices que representan $\mathrm{D}g_i(x_i)$. Podemos representar $\mathrm{D}G(x)$ por la matriz

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

es decir, $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)$ y $\operatorname{sgn} J_G(x) = \operatorname{sgn} J_{g_1}(x_1) \operatorname{sgn} J_{g_2}(x_2)$. Con eso calculamos

$$\begin{aligned}
\deg(G, \Omega, z) &= \sum_{x \in G^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_G(x) \\
&= \sum_{\substack{x_1 \in g_1^{-1}(z_1) \\ x_2 \in g_2^{-2}(z_2)}} \operatorname{sgn} J_{g_1}(x_1) \operatorname{sgn} J_{g_2}(x_2) \\
&= \sum_{x_1 \in g_1^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J_{g_1}(x_1) \sum_{x_2 \in g_2^{-2}(z_2)} \operatorname{sgn} J_{g_2}(x_2) \\
&= \deg(g_1, \Omega_1, z_1) \deg(g_2, \Omega_2, z_2),
\end{aligned}$$

y entonces (3.46). □

Sea E un espacio de Banach de dimensión finita. Denotemos por $\mathcal{A}_E$ el *conjunto de triples admisibles* (f, Ω, y) donde $\Omega \subseteq E$ es abierto y acotado, $f \in C(\overline{\Omega}, E)$ y $y \in E \backslash f(\partial\Omega)$.

Si E tiene la base $\Lambda := \{ x_1, x_2, \dots, x_N \}$, definimos la aplicación lineal $\varphi \colon E \to \mathbb{R}^N$ por

$$\varphi(x_k) := e_k.$$

De acuerdo, los elementos e_k forman la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Se sigue que $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^N)$ es un isomorfismo, es decir un isomorfismo lineal y también un homeomorfismo de E y $\mathbb{R}^N$. Llamamos φ el *isomorfismo canónico entre E y $\mathbb{R}^N$ respecto a la base Λ.*

3.35 Proposición. *Sea E un espacio de Banach con $\dim E = N < \infty$ y sea φ el isomorfismo canónico entre E y $\mathbb{R}^N$ respecto a una base de E. Sea $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_E$. Entonces $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(\Omega), \varphi(y)) \in \mathcal{A}_N$ y definimos*

$$\deg_E(f, \Omega, y) := \deg(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(\Omega), \varphi(y)).$$

Entonces $\deg_E$ no depende de la selección de la base de E y cumple las propiedades (D1)–(D7)*, reemplazando $\mathbb{R}^N$ por E.*

Demostración. Es claro que $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(\Omega), \varphi(y)) \in \mathcal{A}_N$ porque φ es un homeomorfismo y $\partial(\varphi(\Omega)) = \varphi(\partial\Omega)$. Sean $\Lambda := \{ x_1, x_2, \dots, x_N \}$ y $\Gamma := \{ y_1, y_2, \dots, y_N \}$ dos bases de E, y sean φ_1 y φ_2 los isomorfismos canónicos de E y $\mathbb{R}^N$ respecto a las bases Λ y Γ. Definimos $A := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Sean $\Omega_1 := \varphi_1(\Omega)$ y $\Omega_2 := \varphi_2(\Omega) = A(\Omega_1)$. Agarramos $g_1 \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^N)$ y un valor regular z_1 de g_1 tal que con $g_2 := A \circ g_1 \circ A^{-1}$ y $z_2 := A z_1$ tenemos que

$$\|\varphi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} - g_i\|_{C(\overline{\Omega_i}, \mathbb{R}^N)} \le \frac{\operatorname{dist}(\varphi_i(y), \Omega_i)}{3}, \tag{3.47}$$

$$|\varphi_i(y) - z_i| \le \frac{\operatorname{dist}(\varphi_i(y), \Omega_i)}{3}, \tag{3.48}$$

para $i = 1, 2$. La Nota 2.49 implica que

$$\deg(\varphi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}, \varphi_i(\Omega), \varphi_i(y)) = \deg(g_i, \Omega_i, z_i). \tag{3.49}$$

Además, z_2 es un valor regular de g_2.

Como $g_2^{-1}(z_2) = A(g_1^{-1}(z_1))$,

$$\operatorname{sgn} J_{g_2}(Ax) = \operatorname{sgn}\det(\mathrm{D}g_2(Ax)) = \operatorname{sgn}\det(A\mathrm{D}g_1(x)A^{-1}) = \operatorname{sgn} J_{g_1}(x)$$

si $x \in g_1^{-1}(z_1)$. Con eso calculamos

$$\begin{aligned}\deg(g_2, \Omega_2, z_2) &= \sum_{x \in g_2^{-1}(z_2)} \operatorname{sgn} J_{g_2}(x) \\ &= \sum_{x \in A(g_1^{-1}(z_1))} \operatorname{sgn} J_{g_2}(x) \\ &= \sum_{x \in g_1^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J_{g_2}(Ax) \\ &= \sum_{x \in g_1^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J_{g_1}(x) \\ &= \deg(g_1, \Omega_1, z_1).\end{aligned} \tag{3.50}$$

Juntando las ecuaciones (3.49) y (3.50) obtenemos que

$$\deg(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1(\Omega), \varphi_1(y)) = \deg(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}, \varphi_2(\Omega), \varphi_2(y)).$$

Demostrar que este grado cumple las propiedades (D1)–(D7) nada mas en una cuestión de aplicar la definición y estas propiedades para el grado usual. $\square$

3.36 Proposición. *Sea E un espacio de Banach de dimensión finita y sea F un subespacio de E. Sean $\Omega \subseteq E$ abierto y acotado, $g \in C(\overline{\Omega}, F)$, $f \in C(\overline{\Omega}, E)$ dado por $f := \mathrm{id}_E - g$ y sea $y \in F \backslash f(\partial\Omega)$. Denotando $\Omega' := \Omega \cap F$ se cumplen $f(\overline{\Omega'}) \subseteq F$, $(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y) \in \mathcal{A}_F$ y*

$$\deg_E(f, \Omega, y) = \deg_F(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y). \tag{3.51}$$

Demostración. Denotamos $h := f|_{\overline{\Omega'}} \in C(\overline{\Omega'}, F)$. Como

$$\partial_F \Omega' \subseteq \partial_E \Omega \cap F \tag{3.52}$$

se sigue que $(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y) \in \mathcal{A}_F$. Por la Proposición 3.35 podemos suponer que $E = \mathbb{R}^N$ y $F = \mathbb{R}^M \times \{0\}$ con $M \leq N$. Primero sea $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ y $y \in \mathbb{R}^M \backslash f(\partial\Omega)$ un valor regular de f.

Por la definición de f se sigue que $f^{-1}(y) \subseteq \mathbb{R}^M$ y entonces que

$$f^{-1}(y) = h^{-1}(y). \tag{3.53}$$

Para $x \in f^{-1}(y)$ tenemos una representación de $\mathrm{D}f(x)$ por una matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} I_M - B & C \\ 0 & I_{N-M} \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

donde

$$B := (\partial_j g^i(x))_{i,j \in \{1,2,\dots,M\}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

y

$$C := (\partial_j g^i(x))_{i \in \{1,2,\dots,M\}, j \in \{M+1,M+2,\dots,N\}} \in \mathbb{R}^{M \times (N-M)}$$

Claramente

$$J_f(x) = \det(A) = \det(I_M - B) = J_h(x) \tag{3.55}$$

Eso implica que

$$\deg_E(f,\Omega,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_h(x) = \deg_F(h,\Omega',y).$$

En el caso no regular ponemos $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ y aproximamos g por una aplicación $g_1 \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^M) \cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^M)$ tal que $\|g - g_1\|_\infty \le \rho/3$. Definimos $f_1 := \mathrm{id} - g_1$ y $h_1 := f_1|_{\overline{\Omega'}}$. Se sigue que $\|f - f_1\|_\infty \le \rho/3$. Por (3.52) obtenemos

$$\|h - h_1\|_\infty \le \frac{\rho}{3} \le \operatorname{dist}(y, h(\partial\Omega'))/3.$$

Agarramos un valor regular $y_1 \in \mathbb{R}^M$ de h_1 tal que $|y - y_1| \le \rho/3$, usando el teorema de Sard. La formula (3.55), aplicada a f_1 y h_1 en lugar de f y h, dice que y_1 es un valor regular de f_1. Además,

$$|y - y_1| \le \frac{\rho}{3} \le \operatorname{dist}(y, h(\partial\Omega'))/3.$$

La Nota 2.49 y lo anterior dicen que

$$\deg_E(f,\Omega,y) = \deg_E(f_1,\Omega,y_1) = \deg_F(h_1,\Omega',y_1) = \deg_F(h,\Omega',y)$$

y concluimos. $\square$

4. El Grado en Dimensión Infinita

4.1. Introducción

En esta sección vamos a extender el grado topológico a aplicaciones en espacios de Banach. La motivación es que en esta manera uno puede demostrar existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

4.1 Ejemplo. Sea $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ acotado. Estudiemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad u(0) = u_0 \tag{4.1}$$

en un intervalo $J := [0, a]$ y para $u_0 \in \mathbb{R}$. Escribimos $\dot{u} := \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Si f es Lipschitz continuo, se aplica el Teorema de Existencia y Unicidad de Picard-Lindelöf.

Sin suponer continudad Lipschitz de f todavía se cumple para $u \in E := C(J, \mathbb{R})$: u es solución de (4.1) si y sólo si u es solución de

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))\,\mathrm{d}s. \tag{4.2}$$

Definimos $K\colon E \to E$ por

$$K(u)(t) := u_0 + \int_0^t f(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Así $u \in E$ es una solución de (4.2) si y sólo si u es un punto fijo de K, o un cero de $\mathrm{id} - K$.

Sea $M := \sup f(\mathbb{R})$. Si $K(u) = u$, entonces

$$|u(t)| \leq |u_0| + Ma \qquad \text{para } t \in J,$$

es decir, $\|u\|_E \leq r := |u_0| + Ma$. Por tanto, todos puntos fijos de K están en $\overline{B}_r E$. Para demostrar que existe una solución de (4.1) nos interesa tener un grado topológico para la aplicación $\mathrm{id} - K$ en E, y demostrar que $\deg(\mathrm{id} - K, B_{r+\varepsilon}, 0) \neq 0$ para $\varepsilon > 0$.

La idea principal es definir un grado para aplicaciones del tipo $\mathrm{id} - K$ en un espacio de Banach, donde K tiene imagen A muy delgado en E. Se restringe $\mathrm{id} - K$ a un subespacio de dimensión finita que aproxima A, y se usa la idea de la Proposición 3.36.

4.2. Compacidad en Espacios de Banach

4.2 Nota. Sea E un espacio normado. Si $\overline{B}_1 E$ es compacto, entonces $\dim E < \infty$.

4.3 Definición. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *compacto relativamente* si $\overline{A}$ es compacto. A es *precompacto* si para todo $\varepsilon > 0$ existen puntos $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k).$$

4.4 Nota. Sean X, Y espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f\colon X \to Y$ continuo.

(a) A es compacto relativamente si y sólo si toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge en X.

(b) Si A es compacto relativamente, entonces $f(A)$ es compacto relativamente.

(c) Si X es completo, entonces A es compacto relativamente si y sólo si A es precompacto.

4.5 Lema. *Sean E un espacio normado, $A \subseteq E$, $X \subseteq E$ finito y $\varepsilon > 0$ tal que $A \subseteq X + B_\varepsilon$. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon$, entonces existe $Y \subseteq E$ finito tal que* $\operatorname{conv}(A) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}$.

Demostración. Sea $x \in \operatorname{conv}(A)$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in [0,1]$ y $x_k \in A$ para $k = 1, 2, \dots, n$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ y $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Por la hipótesis podemos agarrar $y_k \in X$ tales que $|x_k - y_k| < \varepsilon$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Se sigue que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - y_k) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon.$$

Como esto se cumple para cualquier $x \in \operatorname{conv}(A)$, obtenemos

$$\operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon. \tag{4.3}$$

Es claro que $\operatorname{conv}(X)$ es compacto porque X es finito. Entonces existe un conjunto finito $Y \subseteq E$ tal que $\operatorname{conv}(X) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon}$. Con (4.3) ésto implica

$$\operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon} + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}.$$

□

4.6 Proposición. *Sean E un espacio normado y $A \subseteq E$ precompacto. Entonces* $\operatorname{conv}(A)$ *es precompacta.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es precompacto, existe un conjunto finito $X \subseteq E$ tal que $A \subseteq X + B_{\varepsilon/2}$. Por el Lema 4.5 existe $Y \subseteq E$ finito tal que $\operatorname{conv}(A) \subseteq Y + B_\varepsilon$. □

4.7 Definición. Sean X, Y espacios métricos y sea A un conjunto de aplicaciones entre X y Y. A es *equicontinuo* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $f \in A$ y $x_1, x_2 \in X$ con $d(x_1, x_2) \leq \delta$ se cumple $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$

4.8 Teorema. *Sean X un espacio métrico compacto y E un espacio de Banach. Un conjunto $A \subseteq C(X, E)$ es precompacto en $C(X, E)$ si y sólo si A es equicontinuo y*

$$A(x) := \{ f(x) \mid f \in A \}$$

es precompacto en E para todo $x \in X$.

Demostración. Denotamos $F := C(X, E)$ con la norma $\|f\|_F = \text{máx}_{x \in X} \|f(x)\|_E$.

Primero sea A precompacto. Sea $x \in X$. Definimos $e_x : F \to E$ por $e_x(f) := f(x)$ (la evaluación en x). Si $f_n \to f$ en F entonces

$$\|e_x(f_n) - e_x(f)\|_E = \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \|f_n - f\|_F \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Eso muestra que e_x es continuo, y por la Nota 4.4 que $A(x) = e_x(A)$ es precompacto. Para demostrar que A es equicontinuo, supongamos que $\varepsilon > 0$. Por ser A precompacto existe $B \subseteq F$ finito tal que $A \subseteq B + B_{\varepsilon/3}F$. Como cada $g \in B$ es continuo uniformemente, existe $\delta > 0$ tal que $\|g(x) - g(y)\|_E \leq \varepsilon/3$ si $g \in B$ y $x, y \in X$ cumplen $d(x, y) \leq \delta$. Sean $f \in A$ y $x, y \in X$ tales que $d(x, y) \leq \delta$. Existe $g \in B$ tal que $\|f - g\|_F \leq \varepsilon/3$. En consecuencia,

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq \|f(x) - g(x)\|_E + \|g(x) - g(y)\|_E + \|g(y) - f(y)\|_E \leq \varepsilon.$$

Ésto implica que A es equicontinuo.

Segundo supongamos que A es equicontinuo y que $A(x)$ es precompacto para todo $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Agarramos $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\|_E < \varepsilon/5$ si $f \in A$ y $x, y \in X$ cumplen $d(x, y) < \delta$. La compacidad de X implica la existencia de $X_1 \subseteq X$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{x \in X_1} B_\delta(x)$. Para todo $x \in X_1$ encontramos $E_x \subseteq E$ finito tal que $A(x) \subseteq E_x + B_{\varepsilon/5}E$. Definimos el conjunto finito

$$\Lambda := \left\{ \varphi \colon X_1 \to \bigcup_{x \in X_1} E_x \;\middle|\; \forall x \in X_1 \colon \varphi(x) \in E_x \right\}$$

y los conjuntos

$$A_\varphi := \{ f \in A \mid \forall x \in X_1 \colon f(x) \in \varphi(x) + B_{\varepsilon/5}E \}$$

para $\varphi \in \Lambda$. Si $f, g \in A_\varphi$ y $y \in X$, entonces existe $x \in X_1$ tal que $y \in B_\delta(x)$. Las definiciones de δ y A_φ implican que

$$\begin{aligned} &\|f(y) - g(y)\|_E \\ &\qquad \leq \|f(y) - f(x)\|_E + \|f(x) - \varphi(x)\|_E + \|\varphi(x) - g(x)\|_E + \|g(x) - g(y)\|_E < \frac{4\varepsilon}{5}, \end{aligned}$$

es decir, $\|f-g\|_F \leq 4\varepsilon/5$. Para todo $\varphi \in \Lambda$ fijamos $f_\varphi \in A_\varphi$ si $A_\varphi \neq \varnothing$, y $f_\varphi \in F$ arbitrario si $A_\varphi = \varnothing$. En consecuencia,

$$A_\varphi \subseteq f_\varphi + B_\varepsilon F. \tag{4.4}$$

Demostremos que los A_φ cubren A. Sea $f \in A$. Para $x \in X_1$ encontramos $z \in E_x$ tal que $f(x) \in z + B_{\varepsilon/5}E$, usando la definición de E_x, y definimos $\varphi(x) := z$. En consecuencia, tenemos que $\varphi \in \Lambda$ y $f \in A_\varphi$. Por fin obtenemos con (4.4) que

$$A \subseteq \bigcup_{\varphi\in\Lambda} A_\varphi \subseteq \bigcup_{\varphi\in\Lambda} (f_\varphi + B_\varepsilon F),$$

es decir, un número finito de bolas abiertas en F con radio ε cubren A. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, A es precompacto. □

4.9 Nota. En el caso $E := \mathbb{R}$, junto con la Nota 4.4(a) y (c), el Teorema anterior implica el *Teorema de Arzela-Ascoli.*

4.10 Lema. *Sea E un espacio de Banach con dimensión infinita. Entonces*

$$\beta(\overline{B}_1) := \inf\{\, r > 0 \mid \overline{B}_1 \text{ tiene una cubierta finita por bolas abiertas de radio } r \,\} = 1.$$

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $\overline{B}_1 \subseteq B_{1+\varepsilon}$. Dejando $\varepsilon \to 0$ obtenemos $\beta(\overline{B}_1) \leq 1$. Razonando por contradicción supongamos que $\beta(\overline{B}_1) < 1$. Existen $X \subseteq E$ finito y $r \in (0,1)$ tal que $\overline{B}_1 \subseteq X + B_r \subseteq X + \overline{B}_r$. Sea $N := \#X$, el número de elementos de X, y F cualquier subespacio de E con dimensión $\dim F = N$. Definimos para $x \in X$:

$$A_x := (x + \overline{B}_r E) \cap S_1 F.$$

Tenemos que

$$S_1 F = \overline{B}_1 E \cap S_1 F \subseteq (X + \overline{B}_r E) \cap S_1 F = \bigcup_{x\in X} A_x.$$

Además, los A_x son cerrados en F. El Teorema 3.25 implica que existen $x \in X$ y un punto $y \in S_1 F$ tal que $y, -y \in A_x \subseteq x + \overline{B}_r E$. Pero $\|y - (-y)\|_E = 2$, una contradicción con $\operatorname{diam}(x + \overline{B}_r E) = 2r < 2$. □

4.3. El Teorema de Tietze-Dugundji

4.11 Definición. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de X. Si para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$, entonces $\mathcal{V}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{U}$.

4.12 Definición. Sea X un espacio topológico. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* si todo $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $U \cap A \neq \varnothing$ sólo para un número finito de $A \in \mathcal{A}$.

4.13 Definición. Un espacio topológico es *paracompacto* si es de Hausdorff y si toda cubierta abierta admite un refinamiento localmente finito.

Sin demostración usaremos el siguiente resultado de topología general:

4.14 Teorema (Stone)**.** *Todo espacio métrico es paracompacto.*

4.15 Teorema (Tietze-Dugundji)**.** *Sean X un espacio métrico y E un espacio normado, $A \subseteq X$ no vacío, cerrado y $f\colon A \to E$ continuo. Entonces f tiene una extensión continua $g\colon X \to E$ tal que $g(X) \subseteq \operatorname{conv}(f(A))$.*

Demostración. Por el Teorema 4.14 existe un conjunto índice J y conjuntos abiertos $V_j \subseteq X$ tal que $\mathcal{V} := \{\, V_j \mid j \in J \,\}$ es una cubierta localmente finita de $X \backslash A$ y tal que para todo $j \in J$ existe $x_j \in X \backslash A$ con $V_j \subseteq B_{\operatorname{dist}(x_j,A)/2}(x_j)$. Definimos para $x \in X \backslash A$

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 0 & x \notin V_j \\ \operatorname{dist}(x, \partial V_j) & x \in V_j \end{cases}$$

y

$$\psi_j(x) := \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{k \in J} \varphi_k(x)}.$$

Claramente φ_j es continuo en $X \backslash A$ (de acuerdo, dist es Lipschitz continuo). Como $\mathcal{V}$ es localmente finito, la suma está bien definida y continua en $X \backslash A$. Como $\mathcal{V}$ cubre $X \backslash A$ la suma es positiva en $X \backslash A$. Ésto implica que ψ_j es continuo en $X \backslash A$, que $0 \leq \psi_j \leq 1$, y que $\sum_{j \in J} \psi_j = 1$.

Para todo $j \in J$ escogemos $a_j \in A \cap \overline{B}_{2 \operatorname{dist}(x_j,A)}(x_j)$. Definimos

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \sum_{j \in J} \psi_j(x) f(a_j) & x \in X \backslash A. \end{cases}$$

Claramente g es continuo en A, porque es una extensión de f. La suma es finita en una vecindad de un punto $x \in X \backslash A$. Se sigue que g es continuo en $X \backslash A$. Como en (2.8) de la demostración de la Proposición 2.14 falta demostrar que $x^* \in A$, $(x_n) \subseteq X \backslash A$ con $x_n \to x^*$ implica que $g(x_n) \to f(x^*)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Agarramos $\delta > 0$ tal que $\|f(a) - f(x^*)\| \leq \varepsilon$ si $a \in A \cap \overline{B}_\delta(x^*)$. Sea $x \in (X \backslash A) \cap \overline{B}_{\delta/6}(x^*)$. Si $j \in J$ cumple $x \in V_j$, entonces

$$2d(x, x_j) \leq \operatorname{dist}(x_j, A) \leq d(x_j, x^*) \leq d(x_j, x) + d(x, x^*),$$

es decir,

$$d(x, x_j) \leq d(x, x^*). \tag{4.5}$$

También obtenemos que

$$d(x_j, a_j) \leq 2\operatorname{dist}(x_j, A) \leq 2d(x_j, x^*) \leq 2(d(x_j, x) + d(x, x^*)) \leq 4d(x, x^*). \tag{4.6}$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) implican que

$$d(x^*, a_j) \leq d(x^*, x) + d(x, x_j) + d(x_j, a_j) \leq 6d(x^*, x) \leq \delta.$$

En consecuencia, $\|f(x^*) - f(a_j)\| \leq \varepsilon$ para todo $j \in J$ tal que $x \in V_j$. Eso dice que

$$\|g(x) - f(x^*)\| = \left\| \sum_{j \in J} \psi_j(x)(f(a_j) - f(x^*)) \right\| \leq \sum_{j \in J} \psi_j \varepsilon = \varepsilon.$$

Existe n_0 tal que $x_n \in \overline{B}_{\delta/6}(x^*)$ para $n \geq n_0$. Con lo que acabamos de demostrar se sigue que $\|g(x_n) - f(x^*)\| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Como ε fue arbitrario, terminamos con la prueba de la continuidad de g.

Es obvio que $g(x)$ es una combinación convexa de elementos de $f(A)$ para todo $x \in X$. □

4.16 Lema. *Sean E un espacio normado y $A \subseteq E$ convexo y cerrado. Entonces A es un retracto de E.*

Demostración. Por el Teorema 4.15 existe una extensión continua $f\colon E \to \operatorname{conv}(A) = A$ de id_A. □

4.4. Operadores Compactos

4.17 Definición. Sean E, F espacios de Banach, $A \subseteq E$ y $f\colon A \to F$ continuo. Decimos que f es *compacto* si $f(A)$ es compacto relativamente. Denotemos por $\mathcal{K}(A, F)$ el conjunto de operadores (aplicaciones) continuos compactos entre A y F. f es *completamente continuo* si f es continuo y si $f(B)$ es relativamente compacto para todo subconjunto acotado B de A. f es de *dimensión finita* si existe un subespacio de dimensión finita en F que contiene $f(A)$. Denotemos el conjunto de aplicaciones continuas de dimensión finita de A en F por $\mathcal{F}(A, F)$.

Sean $A \subseteq E$ acotado y cerrado y $f\colon A \to F$. f es *decente* si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq F$ que es compacto.

4.18 Proposición. *Sean E, F espacios de Banach y $A \subseteq E$ acotado y cerrado. Entonces*

(a) $\mathcal{F}(A, F)$ es denso en $\mathcal{K}(A, F)$ respecto a la norma del supremo.

(b) Si $f \in \mathcal{K}(A, E)$, entonces $I - f$ es decente.

Demostración. **(a):** Sean $f \in \mathcal{K}(A,F)$ y $\varepsilon > 0$. Existe $Y \subseteq F$ finito tal que $\overline{f(A)} \subseteq Y + B_\varepsilon$ porque $\overline{f(A)}$ es compacto. Definimos mapeos $\varphi_y, \psi_y \colon \overline{f(A)} \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$\varphi_y(x) := \max\{\, 0,\ \varepsilon - |x-y|\,\} \qquad \text{para } y \in Y$$

y

$$\psi_y(x) := \frac{\varphi_y(x)}{\sum_{z \in Y} \varphi_z(x)}.$$

Claramente φ_y es continuo. Como $Y + B_\varepsilon$ cubre $\overline{f(A)}$, la suma es positiva en $\overline{f(A)}$. Como la suma es finita, ψ_y es continuo. Para todo $y \in Y$ y $x \in \overline{f(A)}$ tenemos $\psi_y(x) \in [0,1]$ y $\sum_{y \in Y} \psi_y(x) = 1$.

Definimos $g \colon A \to F$ por

$$g(x) := \sum_{y \in Y} \psi_y(f(x))y.$$

Claramente, g es continuo. g tiene su imagen en $[Y]$, el subespacio de dimensión finita generado por Y, es decir $g \in \mathcal{F}(A,F)$. Para $x \in A$ obtenemos por las propiedades de ψ_y:

$$\begin{aligned}\|g(x) - f(x)\|_F = \left\| \sum_{y \in Y} \psi_y(f(x))(y - f(x)) \right\|_F &\le \sum_{y \in Y} \psi_y(f(x)) \|y - f(x)\|_F \\ &\le \sum_{y \in Y} \psi_y(f(x))\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Se sigue que $\sup_{x \in A} \|f(x) - g(x)\|_F \le \varepsilon$.

(b): Sea $K \subseteq F$ compacto, y sea $(x_n) \subseteq (I-f)^{-1}(K)$. Escribimos $y_n := (I-f)(x_n) = x_n - f(x_n)$. Como $(y_n) \subseteq K$ y $(f(x_n))$ es relativamente compacto, pasando a una subsucesión podemos suponer que $y_n \to y$ y $f(x_n) \to z$ cuando $n \to \infty$. Se sigue que $x_n = y_n + f(x_n) \to y + z$ cuando $n \to \infty$. Concluimos porque $(I-f)^{-1}(K)$ es cerrado. □

4.19 Proposición. *Sean E, F espacios de Banach, $A \subseteq E$ acotado y cerrado, y sea $f \in \mathcal{K}(A,F)$. Entonces existe una extensión $g \in \mathcal{K}(E,F)$ de f tal que $g(E) \subseteq \operatorname{conv}(f(A))$.*

Demostración. Por la Nota 4.4(c) coinciden compacidad relativa y precompacidad en F. La extensión g tal que $g(E) \subseteq \operatorname{conv}(A)$ encontramos con el Teorema 4.15. La Proposición 4.6 dice que $\operatorname{conv}(f(A))$ es relativamente compacto. Esto implica que $g \in \mathcal{K}(E,F)$. □

4.20 Lema. *Sean E, F espacios de Banach, $A \subseteq E$ acotado y cerrado, y $f \colon A \to F$ continuo y decente. Entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sean $B \subseteq A$ cerrado, $(y_n) \subseteq f(B)$ tal que $y_n \to y$ en F. Existe $(x_n) \subseteq B$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como f es decente y $\{\, y_n \,\}_{n=1}^\infty \cup \{y\}$ compacto, $\{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty$ es relativamente compacto. Pasando a una subsucesión supongamos que $x_n \to x$ en E. B cerrado implica que $x \in B$, es decir, $f(x) \in f(B)$ y $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$. Por tanto $y \in f(B)$. □

4.5. El Grado de Leray-Schauder

La idea para definir un grado topológico en espacios de Banach es usar el grado en dimensión finita y la Proposición 3.36; en consecuencia, sólo vamos a definir un grado para aplicaciones del tipo $I - K$, donde K es un operador compacto.

4.21 Definición. Sea E un espacio de Banach. Denotemos por $\mathcal{A}_E$ el *conjunto de triples admisibles* (f, Ω, y) donde $\Omega \subseteq E$ es abierto y acotado, $f = I - K$, $K \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}, E)$ y $y \in E \backslash f(\partial\Omega)$.

4.22 Nota. La Definición 4.21 es consistente con la Definición de $\mathcal{A}_E$ para espacios de Banach E con dimensión finita dado en la Sección 3.7, porque en ese caso siempre $I - f$ es compacto, es decir $f = I - K$ con K compacto.

Si $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_E$, $f = I - K$ con $K \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}, E)$, ponemos $\rho := \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Por la Proposición 4.18(b) f es decente, y en seguida $f(\partial\Omega)$ es cerrado por el Lema 4.20. Por tanto $\rho > 0$. La Proposición 4.18(a) nos da $K_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, E)$ tal que $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|K(x) - K_1(x)\|_E < \rho$. Si F es un subespacio de E de dimensión finita con $K_1(\overline{\Omega}) \subseteq F$ y $y \in F$, entonces ponemos $\Omega_F := \Omega \cap F$, $f_1 := (I - K_1)$. En seguida, $(f_1|_{\overline{\Omega_F}}, \Omega_F, y) \in \mathcal{A}_F$.

4.23 Lema. *En la situación anterior* $\deg(f_1|_{\overline{\Omega_F}}, \Omega_F, y)$ *no depende de* K_1 *ni de* F*.*

Demostración. Sean $K_i \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, E)$ tales que $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|K(x) - K_i(x)\|_E < \rho$, sean F_i subespacios de dimensión finita de E tales que $K_i(\overline{\Omega}) \subseteq F_i$ y $y \in F_i$, y definimos $\Omega_i := \Omega \cap F_i$ y $f_i := (I - K_i)$, para $i = 1, 2$. Denotemos $F_0 := F_1 + F_2$ y $\Omega_0 := \Omega \cap F_0$. La Proposición 3.36 implica que

$$\deg(f_i|_{\overline{\Omega_0}}, \Omega_0, y) = \deg(f_i|_{\overline{\Omega_i}}, \Omega_i, y) \tag{4.7}$$

para $i = 1, 2$. Como $\partial\Omega_0 \subseteq \partial\Omega \cap F_0$, tenemos que $\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega_0)) \geq \rho$. Sea $h(t, x) := (1 - t)f_1(x) + tf_2(x)$ la homotopía lineal entre f_1 y f_2. Si $t \in [0, 1]$ y $x \in \partial\Omega_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|h(t, x) - y\| &= \|(1 - t)(f_1(x) - f(x)) + t(f_2(x) - f(x)) + f(x) - y\| \\
&\geq \|f(x) - y\| - \big((1 - t)\|f_1(x) - f(x)\| + t\|f_2(x) - f(x)\|\big) \\
&\geq \rho - \big((1 - t)\|K_1(x) - K(x)\| + t\|K_2(x) - K(x)\|\big) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

En seguida, $y \notin h(t, \partial\Omega_0)$ para todo $t \in [0, 1]$. Esto implica que

$$\deg(f_1|_{\overline{\Omega_0}}, \Omega_0, y) = \deg(f_2|_{\overline{\Omega_0}}, \Omega_0, y), \tag{4.8}$$

y junto con (4.7) concluimos. □

4.24 Definición. En la situación del Lema 4.23 definimos el *Grado de Leray-Schauder* por

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f_1|_{\overline{\Omega_F}}, \Omega_F, y) \tag{4.9}$$

Sin demostración formulamos el

4.25 Teorema. *Para un espacio de Banach E la aplicación* $\deg\colon \mathcal{A}_E \to \mathbb{Z}$ *tiene las propiedades* (D1)–(D7)*, donde h en* (D3) *tiene la forma $h = I_E - H$, es decir, $h(t,x) = x - H(t,x)$, y $H \in \mathcal{K}([0,1] \times \overline{\Omega}, E)$.*

4.26 Nota. Se puede demostrar que deg es la única aplicación $\mathcal{A}_E \to \mathbb{Z}$ con las propiedades (D1)–(D3).

4.27 Teorema (Schauder)**.** *Sean E un espacio de Banach, $A \subseteq E$ no vacío, acotado, cerrado y convexo, y $K\colon A \to A$ compacto. Entonces K tiene un punto fijo.*

Demostración. Por la Proposición 4.19 podemos extender K a E por $K_1 \in \mathcal{K}(E,E)$ tal que $K_1(E) \subseteq A$. Eligiendo $r > 0$ tal que $A \subseteq B_r E$, definimos el operador continuo $H(t,x) := tK_1(x)$ para $(t,x) \in [0,1] \times \overline{B}_r E$. Si $(t_n) \subseteq [0,1]$ y $(x_n) \subseteq \overline{B}_r$, entonces por la compacidad de K_1 en $\overline{B}_r$ podemos suponer que (t_n) y $(K_1(x_n))$ convergen, pasando a una subsucesión. Se sigue que $(t_n K_1(x_n))$ converge. Esto implica que H es compacto. Para la homotopía $h := I - H$ se cumple que $0 \notin h(t, S_r E)$ si $t \in [0,1]$ porque $tK_1(x) \neq x$ si $x \in S_r E$ y $t \in [0,1]$. Las propiedades (D3) y (D1) dicen que

$$\deg(I - K_1, B_r, 0) = \deg(I, B_r, 0) = 1,$$

y por tanto que K_1 tiene un punto fijo x_0 en $\overline{B}_r$. Claramente $x_0 \in A$, y x_0 es un punto fijo de K. □

4.28 Teorema (Schäfer)**.** *Sea E un espacio de Banach y sea $K\colon E \to E$ completamente continuo. Definamos*

$$\Lambda := \{\, x \in E \mid x = tK(x) \ \textit{para un}\ t \in [0,1] \,\}.$$

Si Λ es acotado, entonces K tiene un punto fijo.

Demostración. Si Λ es acotado, entonces existe $r > 0$ tal que $\Lambda \subseteq B_r$. La restricción de K a $\overline{B}_r$ es un operador compacto. Como en la demostración del Teorema 4.27 obtenemos que $H\colon [0,1] \times \overline{B}_r \to E$, dada por $H(t,x) := tK(x)$, es compacto. Si $t \in [0,1]$, entonces $x \neq tK(x)$ para $x \in S_r$ y por tanto $0 \notin h(t, S_r)$, donde $h := I_E - H$. En seguida

$$\deg(I - K, B_r, 0) = \deg(I, B_r, 0) = 1,$$

es decir, K tiene un punto fijo en B_r. □

Sea E siempre un espacio de Banach.

4.29 Teorema. *Sea $(f, \Omega, 0) \in \mathcal{A}_E$ tal que Ω es simétrico, $0 \in \Omega$ y tal que $f(-x) \neq \lambda f(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ y $\lambda \geq 1$. Entonces* $\deg(f, \Omega, 0)$ *es impar.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Corolario 3.22: Sean $f = I - K$ con $K \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}, E)$ y $g(x) := (f(x) - f(-x))/2$. Tenemos $g = I - L$ donde $L(x) = (K(x) - K(-x))/2$ es compacto. Usemos la homotopía lineal

$$h(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Como en esa demostración se comprueba que $h(t, \cdot)$ no se anula en $\partial\Omega$ para ningún $t \in [0, 1]$. Además, $h = I_E - H$ donde

$$H(t, x) := (1 - t)K(x) + tL(x)$$

es un operador compacto. En seguida, h es una homotopía admisible y $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$.

Aproximemos L por un operador $L_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, E)$ tal que $\|L - L_1\|_\infty < \operatorname{dist}(0, g(\partial\Omega))$ y definamos $L_2(x) := (L_1(x) - L_1(-x))/2$, así que también $\|L - L_2\|_\infty < \operatorname{dist}(0, g(\partial\Omega))$. Además, L_2 es impar. Escojamos un subespacio finito F de E que contenga el rango de L_2. Entonces

$$\deg(g, \Omega, 0) = \deg((I - L_2)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0)$$

es impar por el Teorema 3.21. □

Como en el caso de dimensión finita el grado es constante en componentes conexas de $E \backslash f(\partial\Omega)$. Si E no es separable, el numero de componentes conexas de un subconjunto abierto de E no necesariamente es numerable. No obstante, se tiene una formula para la composición de operadores (sin demostración):

4.30 Teorema. *Sean $\Omega \subseteq E$ abierto y acotado, $K \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}, E)$, $L\colon E \to E$ completamente continuo, $f := I - K$, $g := I - L$, y V_i las componentes conexas acotadas de $E \backslash f(\partial\Omega)$. Si $y \in E \backslash g(f(\partial\Omega))$ entonces*

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \sum_i \deg(f, \Omega, V_i) \deg(g, V_i, y).$$

En la suma solo un número finito de términos no es cero.

Análogamente, se tiene el teorema de separación de Jordan en dimensión infinita:

4.31 Teorema. *Sean $A, B \subseteq E$ dos subconjuntos cerrados y acotados, tales que existe un homeomorfismo $f\colon A \to B$ de la forma $f = I - K$ con $K \in \mathcal{K}(A, E)$. Entonces $E \backslash A$ y $E \backslash B$ tienen el mismo numero de componentes conexas.*

Demostración. La demostración es igual a la del Teorema 3.33, tomando en cuenta la Proposición 4.19 y la fórmula de composiciones Teorema 4.30. Nada más hay que demostrar que $g := f^{-1}$ es de la forma $I - L$ con $L \in \mathcal{K}(B, E)$. Para eso ponemos $L\colon I - g$ y consideramos $x \in A$ y $y := f(x)$. Se sigue que

$$L(y) = y - g(y) = f(g(y)) - g(y) = (f - I)(g(y)) = -K(g(y)),$$

y por lo tanto que $L(B) = -K(A)$. En seguida, L también es compacta. □

4.32 Teorema. *Sean F un subespacio cerrado de E, $\Omega \subseteq E$ abierto y acotado, $K \in \mathcal{K}(\overline{\Omega}, F)$ y $y \in F$ tales que $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_E$ para $f := I - K$. Ponemos $\Omega' := \Omega \cap F$. Entonces $(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y) \in \mathcal{A}_F$ y*

$$\deg_E(f, \Omega, y) = \deg_F(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y).$$

Demostración. Sea $K_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, F)$ una aproximación tal que $\|K - K_1\|_\infty < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$. Sea F_1 un subespacio de F de dimensión finita tal que contenga la imagen de $\overline{\Omega}$ bajo K_1 y y. Entonces

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f|_{\overline{\Omega \cap F_1}}, \Omega \cap F_1, y) = \deg_F(f|_{\overline{\Omega'}}, \Omega', y)$$

por la Proposición 3.36. □

4.6. Un Ejemplo: Teorema de Existencia de Peano para EDOs

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ continuo. Nos interesa la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{u}(t) = f(u(t)). \tag{4.10}$$

Una *solución local* consiste de un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ y una función continua $u\colon J \to \mathbb{R}^N$ que es diferenciable en el interior de J y que cumple (4.10). Necesariamente $u \in C^1(\operatorname{int} J, \mathbb{R}^N)$ si u es una solución local de (4.10). Decimos que una solución *u pasa por un punto* $u_0 \in \Omega$ si existe $\varepsilon > 0$ y $u \in C^1(B_\varepsilon\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ que es una solución de (4.10) y cumple $u(0) = u_0$. Una solución es *global* si está definida en todo $\mathbb{R}$. De acuerdo, u es una solución de (4.10) en un intervalo compacto $J = [t_0, t_1]$ si y sólo si

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{para todo } t \in J. \tag{4.11}$$

Demostremos un caso especial del teorema de Peano:

4.33 Teorema. *Supongamos que $\Omega = \mathbb{R}^N$ y que existe $\alpha > 0$ tal que $|f(u)| \leq \alpha(1 + |u|)$ para todo $u \in \mathbb{R}^N$. Sean $u_0 \in \mathbb{R}^N$ y J un intervalo compacto que contiene 0. Entonces existe una solución de (4.10) definida en J que pasa por u_0.*

Demostración. Sea $J = [t_1, t_2]$. Primero busquemos una solución en $[0, t_2]$, $E := C([0, t_2], \mathbb{R}^N)$. Definimos $K\colon E \to E$ por

$$K(u)(t) := u_0 + \int_0^t f(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Primero demostremos que K es continuo, agarrando una sucesión $u_n \to u$ en E. Existe $r > 0$ tal que $(u_n) \subseteq \overline{B}_r E$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continuo uniformemente en subconjuntos compactos, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall v, w \in \overline{B}_r \mathbb{R}^N : (|v - w| \leq \delta \Rightarrow |f(v) - f(w)| \leq \varepsilon).$$

Además existe n_0 tal que

$$\forall n \geq n_0 \colon \|u_n - u\|_\infty \leq \delta.$$

En seguida,

$$\forall n \geq n_0 \ \forall s \in J \colon |f(u_n(s)) - f(u(s))| \leq \varepsilon,$$

y luego para todo $n \geq n_0$ y $t \in J$

$$\begin{aligned} |K(u_n)(t) - K(u)(t)| &\leq \int_0^t |f(u_n(s)) - f(u(s))| \, \mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \varepsilon \, \mathrm{d}s = t\varepsilon \leq t_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Eso dice que $\|K(u_n) - K(u)\|_\infty \leq t_2\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $K(u_n) \to K(u)$ en E.

La Tarea 10, Nº 20, dice que K es completamente continuo.

Por la ecuación (4.11) es suficiente buscar un punto fijo de K. Sean $\lambda \in [0, 1]$ y $u \in E$ una solución de $u = \lambda K(u)$. Usando la hipótesis obtenemos para $t \in J$ que

$$|u(t)| \leq |u_0| + \alpha \int_0^t (1 + |u(s)|) \, \mathrm{d}s \leq \beta + \alpha \int_0^t |u(s)| \, \mathrm{d}s =: \varphi(t), \tag{4.12}$$

donde denotemos $\beta := |u_0| + \alpha$. En seguida,

$$\varphi(0) = \beta, \qquad \dot{\varphi}(t) = \alpha |u(t)| \leq \alpha \varphi(t). \tag{4.13}$$

Integrando esta desigualdad obtenemos

$$\log \frac{\varphi(t)}{\beta} = \log \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)} = \log \varphi(s)|_0^t = \int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{\varphi(s)} \, \mathrm{d}s \leq \int_0^t \alpha \, \mathrm{d}s \leq t_2 \alpha,$$

es decir

$$|u(t)| \leq \varphi(t) \leq \beta \mathrm{e}^{t_2 \alpha} =: \gamma$$

para todo $t \in [0, t_2]$. Por tanto $u \in \overline{B}_\gamma E$. Obtenemos que el conjunto

$$\{ \, u \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1] \colon u = \lambda K(u) \, \}$$

es acotado. El Teorema 4.28 dice que K tiene un punto fijo u_2 en E, una solución de (4.10) en $[0, t_2]$ con $u(0) = u_0$.

La misma prueba permite construir una solución $\tilde{u}_1$ de $\dot{u} = -f(u)$ en $[0, -t_1]$ tal que $\tilde{u}_1(0) = u_0$. Entonces u_1, definida en $[t_1, 0]$ por $u_1(t) := \tilde{u}_1(-t)$, es una solución de (4.10) con $u_1(0) = u_0$. Claramente

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & t \in [t_1, 0] \\ u_2(t) & t \in [0, t_2] \end{cases}$$

es una función continua. Por (4.10) las derivadas de u_1 y u_2 tienen extensiones continuas a $[t_1, 0]$ y $[0, t_2]$, respectivamente, que coinciden en 0. Por tanto, $u \in C(J, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\operatorname{int} J, \mathbb{R}^N)$ es una solución de (4.10) pasando por u_0. $\square$

4.7. El Grado de un Operador Lineal

Calculemos el grado de $I - K$ cuando K es un operador completamente continuo *lineal* tal que $I - K$ es un isomorfismo, porque ese caso es importante en aplicaciones.

4.34 Definición. Un operador lineal completamente continuo se llama un *operador lineal compacto*. Denotemos por $\mathcal{L}_c(E, F)$ los operadores lineales y completamente continuos entre espacios normados E y F.

Primero mostremos un resultado inspirado por la Proposición 3.34 sobre el grado de un producto cartesiano de mapeos:

4.35 Proposición. *Sea $K \in \mathcal{L}_c(E)$ tal que $L := I - K$ es inyectivo. Sean E_i, $i = 1, 2, \dots, n$ subespacios cerrados tales que*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

y $K(E_i) \subseteq E_i$ para todo i. Entonces

$$\deg(L, B_1, 0) = \prod_{i=1}^{n} \deg(L|_{E_i}, B_1 E_i, 0).$$

Demostración. Por inducción basta demostrar el caso $n = 2$. Sean P_i, $i = 1, 2$ proyecciones complementarias tales que $\mathcal{R}(P_i) = E_i$. Definamos $L_1 := LP_1 + P_2$ y $L_2 := P_1 + LP_2$. Como E_i es invariante bajo L para $i = 1, 2$ se sigue que $L_2 L_1 = L_1 L_2 = L$, $I - L_i = KP_i \in \mathcal{L}_c(E)$ y $(I - L_i)(E_i) \subseteq E_i$. Además, L_i es inyectivo para $i = 1, 2$. Entonces el Teorema 4.30 del grado de la composición de operadores y el Teorema 4.32 sobre restricción a subespacios implican

$$\begin{aligned} \deg(L, B_1, 0) = \deg(L_2 L_1, B_1, 0) &= \prod_{i=1}^{2} \deg(L_i, B_1, 0) \\ &= \prod_{i=1}^{2} \deg(L_i|_{E_i}, B_1 E_i, 0) = \prod_{i=1}^{2} \deg(L|_{E_i}, B_1 E_i, 0). \end{aligned}$$

$\square$

4.36 Recapitulación. Sean E un espacio de Banach real y $L \in \mathcal{L}(E)$ un operador lineal acotado en E. El *conjunto resolvente* $\rho(L)$ de L es el conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda I - L$ es un mapeo biyectivo. Por el teorema de la aplicación abierta, $(\lambda I - L)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ en ese caso. El *espectro* $\sigma(L)$ de L es el complemento de $\rho(L)$ en $\mathbb{R}$. Siempre se cumple que $\sigma(L)$ es compacto y contenido en $\overline{B}_{\|L\|}(0; E)$. Un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{N}(\lambda I - L) \neq \{0\}$ es un *valor propio* de L.

4.37 Proposición. *Sean E un espacio de Banach de dimensión infinita y $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto. Entonces se cumplen:*

(a) $\sigma(K)$ es numerable y contiene 0. Si $\sigma(K)$ es infinito, entonces consiste de 0 y una sucesión de valores propios que converge a 0.

(b) Para todo $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ existen subespacios cerrados y invariantes $\mathcal{N}(\lambda)$ y $\mathcal{R}(\lambda)$ bajo K tales que $E = \mathcal{N}(\lambda) \oplus \mathcal{R}(\lambda)$ y $\dim(\mathcal{N}(\lambda)) < \infty$. Además, $\sigma(K|_{\mathcal{N}(\lambda)}) = \{\lambda\}$ y $\sigma(K|_{\mathcal{R}(\lambda)}) = \sigma(K)\backslash\{\lambda\}$. $\mathcal{N}(\lambda)$ es el espacio propio generalizado del valor propio λ. $(\lambda I - K)\colon \mathcal{R}(\lambda) \to \mathcal{R}(\lambda)$ es un isomorfismo.

(c) Si $\lambda, \mu \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ son distintos, entonces $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{R}(\lambda)$.

Demostración. El inciso (a) es estándar y uno lo encuentra en los textos de análisis funcional. La idea para el inciso (b) es mostrar como en el caso de dimensión finita que para $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ existen $k(\lambda), \ell(\lambda) \in \mathbb{N}$ minimales tales que $\mathcal{N}((\lambda I - K)^{k(\lambda)}) = \mathcal{N}((\lambda I - K)^{k(\lambda)+1})$ y $\mathcal{R}((\lambda I - K)^{\ell(\lambda)}) = \mathcal{R}((\lambda I - K)^{\ell(\lambda)+1})$. Luego se sigue que $k(\lambda) = \ell(\lambda)$. Uno define $\mathcal{N}(\lambda) := \mathcal{N}((\lambda I - K)^{k(\lambda)})$ y $\mathcal{R}(\lambda) := \mathcal{R}((\lambda I - K)^{k(\lambda)})$ y demuestra las propiedades faltantes.

Para mostrar (c) sean $\lambda, \mu \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ distintos y sea $x \in \mathcal{N}(\mu)$. Por la descomposición $E = \mathcal{N}(\lambda) \oplus \mathcal{R}(\lambda)$ existen únicos elementos $y \in \mathcal{N}(\lambda)$ y $z \in \mathcal{R}(\lambda)$ tales que $x = y + z$. Ponemos $L := (\mu I - K)^{k(\mu)}$. Entonces $0 = Lx = Ly + Lz$. Obviamente $\mathcal{N}(\lambda)$ y $\mathcal{R}(\lambda)$ son invariantes bajo L. Eso implica que $Ly \in \mathcal{N}(\lambda)$ y $Lz \in \mathcal{R}(\lambda)$, es decir, $Ly = Lz = 0$. Como μ es el único valor propio de K en $\mathcal{N}(\mu)$, L es inyectivo en $\mathcal{N}(\lambda)$, y por tanto $y = 0$. En consecuencia, $x = z \in \mathcal{R}(\lambda)$. $\square$

4.38 Nota. En la proposición anterior, si $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$, entonces $\dim \mathcal{N}(\lambda I - K)$ es la *multiplicidad geométrica* y $\dim \mathcal{N}(\lambda)$ la *multiplicidad algebráica* de λ.

4.39 Nota. Si $K \in \mathcal{L}_c(E)$ y $I - K$ es inyectivo, entonces 1 no es un valor propio de K. Como todos elementos de $\sigma(K)$ son valores propios, $1 \notin \sigma(K)$. Eso implica que $I - K$ es un isomorfismo.

4.40 Teorema. *Sea $K \in \mathcal{L}_c(E)$ tal que $I - K$ es un isomorfismo. Sea m la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios λ de K tales que $\lambda > 1$ (ellos coinciden con los valore propios negativos de $I - K$). Entonces*

$$\deg(I - K, B_1, 0) = (-1)^m.$$

Demostración. Por la Proposición 4.37(a) solo existe un número finito $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de valores propios de K mayores de 1. Según la Proposición 4.37(b) formamos los espacios $\mathcal{N}(\lambda_i)$ y $\mathcal{R}(\lambda_i)$ y denotamos

$$\mathcal{N} := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{N}(\lambda_i) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}(\lambda_i).$$

Mostremos primero que

$$E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{R}. \tag{4.14}$$

Como $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}(\lambda_i)$ para todo i, $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Si $x \in E$, existen $x_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$, $y_i \in \mathcal{R}(\lambda_i)$ tales que $x = x_i + y_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Usando Proposición 4.37(c) obtenemos para algún $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$x - \sum_{i=1}^{n} x_i = x - x_k - \sum_{i \neq k} x_i = y_k - \sum_{i \neq k} x_i \in \mathcal{R}(\lambda_k) \subseteq \mathcal{R}.$$

Esos dos hechos comprueban (4.14).

Ponemos $L := I - K$. Como los espacios $\mathcal{N}(\lambda_i)$ y $\mathcal{R}(\lambda_i)$ son invariantes bajo K, la Proposición 4.35 implica

$$\deg(L, B_1, 0) = \deg(L|_{\mathcal{N}}, B_1 \cap \mathcal{N}, 0) \deg(L|_{\mathcal{R}}, B_1 \cap \mathcal{R}, 0). \tag{4.15}$$

Definimos la homotopía $H(t, x) := tKx$, un operador compacto en B_1. Si $t \in [0, 1]$ y $x \in \mathcal{R} \backslash \{0\}$ cumplen $h(t, x) := I - H(t, x) = 0$, entonces $tKx = x$. En seguida, $t \neq 0$ y $1/t \geq 1$ es un valor propio de K. Como $I - K$ es un isomorfismo, 1 no es un valor propio de K, es decir, $1/t > 1$. Pero $K|_{\mathcal{R}}$ no tiene valores propios mayores que 1, por la Proposición 4.37(b), una contradicción. Entonces h es una homotopía admisible para $L|_{\mathcal{R}}$ y se sigue que

$$\deg(L|_{\mathcal{R}}, B_1 \cap \mathcal{R}, 0) = \deg(I, B_1 \cap \mathcal{R}, 0) = 1. \tag{4.16}$$

La restricción $K|_{\mathcal{N}}$ tiene espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subseteq (1, \infty)$, es decir, $L|_{\mathcal{N}}$ tiene espectro $\{1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, 1 - \lambda_n\} \subseteq (-\infty, 0)$. Como $\dim \mathcal{N} = m$, se tiene por la Proposición 3.34 que

$$\deg(L|_{\mathcal{N}}, B_1 \cap \mathcal{N}, 0) = (-1)^m. \tag{4.17}$$

Juntar las ecuaciones (4.15)–(4.17) concluye la demostración. $\square$

4.8. El Índice de un Cero Aislado

Muchas veces es conveniente suponer que sólo existe un número finito de soluciones y luego usar la aditividad del grado para mostrar multiplicidad de soluciones. En esto la siguiente noción facilita el procedimiento:

4.41 Definición. Sean E un espacio de Banach, $x \in E$, $\Omega \subseteq E$ una vecindad de x y $K\colon \Omega \to E$ completamente continuo. Sea x el único cero de $I - K$ en Ω. Entonces el *índice de $I-K$ en x* (o el *índice de punto fijo de K en x*) es el número entero $\operatorname{ind}(K, x) := \deg(I-K, B_r(x), 0)$, donde $\overline{B}_r(x) \subseteq \Omega$. Esta definición no depende de r para r suficientemente chico, por la propiedad (D2).

Daremos algunas situaciones donde se puede calcular ese índice.

4.42 Lema. *Sean E, F espacios de Banach, $\Omega \subseteq E$ abierto y $K\colon \Omega \to F$ completamente continuo y Frechet diferenciable en un $x \in \Omega$. Entonces $\mathrm{D}K(x) \in \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$.*

Demostración. Ponemos

$$\omega(y) := K(x+y) - K(x) - \mathrm{D}K(x)y.$$

La diferenciabilidad de K en x dice que $\omega(y)/\|y\| \to 0$ cuando $\|y\| \to 0$.

Basta mostrar que $\mathrm{D}K(x)(B_1E)$ es relativamente compacta. Sea $(y_n) \subseteq B_1E$ una sucesión. Por contradicción supongamos que $\big(\mathrm{D}K(x)y_n\big)$ no tenga subsucesión convergente, es decir, que exista $\varepsilon > 0$ tal que $\|\mathrm{D}K(x)(y_m - y_n)\| \geq \varepsilon$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Existe $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(x; E) \subseteq \Omega$ y $\|\omega(y)\| \leq \varepsilon\|y\|/4$ para todo $y \in B_\rho E$. Entonces

$$\begin{aligned}\|K(x+\rho y_m) - K(x+\rho y_n)\| &= \|\rho \mathrm{D}K(x)(y_m - y_n) + \omega(\rho y_m) - \omega(\rho y_n)\| \\ &\geq \rho\|\mathrm{D}K(x)(y_m - y_n)\| - \|\omega(\rho y_m)\| - \|\omega(\rho y_n)\| \geq \rho\varepsilon/2 > 0\end{aligned}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $(K(x+y_n))$ tampoco tiene subsucesión convergente, en contradicción a que K es completamente continua. $\square$

4.43 Proposición. *En la situación de la Definición 4.41 sea K Frechet diferenciable en x tal que $I - \mathrm{D}K(x)$ es inyectiva. Entonces*

$$\operatorname{ind}(K, x) = \deg(I - \mathrm{D}K(x), B_1, 0).$$

Particularmente, $|\operatorname{ind}(K, x)| = 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Definimos $H(t, x) := (1-t)K(x) + t\mathrm{D}K(0)x$ para $(t, x) \in [0, 1] \times \Omega$. Entonces H es completamente continua. Mostremos que $I_E - H$ es admisible en una bola B_r suficintemente chica. Si no fuera cierto, existirían sucesiones $(t_n) \subseteq [0,1]$ y $x_n \to 0$ en E tales que $H(t_n, x_n) = x_n$ para todo n. Se sigue que

$$(I - \mathrm{D}K(0))\frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{(1-t_n)(K(x_n) - \mathrm{D}K(0)x_n)}{\|x_n\|} \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Eso implica que $0 \in \sigma(I - \mathrm{D}K(0))$. Por la compacidad de $\mathrm{D}K(0)$ 0 es un valor propio de $I - \mathrm{D}K(0)$, una contradicción con que $I - \mathrm{D}K(0)$ es inyectivo. Eso muestra que existe $r > 0$ tal que $\deg(I - K, B_r, 0) = \deg(I - \mathrm{D}K(0), B_r, 0) = \deg(I - \mathrm{D}K(0), B_1, 0)$. $\square$

4.44 Nota. Sin suponer la inyectividad de la derivada la proposición anterior no es cierta. Par ver eso, considerar $E := \mathbb{R}$ y $K(x) := x - x^2$. Entonces 0 es el único punto fijo de K pero $\mathrm{ind}(K, 0) = \deg(\mathrm{id} - K, B_1, 0) = 0$, ya que la funcion $(\mathrm{id} - K)(x) = x^2$ es positiva en -1 y 1. Aquí $\mathrm{id} - \mathrm{D}K(0) = 0$ no es inyectivo.

5. Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales

5.1. Espacios de Hölder

Un elemento $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^N) \in \mathbb{N}_0^N$ es un *multiíndice* con orden

$$|\mu|_1 := \sum_{k=1}^{N} \mu^k.$$

Escribimos

$$\partial^\mu := \prod_{k=1}^{N} \partial_k^{\mu^k}.$$

Definimos

$$C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) := \{\, u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^M) \mid \partial^\mu u \text{ tiene extensión continua a } \overline{\Omega} \text{ si } |\mu|_1 \le k \,\}.$$

Sean $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^M$ una aplicación y $\alpha \in (0, 1]$. Denotemos

$$[u]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Si $[u]_\alpha < \infty$, entonces u es *Hölder continuo con exponente* α. Definimos los espacios

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) := \{\, u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^M \mid [u]_\alpha < \infty \,\}.$$

y, para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \mid \partial^\mu u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \text{ si } |\mu|_1 = k \,\}.$$

Con las normas

$$\|u\|_k := \sum_{|\mu|_1 \le k} \|\partial^\mu u\|_\infty$$
$$\|u\|_{k,\alpha} := \|u\|_k + \sum_{|\mu|_1 = k} [\partial^\mu u]_\alpha$$

para los espacios $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ y $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$, respectivamente, estos espacios son de Banach.

5.1 Definición. El dominio Ω *tiene frontera lisa* si se cumple lo siguiente: Sea $x \in \partial\Omega$. Entonces existe una vecindad U de x en $\mathbb{R}^N$ y una función $f \in C^\infty(U)$ tal que 0 es un valor regular de f (es decir, $\nabla f(y) \neq 0$ si $y \in f^{-1}(0)$) y

$$\begin{aligned} \Omega \cap U &= f^{-1}((-\infty, 0)) \\ \partial\Omega \cap U &= f^{-1}(0). \end{aligned}$$

Si $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N)$ entonces la *longitud de* γ es el numero

$$|\gamma| := \int_0^1 |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Desde aquí siempre supongamos que Ω tiene frontera lisa. Además, $\hookrightarrow$ siempre indica una inyección lineal continua de espacios normados.

5.2 Lema. $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$.

Demostración. Nos restringimos en la demostración al caso $M = 1$, el caso general siendo similar. Para $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$, sea $\Gamma_{x,y}$ el conjunto de caminos $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N)$ de x a y tal que $\gamma((0,1)) \subseteq \Omega$. Como Ω es conexo y tiene frontera lisa,

$$1 \leq \Lambda := \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega}, \\ x \neq y}} \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \frac{|\gamma|}{|x-y|} < \infty.$$

Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Para $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$ escogemos $\gamma \in \Gamma_{x,y}$ tal que $|\gamma| \leq (\Lambda + 1)|x - y|$. Tal γ existe por la definición de Λ. Como

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t,$$

obtenemos

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leq \| |\nabla u| \|_\infty |\gamma| \leq \| |\nabla u| \|_\infty (\Lambda + 1)|x - y|.$$

Como $x \neq y$ fueron arbitrarios, eso demuestra que $[u]_1 \leq \| |\nabla u| \|_\infty (\Lambda + 1)$, es decir, $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Observemos que

$$\| |\nabla u| \|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i u(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_\infty^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_\infty. \tag{5.1}$$

Entonces $\|u\|_{0,1} = \|u\|_\infty + [u]_1 \leq (\Lambda + 1)\|u\|_1$, es decir, la inyección $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ es continua. $\square$

5.3 Lema. *Sea* $(u_n) \subseteq C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $u_n \to u$ *en* $C^0(\overline{\Omega})$ *y* $\partial_i u_n \to v_i$ *en* $C^0(\overline{\Omega})$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, N$*. Entonces* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *y* $u_n \to u$ *en* $C^1(\overline{\Omega})$*.*

Demostración. Agarramos $x \in \Omega$ y fijamos $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tan chico que $x + te_i \in \Omega$ para todo $t \in J := [-\varepsilon, \varepsilon]$. Definimos $f_n, f, g \colon J \to \mathbb{R}$ por $f_n(t) := u_n(x + te_i)$, $f(t) := u(x + te_i)$ y $g(t) := v_i(x + te_i)$. Observamos que $f_n'(t) = \partial_i u_n(x + te_i)$. En seguida, $f_n \to f$ y $f_n' \to g$ en $C(J)$. Por un teorema de Calculo eso implica que $f \in C^1(J)$ y $f' = g$. Entonces existe $\partial_i u(x) = f'(0) = g(0) = v_i(x)$ y converge $\partial_i u_n(x) \to \partial_i u(x)$. Variando sobre $x \in \Omega$ y todas direcciones i, obtenemos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y que $u_n \to u$ en $C^1(\overline{\Omega})$. $\square$

5.4 Proposición. *Si* $k, l \in \mathbb{N}_0$ *y* $\alpha, \beta \in (0, 1]$ *cumplen* $l + \beta > k + \alpha$*, entonces* $C^{l,\beta}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \subseteq C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ *con inyección completamente continua.*

Demostración. Supongamos $M = 1$, el caso general siendo similar. Como $|\beta - \alpha| < 1$, se cumple que $l \geq k$. Primero trataremos el caso $k = l$ por inducción sobre k. Se cumple que $\beta > \alpha$.

Sea $k = 0$. Si $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, entonces para $x, y \in \overline{\Omega}$ con $x \neq y$ se tiene

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [u]_\beta |x - y|^{\beta - \alpha} \leq \|u\|_{0,\beta} \operatorname{diam}(\overline{\Omega})^{\beta - \alpha}.$$

Por lo tanto, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$\|u\|_{0,\alpha} \leq (1 + \operatorname{diam}(\overline{\Omega})^{\beta - \alpha}) \|u\|_{0,\beta}$$

y luego $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Si $(u_n) \subseteq C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ es acotada, entonces existe $\Lambda \geq 0$ tal que

$$\|u_n\|_{0,\beta} \leq \Lambda \qquad \text{para todo } n.$$

Se tiene que

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \Lambda |x - y|^\beta, \qquad \text{para todo } x, y \in \Omega, \tag{5.2}$$

es decir, (u_n) es equicontinua. Por el Teorema 4.8 (u_n) converge en $C(\overline{\Omega})$ a un $u \in C(\overline{\Omega})$ después de pasar a una subsucesión. Dejando $n \to \infty$ en (5.2) obtenemos

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \Lambda |x - y|^\beta \qquad \text{para todo } x, y \in \Omega. \tag{5.3}$$

Demostremos que $u_n \to u$ en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por contradicción, supongamos que $u_n \not\to u$ en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como $u_n \to u$ en $C^0(\overline{\Omega})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, pasando a una subsucesión,

$$[u_n - u]_\alpha \geq 2\varepsilon \qquad \text{para todo } n.$$

Por lo tanto, existen sucesiones $(x_n), (y_n) \subseteq \overline{\Omega}$ tales que

$$\frac{|u_n(x_n) - u(x_n) - (u_n(y_n) - u(y_n))|}{|x_n - y_n|^\alpha} \geq \varepsilon. \tag{5.4}$$

Otra vez usando que $u_n \to u$ en $C^0(\overline{\Omega})$ obtenemos que $|x_n - y_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, porque el enumerador de la fracción en (5.4) tiende a 0. En seguida, (5.2) y (5.3) implican

$$\frac{|u_n(x_n) - u(x_n) - (u_n(y_n) - u(y_n))|}{|x_n - y_n|^\alpha} \leq 2\Lambda |x_n - y_n|^{\beta-\alpha} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. ¡Contradicción a (5.4)! Entonces $u_n \to u$ en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, es decir, $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ es completamente continua.

En el segundo paso, demostremos la inducción $k \to k+1$. Sea $u \in C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega})$. Entonces para todo multiíndice μ del orden $k+1$, tenemos que $\partial^\mu u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \subseteq C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, es decir, $u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Además,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{k+1,\alpha} &= \|u\|_k + \sum_{|\mu|_1 = k+1} \|\partial^\mu u\|_{0,\alpha} \\
&\leq \|u\|_k + (1 + \operatorname{diam}(\overline{\Omega})^{\beta-\alpha}) \sum_{|\mu|_1 = k+1} \|\partial^\mu u\|_{0,\beta} \\
&\leq (1 + \operatorname{diam}(\overline{\Omega})^{\beta-\alpha}) \|u\|_{k+1,\beta},
\end{aligned}$$

es decir, $C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Supongamos que $(u_n) \subseteq C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega})$ es acotada. Fijamos $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Entonces $\partial_i u_n$ es acotada en $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ porque

$$\|\partial_i u_n\|_{k,\beta} = \|\partial_i u_n\|_k + \sum_{|\mu|_1 = k} [\partial^\mu \partial_i u_n]_\beta \leq \|u_n\|_{k+1} + \sum_{|\mu|_1 = k+1} [\partial^\mu u_n]_\beta = \|u_n\|_{k+1,\beta}.$$

Por la hipótesis de la inducción podemos pasar a una subsucesión tal que $\partial_i u_n \to v_i$ en $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por otro lado, (u_n) es acotada en $C^1(\overline{\Omega})$ y luego en $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ por el Lema 5.2. La primera parte da que, pasando a una subsucesión, $u_n \to u$ en $C^0(\overline{\Omega})$. Como $\partial_i u_n \to v_i$ en $C^0(\overline{\Omega})$ para todo i, el Lema 5.3 implica que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y que $\partial_i u = v_i$. Eso demuestra que $u_n \to u$ en $C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Finalmente, consideramos el caso $l > k$. Por los resultados anteriores y por el Lema 5.2 tenemos

$$C^{l,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{l,\beta/2}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$$

donde la primera inyección es completamente continua. $\square$

5.2. Problemas con Valores en la Frontera

En esta sección sean $M, N \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado.

Nos interesa encontrar soluciones $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ del problema elíptico de Dirichlet con $\lambda \geq 0$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

Para la aplicación del grado de Leray-Schauder primero necesitamos algunos espacios de funciones y resultados sobre el problema lineal relacionado.

El problema lineal relacionado con (5.5) es

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = g(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.6}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe un conjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ (el *espectro de* $-\Delta$ *respecto a condiciones de Dirichlet en la frontera*) tal que si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$ y $\alpha \in (0,1]$, entonces para todo $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ existe precisamente un función $Lg \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ que es una solución de (5.6). Además,

$$L = (\Delta + \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})), \tag{5.7}$$

es decir, L es un operador lineal acotado (i.e. continuo) entre $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ y $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. También existe $C = C(\Omega, \alpha)$ tal que

$$\|Lg\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|g\|_\infty \qquad \text{para todo } g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}). \tag{5.8}$$

Estos hechos están demostrados por ejemplos en [7], Teoremas 6.14, 6.15, la nota antes de la sección 6.4 y Teorema 9.14, con $p > N$ y encajes de Morrey.

5.3. Una Aplicación de Cotas *A Priori*

Sean $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$, $\alpha \in (0,1]$, $C_1 > 0$, $\gamma \in [0,1)$ y $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f \text{ es Hölder continuo con exponente } \alpha \text{ en subconjuntos compactos de } \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \tag{5.9}$$

y

$$|f(x,u)| \leq C_1(1 + |u|^\gamma) \qquad \text{para todo } (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

5.5 Teorema. *Bajo las condiciones* (5.9) *y* (5.10) *la Ecuación* (5.5) *tiene una solución* $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Demostración. Denotemos

$$\Lambda(R) := \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \overline{B}_R \mathbb{R})}.$$

Ponemos $E := C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Para $u \in E$ definimos $F(u)\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por

$$F(u)(x) := f(x, u(x)).$$

Primero demostremos que

$$F\colon E \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ F(A) \text{ es acotado en } C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ si } A \subseteq E \text{ es acotado.} \tag{5.11}$$

Sea $u \in E$. Denotemos $R := \|u\|_E$. Entonces $F(u) \in C(\overline{\Omega})$ y $\|F(u)\|_\infty \leq \Lambda(R)$. Existen constantes C, que solamente dependen de R y α, tales que

$$\begin{aligned}
|F(u)(x) - F(u)(y)| &= |f(x, u(x)) - f(y, u(y))| \\
&\leq \Lambda(R)|(x, u(x)) - (y, u(y))|^\alpha \\
&\leq C(|x-y| + |u(x) - u(y)|)^\alpha \\
&\leq C(|x-y| + \|u\|_E |x-y|)^\alpha \\
&\leq C|x-y|^\alpha.
\end{aligned}$$

Eso prueba (5.11).

Definimos $K\colon E \to E$ por $K := L \circ F$. Entonces tenemos la cadena de aplicaciones

$$E \xrightarrow{F} C^{0,\alpha} \xrightarrow{L} C^{2,\alpha} \hookrightarrow C^2 \hookrightarrow E. \tag{5.12}$$

A parte de F todas estas aplicaciones son continuas, y las ultimas dos son completamente continuas, por la Proposición 5.4. Como F y L mandan conjuntos acotados a conjuntos acotados

(5.13) K manda subconjuntos acotados de E a subconjuntos precompactos de E.

Demostremos que K es continuo. Supongamos que $u_n \to u$ en E. Supongamos por contradicción que $K(u_n) \not\to K(u)$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|K(u_n) - K(u)\|_E \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } n. \tag{5.14}$$

Notamos que $(LF(u_n))$ es acotado en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ por (5.11) y (5.7). Por la Proposición 5.4 $(LF(u_n))$ es precompacto en $C^2(\overline{\Omega})$. Por tanto, pasando a una subsucesión podemos suponer que $v_n := LF(u_n) \to v$ en $C^2(\overline{\Omega})$. Fijando $x \in \overline{\Omega}$ obtenemos

$$-\Delta v_n(x) + \lambda v_n(x) \to -\Delta v(x) + \lambda v(x).$$

Por otro lado, como $u_n \to u$ en E la propiedad (5.9) implica que

$$F(u_n)(x) = f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)) = F(u)(x).$$

Observando que para todo n se cumple $F(u_n) = -\Delta v_n + \lambda v_n$, se sigue que $F(u) = -\Delta v + \lambda v$, es decir, $LF(u) = v$. Eso demuestra que $K(u_n) \to K(u)$ en E para esta subsucesión, contradiciendo (5.14). Hemos probado la continuidad de K, de donde obtenemos con (5.13) que K es completamente continuo.

Encontrar una solución de (5.5) es equivalente a encontrar un punto fijo de K:

$$(-\Delta + \lambda)u = f(x, u) \Leftrightarrow u = (-\Delta + \lambda)^{-1} F(u) = K(u).$$

Apliquemos el Teorema de Schäfer, Teorema 4.28. Primero necesitamos una cota *a priori* de una función u que cumple $u = sK(u)$ para un $s \in [0,1]$. Tal u es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = sf(x,u) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.15}$$

Por (5.8)

$$C_2 := \|L\|_{\mathcal{L}(C^0(\overline{\Omega}), C^0(\overline{\Omega}))}$$

está bien definido. Usando que $\gamma \in [0,1)$, definimos

$$C_3 := \max\{t \geq 0 \mid t \leq C_1 C_2 (1 + t^\gamma)\} < \infty.$$

Por (5.15) tenemos $u = sLF(u)$ y luego

$$\|u\|_\infty \leq C_2 \|F(u)\|_\infty \leq C_1 C_2 (1 + \|u\|_\infty^\gamma).$$

La definición de C_3 implica que $\|u\|_\infty \leq C_3$. En seguida, $\|F(u)\|_\infty \leq C_4 := C_1(1 + C_3^\gamma)$. Usando esta cota (5.8) implica que existe una constante C_5 que solamente depende de α, Ω y de C_4 tal que $\|u\|_{1,\alpha} \leq C_5$. Por lo tanto, la inyección continua $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow E$ implica una cota *a priori* de $\|u\|_E$ para toda solución u de (5.15) con $s \in [0,1]$. Finalmente, el Teorema 4.28 dice que existe un punto fijo de K, es decir una solución de (5.5). $\square$

6. Temas Avanzados

Mostraremos aquí que si un campo vectorial es el gradiente de un funcional diferenciable, esa información puede ser utilizada para calcular el grado o el índice en ciertas situaciones.

6.1. Análisis en espacios de Banach

Sea en esta sección E un espacio de Hilbert real con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para $U \subseteq E$ abierto consideramos funcionales $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ que son diferenciables continuamente. Eso significa que para todo $x \in U$ existe la derivada de Frechet de Φ en x y que el mapeo $\mathrm{D}\Phi\colon U \to E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es continuo. Un $x \in U$ es un *punto crítico de* Φ si $\mathrm{D}\Phi(x) = 0$.

6.1 Definición. El gradiente de Φ es el único mapeo $\nabla\Phi\colon U \to E$ (dado por el Teorema de Riesz) tal que

$$\mathrm{D}\Phi(x)[y] = \langle \nabla\Phi(x), y \rangle$$

para todo $x \in U$ y $y \in E$.

6.2 Nota. La continuidad de $\mathrm{D}\Phi$ es equivalente a la continuidad de $\nabla\Phi$ ya que el mapeo $E^* \to E$ dado por el teorema de Riesz es un isomorfismo lineal isométrico.

6.3 Lema. *Cada extremo local de Φ es un punto crítico de Φ.*

Demostración. Sea $x_0 \in U$ un mínimo local de Φ. Supongamos por contradicción que $\mathrm{D}\Phi(x_0) \neq 0$ y pongamos $v := \nabla\Phi(x_0)/\|\nabla\Phi(x_0)\|$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x_0 - tv) - \Phi(x_0)}{t} + \|\nabla\Phi(x_0)\| &= \frac{\Phi(x_0 - tv) - \Phi(x_0)}{t} + \frac{\langle \nabla\Phi(x_0), tv \rangle}{t} \\ &= \frac{\Phi(x_0 - tv) - \Phi(x_0) - \mathrm{D}\Phi(x_0)[-tv]}{t} \to 0\end{aligned}$$

cuando $t \to 0$. Por otro lado,

$$\frac{\Phi(x_0 - tv) - \Phi(x_0)}{t} + \|\nabla\Phi(x_0)\| \geq \|\nabla\Phi(x_0)\| > 0$$

para $t > 0$ chico, una contradicción. La demostración para un máximo de Φ es análoga. $\square$

Consideraremos funcionales tales que $\nabla\Phi = I - K$ donde K es completamente continuo, el gradiente de un funcional $\Psi\colon U \to \mathbb{R}$. En ese caso resulta que $\Phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \Psi(x)$.

Recordemos que una sucesión $(x_n) \subseteq E$ *converge débilmente a* $x \in E$, en símbolos $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \qquad \text{cuando } n \to \infty, \text{ para todo } y \in E.$$

En un espacio de dimensión finita, convergencia débil y convergencia en norma son equivalentes. La parte Ψ tiene una propiedad importante al respecto:

6.4 Lema. *Sea $\Psi\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciable continuamente tal que $\nabla\Psi$ es un operador completamente continuo. Entonces $\Psi(x_n) \to \Psi(x^*)$ si $x_n \rightharpoonup x^*$ en E. En otras palabras, Ψ es continua débilmente en sucesiones.*

Demostración. Sea $x_n \rightharpoonup x^*$ en U. Por los teoremas de Riesz y de la acotación uniforme la sucesión (x_n) es acotada. Supongamos por contradicción que $\Psi(x_n) \not\to \Psi(x^*)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\Psi(x_n) - \Psi(x^*)| \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Como Ψ es diferenciable continuamente, el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor intermedio implican

$$\begin{aligned}\Psi(x_n) - \Psi(x^*) &= \int_0^1 \mathrm{D}\Psi(x^* + s(x_n - x^*))[x_n - x^*]\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 \langle \nabla\Psi(x^* + s(x_n - x^*)), x_n - x^*\rangle\,\mathrm{d}s\\ &= \langle \nabla\Psi(x^* + s_n(x_n - x^*)), x_n - x^*\rangle,\end{aligned}$$

donde $s_n \in [0,1]$. Usemos que $\nabla\Psi$ es completamente continua: Pasando a una subsucesión podemos suponer que $y_n := \nabla\Psi(x^* + s_n(x_n - x^*))$ converge a y en E. Se sigue que

$$\begin{aligned}|\Psi(x_n) - \Psi(x^*)| &= |\langle y_n, x_n - x^*\rangle|\\ &\leq |\langle y_n - y, x_n - x^*\rangle| + |\langle y, x_n - x^*\rangle|\\ &\leq \|y_n - y\|\,\|x_n - x^*\| + |\langle y, x_n - x^*\rangle|\\ &\to 0,\end{aligned}$$

ya que $y_n \to y$, $(x_n - x^*)$ queda acotada y $x_n \rightharpoonup x^*$. Esto es una contradicción a (6.1). □

Para aplicar métodos variacionales se considera el flujo gradiente generado por la siguiente ecuación ordinaria en E:

$$\dot{u} = \nabla\Phi(u). \tag{6.2}$$

Si Φ sólo es diferenciable continuamente, no es cierto en general que esa ecuación tiene soluciones únicas, un hecho necesario para mostrar la existencia de un flujo continuo. La unicidad de soluciones usualmente se obtiene de una condición de Lipschitz en el lado derecho de la ecuación ordinaria. La técnica para resolver ese problema es aproximar el gradiente de Φ por un campo vectorial en E que es Lipschitz continuo:

6.5 Lema. *Sean X, Y espacios de Banach, $U \subseteq X$ abierto y $f\colon U \to Y$ continuo. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon\colon U \to Y$ localmente Lipschitz continuo tal que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ y $f_\varepsilon(U) \subseteq \operatorname{conv}(f(U))$.*

Demostración. Definimos los conjuntos $U(x) := \{y \in U \mid \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/2\}$. Ellos forman una cubierta abierta de U. Como U es paracompacto, existe un refinamiento abierto y localmente finito $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Construimos una partición de uno como en la demostración de la Proposición 4.18:

$$\varphi_\lambda(x) := \begin{cases} \operatorname{dist}(x, \partial V_\lambda) & \text{si } x \in \overline{V}_\lambda, \\ 0 & \text{si } x \in U \setminus V_\lambda, \end{cases}$$

y

$$\psi_\lambda(x) := \frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu(x)}.$$

Como la distancia es una función Lipschitz continua, también φ_λ y ψ_λ son funciones localmente Lipschitz continuas.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ escogemos $a_\lambda \in V_\lambda$, usando el axioma de selección, y definimos

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x) f(a_\lambda).$$

Obviamente $f_\varepsilon(U) \subseteq \operatorname{conv}(f(U))$. Localmente f_ε es la suma finita de funciones Lipschitz continuas; por consiguiente, f_ε es localmente Lipschitz continua. Si $x \in V_\lambda$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $V_\lambda \subseteq U(x_0)$ y luego

$$\|f(x) - f(a_\lambda)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(a_\lambda)\| \leq \varepsilon.$$

En seguida,

$$\psi_\lambda(x)\|f(x) - f(a_\lambda)\| \leq \psi_\lambda(x)\varepsilon \qquad \text{para todo } x \in U,\ \lambda \in \Lambda.$$

Eso implica para $x \in U$ que

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| &= \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)(f(x) - f(a_\lambda))\Big\| \\ &\leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)\|f(x) - f(a_\lambda)\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x)\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

es decir, $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. □

6.6 Recapitulación. Sean X un espacio de Banach, $U \subseteq X$ abierta, $f\colon U \to X$ localmente Lipschitz continua tal que imágenes de conjuntos acotados bajo f son acotados. Entonces para todo $x \in U$ existen $T^+(x), T^-(x) \in (0, \infty]$ maximales y, escribiendo

$J(x) := (-T^-(x), T^+(x))$, una solución continuamente diferenciable y localmente única $u\colon J(x) \to U$ de la ecuación ordinaria

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \qquad u(0) = x. \tag{6.3}$$

Las aplicaciones $T^\pm\colon U \to (0, \infty]$ son semicontinuas por debajo. Si $T^+ < \infty$, entonces o bien $\lim_{t\to T^+(x)-} \|u(t)\| = \infty$ o bien $\liminf_{t\to T^+(x)-} \operatorname{dist}(u(t), \partial U) = 0$. Un enunciado análogo es cierto para $T^-(x)$.

Definimos

$$\mathcal{D} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in J(x)\};$$

entonces $\mathcal{D}$ es abierto. Escribimos $\varphi^t(x) := \varphi(t, x) := u(t)$ si $(t, x) \in \mathcal{D}$ y u es la solución de (6.3). Entonces φ es localmente Lipschitz continua y continuamente diferenciable en t. Además, si $(s, x), (s + t, x) \in \mathcal{D}$, entonces $(t, \varphi^s(x)) \in \mathcal{D}$ y

$$\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x). \tag{6.4}$$

La función φ es el *flujo (local)* generado por la ecuación diferencial ordinaria (6.3). Para estos hechos ver [2].

6.7 Recapitulación. Sean X un espacio de Banach, $a \le b$ y $f\colon [a, b] \to X$ continua. Entonces existe un y sólo un elemento $y \in X$ tal que

$$\Lambda y = \int_a^b \Lambda f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{para todo } \Lambda \in X^*. \tag{6.5}$$

Llamaremos a ese y la *integral de f sobre* $[a, b]$ y escribiremos

$$\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s := y.$$

La integral de tal función f está caracterizada completamente por (6.5). Se cumplen

$$\left\| \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_a^b \|f(s)\|\,\mathrm{d}s. \tag{6.6}$$

y, si $a < b$,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \in \operatorname{conv}(f([a, b])). \tag{6.7}$$

Si $A \in \mathcal{L}(X)$, entonces

$$A \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b Af(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.8}$$

Para estos hechos, ver por ejemplo [13], “Vector valued integration”.

6.8 Recapitulación. Si X es un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$, entonces se define la exponencial de A mediante

$$\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

La serie converge porque

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

implica que la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy en X y por la completez de X. Para $A, B \in \mathcal{L}(X)$ se cumple la identidad funcional

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A \qquad \text{siempre cuando } AB = BA. \tag{6.9}$$

Ella implica que $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ es diferenciable y que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA} A. \tag{6.10}$$

estos hechos están mostrados en [13].

6.9 Lema (La fórmula de variación de parámetros)**.** *Sean X un espacio de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$, $U \subseteq X$ abierto y $g\colon U \to X$ localmente Lipschitz continua. Si $x \in U$ y si u es la solución de*

$$\dot{u} = Au + g(u), \qquad u(0) = x, \tag{6.11}$$

entonces

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA} x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} g(u(s))\, \mathrm{d}s \tag{6.12}$$

para todo $t \in J(x)$.

Demostración. Calculamos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{(t-s)A} u(s) = -A\mathrm{e}^{(t-s)A} u(s) + \mathrm{e}^{(t-s)A} \big(Au(s) + g(u(s)) \big) = \mathrm{e}^{(t-s)A} g(u(s))$$

para $s \in [0, t]$. Se sigue que

$$u(t) - \mathrm{e}^{tA} x = \mathrm{e}^{(t-t)A} u(t) - \mathrm{e}^{(t-0)A} u(0) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{(t-s)A} u(s) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} g(u(s))\, \mathrm{d}s.$$

$\square$

6.2. El Índice en un mínimo local

En esta sección sean E un espacio de Hilbert real, $U \subseteq E$ abierto y $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciable continuamente. Supongamos también que $f := \nabla\Phi = I - F$ con un operador no lineal $F\colon U \to E$ completamente continuo. Escribimos para $c \leq d$:

$$\begin{aligned} \Phi^d &:= \{x \in U \mid \Phi(x) \leq d\} \\ \dot{\Phi}^d &:= \{x \in U \mid \Phi(x) < d\} \\ \Phi_c &:= \{x \in U \mid \Phi(x) \geq c\} \\ \Phi_c^d &:= \Phi^d \cap \Phi_c. \end{aligned}$$

6.10 Teorema. *Sean $\alpha < \beta$, $r > 0$ y $x_0 \in U$ dados tales que $V := \dot{\Phi}^\beta$ es acotado, $\overline{V} \subseteq U$,*

$$\Phi^\alpha \subseteq \overline{B}_r(x_0) \subseteq V \tag{6.13}$$

y

$$f(x) \neq 0 \qquad \text{para todo } x \in \Phi_\alpha^\beta. \tag{6.14}$$

Entonces $\deg(\nabla\Phi, V, 0) = 1$.

Demostración. Intersectando U con una bola abierta que contiene $\overline{V}$ podemos suponer que U es acotado, así que $F(U)$ es compacto relativamente.

Primero demostremos que

$$\Phi^\beta = \overline{V}. \tag{6.15}$$

La inclusión $\overline{V} \subseteq \Phi^\beta$ se sigue trivialmente de la continuidad de Φ. Como $\dot{\Phi}^\beta = V$, basta demostrar que $\Phi^{-1}(\beta) \subseteq \overline{V}$ para la inclusión inversa. Si $x \in U \backslash \overline{V}$ fuera tal que $\Phi(x) = \beta$, entonces x sería un mínimo local de Φ. Por el Lema 6.3 ese x sería un punto crítico de Φ, contradiciendo la condición (6.14). Eso comprueba (6.15).

Ponemos $\rho := \inf\{\|f(x)\| \mid \Phi(x) \in [\alpha, \beta]\}$ y demostremos que $\rho > 0$. Si eso no fuera cierto, existiría una sucesión $(x_n) \subseteq \Phi_\alpha^\beta$ tal que $\|f(x_n)\| \to 0$. Pasando a una subsucesión, $F(x_n)$ sería convergente, y como $x_n = f(x_n) + F(x_n)$, también (x_n) sería convergente con límite $x^* \in E$. Por (6.15) $(x_n) \subseteq \overline{V}$ y luego también $x^* \in \overline{V} \subseteq U$. Por continuidad, $\Phi(x^*) \in [\alpha, \beta]$ y $f(x^*) = 0$, en contradicción con (6.14).

Usando el Lema 6.5 encontramos $G\colon U \to E$ localmente Lipschitz continua tal que $\|F - G\|_\infty \leq \rho/2$ y $G(U) \subseteq \operatorname{conv}(F(U))$. El Corolario 4.6 y la completez de E implican que $\operatorname{conv}(F(U))$ es relativamente compacta, es decir, G es compacta. Poniendo $g := I - G$ se tiene que g es localmente Lipschitz continua. Por (6.15) se cumple que

$$\partial V = \Phi^{-1}(\beta) \tag{6.16}$$

y luego $\inf_{x\in\partial V}\|f\| \geq \rho$. La homotopía lineal de f a g es admisible, y por consiguiente

$$\deg(f, V, 0) = \deg(g, V, 0). \tag{6.17}$$

Sea φ el flujo generado por la ecuación ordinaria $\dot{u} = -g(u)$ en U. Tomando en cuenta que $\mathrm{e}^{tI} = \mathrm{e}^t I$ la fórmula de variación de parámetros (6.12) dice que

$$\varphi^t(x) = \mathrm{e}^{-t}x + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)} G(\varphi^s(x))\,\mathrm{d}s$$

si $(t, x) \in \mathcal{D}$. Escribiendo

$$K_t(x) := K(t, x) := \int_0^t \mathrm{e}^s G(\varphi^s(x))\,\mathrm{d}s \qquad \text{para } (t, x) \in \mathcal{D}$$

esa fórmula se traduce a

$$\varphi^t(x) = \mathrm{e}^{-t}(x + K_t(x)) \qquad \text{para } (t, x) \in \mathcal{D}. \tag{6.18}$$

Mostremos que el mapeo $L\colon \mathcal{D} \to E$, dado por

$$L(t, x) := \begin{cases} K(t, x)/t & t \neq 0, \\ G(x) & t = 0, \end{cases}$$

es completamente continuo. Para mostrar la compacidad sea $(t_n, x_n) \subseteq \mathcal{D}$ una sucesión acotada. Si existe una subsucesión tal que $t_n = 0$ para todo n, la compacidad de G da el resultado. Supondremos que $t_n \neq 0$. Como G es compacta en U,

$$A_1 := \{\mathrm{e}^s G(\varphi^s(x_n)) \mid n \in \mathbb{N},\ s \in [0, t_n]\}$$

es relativamente compacto. La identidad (6.7) implica que $L(t_n, x_n) \in \operatorname{conv}(A_1)$, $\operatorname{conv}(A_1)$ siendo relativamente compacto por la Proposición 4.6. En seguida, $L(t_n, x_n)$ tiene una subsucesión convergente. Eso muestra que L manda conjuntos acotados a conjuntos relativamente compactos.

Por la continuidad de φ y la identidad (6.18) K es continua. Por consiguiente, basta mostrar la continuidad de L en puntos $(0, x)$ donde $x \in U$. Sea entonces (t_n, x_n) una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $t_n \to 0$ y $x_n \to x^*$, para un $x^* \in U$. Por la continuidad de G podemos suponer que $t_n \neq 0$ para todo n. Como $\mathcal{D}$ es abierto en $\mathbb{R} \times E$, existe $r > 0$ tal que $A_2 := \overline{B}_r\mathbb{R} \times \overline{B}_r(x^*; E) \subseteq \mathcal{D}$. Supongamos que $(t_n, x_n) \subseteq A_2$, quitando un número finito de elementos de la sucesión. Como el mapeo $G \circ \varphi$ es localmente Lipschitz continuo en $\mathcal{D}$, $G \circ \varphi$ es Lipschitz continuo en el subconjunto compacto $\overline{B}_r\mathbb{R} \times M$ de A_2, donde $M := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x^*\}$. Existe $C \geq 0$ tal que

$$\|G(\varphi^s(x)) - G(\varphi^t(y))\| \leq C(|s - t| + \|x - y\|) \qquad \text{para todo } s, t \in \overline{B}_r\mathbb{R},\ x, y \in M. \tag{6.19}$$

En seguida,

$$\left\| \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \mathrm{e}^s \big[G(\varphi^s(x_n)) - G(x)\big]\,\mathrm{d}s \right\| \le C \frac{\mathrm{e}^{t_n} - 1}{t_n} (|t_n| + \|x_n - x\|) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Con esta información podemos calcular

$$\begin{aligned} L(t_n, x_n) - L(0, x^*) &= \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \big[\mathrm{e}^s G(\varphi^s(x_n)) - G(x)\big]\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \mathrm{e}^s \big[G(\varphi^s(x_n)) - G(x)\big]\,\mathrm{d}s + \left(\frac{\mathrm{e}^{t_n} - 1}{t_n} - 1 \right) G(x) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Eso termina la demostración de que L es completamente continuo. Notemos que $K(t,x) = tL(t,x)$ implica que también K es completamente continuo en $\mathcal{D}$.

Para todo $x \in \Phi_\alpha^\beta$ se cumple

$$\begin{aligned} \langle f(x), g(x) \rangle &= \langle f(x), f(x) + F(x) - G(x) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 + \langle f(x), F(x) - G(x) \rangle \\ &\ge \|f(x)\|^2 - \|f(x)\|\,\|F(x) - G(x)\| \\ &\ge \rho^2/2. \end{aligned}$$

Eso implica que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(\varphi^t(x)) = \mathrm{D}\Phi(\varphi^t(x))[-g(\varphi^t(x)] = -\langle f(\varphi^t(x)), g(\varphi^t(x)\rangle \le -\rho^2/2 < 0 \tag{6.20}$$

si $\varphi^t(x) \in \Phi_\alpha^\beta$, es decir, el mapeo $t \mapsto \Phi(\varphi^t(x))$ es estrictamente decreciente cerca de t tal que $\varphi^t(x) \in \Phi_\alpha^\beta$.

Mostremos que

$$\Phi(\varphi^t(x)) < \Phi(x) \qquad \text{si } x \in \Phi_\alpha^\beta,\ t \in (0, T^+(x)). \tag{6.21}$$

Si no fuera cierto, existirían $x \in \Phi_\alpha^\beta$ y $t \in (0, T^+(x))$ tales que $\Phi(\varphi^t(x)) \ge \Phi(x)$. Notemos que $\Phi(\varphi^t(x)) < \Phi(x)$ para $t > 0$ chico por (6.20). Por la continuidad del mapeo $s \mapsto \Phi(\varphi^s(x))$ existiría

$$t^* := \min\{s \in (0, T^+(x)) \mid \Phi(\varphi^s(x)) \ge \Phi(x)\} > 0.$$

Seguiría que $\Phi(\varphi^s(x)) < \Phi(x) = \Phi(\varphi^{t^*}(x))$ para todo $s \in (0, t^*)$. Pero $s \mapsto \Phi(\varphi^s(x))$ es estrictamente decreciente cerca de t^*, una contradicción. Eso muestra (6.21).

Veremos que $T^+(x) = \infty$ para todo $x \in \Phi^\beta$. Si por contradicción $T^+(x) < \infty$ para un $x \in \Phi^\beta$, $\liminf_{t \to T^+(x)} \operatorname{dist}(\varphi^t(x), \partial U) = 0$ por la Recapitulación 6.6 y porque U es acotado. Como K es completamente continua, por (6.18) existiría una sucesión $t_n \to T^+(x)-$ tal que

$\varphi^{t_n}(x)$ convergería a un punto $y \in \partial U$. Como $\operatorname{dist}(y, \overline{V}) > 0$, eso diría que $\varphi^{t_n}(x) \in U \setminus \overline{V}$ para n grande. Por (6.15) eso sería una contradicción a (6.21).

Definimos $t_0 := 2(\beta - \alpha)/\rho^2$ y mostremos, tomando en cuenta que $T^+(x) = \infty$ para todo $x \in \Phi^\beta$, que

$$\varphi^t(\Phi^\beta) \subseteq \Phi^\alpha \qquad \text{para todo } t \geq t_0. \tag{6.22}$$

Si $x \in \Phi^\beta$ y $t \geq t_0$ cumplirían $\Phi(\varphi^t(x)) > \alpha$, entonces por (6.21) tendríamos

$$\varphi^s(x) \in \Phi^\beta_\alpha \qquad \text{para todo } s \in [0, t].$$

En seguida, (6.20) muestra que

$$\alpha - \beta < \Phi(\varphi^t(x)) - \Phi(x) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi(\varphi^s(x))\, \mathrm{d}s \leq -t_0 \rho^2/2 = \alpha - \beta,$$

una contradicción. Eso comprueba (6.22).

Definimos la Homotopía

$$H(t, x) := \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} L(t, x) \qquad \text{para } (t, x) \in [0, t_0] \times \overline{V}.$$

Como L es completamente continua y $t/(\mathrm{e}^t - 1)$ es continua en $\mathbb{R}$, H es un operador compacto. Se cumple que $H_0 = G$. Ponemos $h = I_E - H$, así que $h_0 = g$. Sea $(t, x) \in [0, t_0] \times \partial V$. Por (6.16) $\Phi(x) = \beta$. Si $t = 0$, $h(0, x) = g(x) \neq 0$ porque $(g, V, 0)$ es un triple admisible. Si $t > 0$, (6.18) implica

$$h(t, x) = x - \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} L(t, x) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} (x - \varphi^t(x)).$$

Como $\varphi^t(x) \neq x$ para todo $t > 0$ y $x \in \Phi^\beta_\alpha$ por (6.21), también en ese caso se tiene $h(t, x) \neq 0$. En seguida, h es una homotopía admisible y se cumple

$$\deg(g, V, 0) = \deg(h_{t_0}, V, 0). \tag{6.23}$$

Recordemos que $\Phi^\alpha \subseteq \overline{B}_r(x_0; E) \subseteq V$. Consideramos la homotopía

$$\begin{aligned} k(t, x) &:= \frac{1}{1 - t\mathrm{e}^{-t_0}} (x - t\varphi^{t_0}(x) - (1 - t)x_0) \\ &= x - \frac{1}{1 - t\mathrm{e}^{-t_0}} (t\mathrm{e}^{-t_0} K(t_0, x) + (1 - t)x_0) \end{aligned}$$

en $[0, 1] \times \overline{V}$. Es obvio de la segunda linea que k tiene la forma $I_E -$ compacto. Tenemos $k_0 = I - x_0$ y $k_1 = h_{t_0}$. Si $k(t, x) = 0$ para $(t, x) \in [0, 1] \times \partial V$ entonces $x - x_0 = t(\varphi^{t_0}(x) - x_0)$. Por (6.16), (6.22) y (6.13) se tiene que $\|\varphi^{t_0}(x) - x_0\| \leq r$, y por (6.13) otra vez $\|x - x_0\| > r$, una contradicción. Eso muestra que k es admisible y que

$$\deg(h_{t_0}, V, 0) = \deg(I - x_0, V, 0) = \deg(I, V, x_0) = 1. \tag{6.24}$$

La combinación de (6.17), (6.23) y (6.24) concluye la demostración. $\square$

6.11 Corolario. *Sea* $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$ *diferenciable continuamente y tal que* $\Phi(x) \to \infty$ *cuando* $\|x\| \to \infty$ *(es decir,* Φ *es coercivo). Además, supóngase que existe* $r_0 > 0$ *tal que* $\nabla\Phi(x) \neq 0$ *si* $\|x\| \geq r_0$*. Entonces existe* $r_1 \geq r_0$ *tal que* $\deg(\nabla\Phi, B_r, 0) = 1$ *para todo* $r \geq r_1$*.*

Demostración. Seguiremos usando la notación $f = \nabla\Phi = I - F$ y $\Psi\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Psi = F$. Mostremos que

(6.25) Φ manda conjuntos acotados a conjuntos acotados.

Si $A \subseteq E$ es acotado, existe $\rho > 0$ tal que $A \subseteq \overline{B}_\rho$. Sea, por contradicción, $(y_n) \subseteq \Phi(A)$ una sucesión, dada como $y_n = \Phi(x_n)$ con $(x_n) \subseteq A$, tal que $|y_n| \to \infty$. Como la sucesión (x_n) es acotada, podemos suponer (pasando a una subsucesión) que (x_n) converge débilmente a un $x^* \in E$. La función Ψ es continua débilmente en sucesiones, así que $\lim_{n\to\infty} \Psi(x_n) = \Psi(x^*)$. Se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty}|y_n| \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|x_n\|^2 + |\Psi(x_n)|\right) \leq \frac{1}{2}\rho^2 + |\Psi(x^*)| < \infty,$$

una contradicción.

Pongamos $\alpha := \sup \Phi(\overline{B}_{r_0}) + 1$ y $r_1 := \sup\{\|x\| \mid x \in \Phi^\alpha\}$. Entonces $\alpha < \infty$ por (6.25), y $r_1 < \infty$ porque Φ es coercivo. Se sigue que

$$\overline{B}_{r_0} \subseteq \dot{\Phi}^\alpha \subseteq \Phi^\alpha \subseteq \overline{B}_{r_1}. \tag{6.26}$$

Dado $r \geq r_1$, fijamos $\beta > \sup \Phi(\overline{B}_r)$, otra vez usando (6.25). Luego $V := \dot{\Phi}^\beta$ es acotado, por la coercividad de Φ, y $\Phi^\alpha \subseteq \overline{B}_{r_1} \subseteq V$. Además, $f(x) \neq 0$ en $\Phi^\beta_\alpha \subseteq E\backslash\dot{\Phi}^\alpha$. Aplica el Teorema 6.10. □

6.12 Corolario. *Sea* $x_0 \in U$ *un punto crítico aislado y al mismo tiempo un mínimo local de* Φ*. Entonces* $\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_0) = 1$*.*

Demostración. Podemos suponer que $x_0 = 0$, $\Phi(0) = 0$, $U = B_{r_0}$ para un $r_0 > 0$, $f(x) \neq 0$ y $\Phi(x) > 0$ para todo $x \in B_{r_0}\backslash\{0\}$. Además, se tiene que $\Psi(0) = 0$. Fijamos r_1, r_2 tales que $0 < r_1 < r_2 < r_0$ y pongamos $\beta := \inf \Phi(\overline{B}_{r_2}\backslash B_{r_1})$. Mostremos que $\beta > 0$. Si no fuera cierto, existiría una sucesión $(x_n) \subseteq \overline{B}_{r_2}\backslash B_{r_1}$ tal que $\Phi(x_n) \to 0$. Pasando a una subsucesión, podríamos suponer que $x_n \rightharpoonup x^*$. Por la semicontinuidad débil por debajo de la norma en E en sucesiones y por la continuidad débil de Ψ en sucesiones, se seguiría que $x^* \in \overline{B}_{r_2}$ y $0 \leq \Phi(x^*) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) = 0$, es decir $\Phi(x^*) = 0$ y luego $x^* = 0$. Por otro lado, $\liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n) \geq r_1^2/2 - \lim_{n\to\infty} \Psi(x_n) = r_1^2/2 > 0$, una contradicción. Eso demuestra $\beta > 0$.

Agarramos $r \in (0, r_1]$ tal que $\overline{B}_r \subseteq \dot{\Phi}^\beta$ y ponemos $\alpha := \inf \Phi(\overline{B}_{r_2}\backslash B_r)/2$. Usamos $U := B_{r_2}$, así que $V := \dot{\Phi}^\beta \subseteq B_{r_1}$. Se sigue que $\alpha < \beta$, $\overline{V} \subseteq \overline{B}_{r_1} \subseteq U$, $\Phi^\alpha \subseteq \overline{B}_r \subseteq V$. Además, $\Phi^\beta_\alpha \subseteq B_{r_2}\backslash\{0\}$, es decir, $f(x) \neq 0$ si $x \in \Phi^\beta_\alpha$. Ahora basta aplicar el Teorema 6.10 para obtener

$$\operatorname{ind}(\nabla\Phi, 0) = \deg(\nabla\Phi, B_{r_2}, 0) = \deg(\nabla\Phi, V, 0) = 1.$$

□

6.3. El índice de un paso de montaña

Supongamos en esta sección que E es un espacio de Hilbert real.

6.13 Recapitulación. Sean E un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(E)$ simétrico. Se cumplen

(a) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $\langle Ax, x\rangle \in \operatorname{conv}\sigma(A)$ para todo $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$.

(c) Sean $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq \sigma(A)$ subconjuntos ajenos y relativamente abiertos y cerrados en $\sigma(A)$, tales que $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Entonces existen subespacios cerrados E_i de E que son invariantes bajo A, tales que $E_1 \perp E_2$, $E = E_1 \oplus E_2$ y $\sigma(A|_{E_i}) = \sigma_i$. Ellos se llaman los *espacios espectrales de* σ_i.

6.14 Recapitulación. Si $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable dos veces, entonces $\|\nabla\Phi(x)\| = \|\mathrm{D}\Phi(x)\|$ en U, por el teorema de Riesz. La segunda derivada es un operador bilineal simétrico, y puede ser identificada con la primera derivada de $\nabla\Phi$ según

$$\mathrm{D}^2\Phi(x)[v, w] = \langle \mathrm{D}\nabla\Phi(x)v, w\rangle.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^2\Phi(x)\| &= \sup_{v,w\in S_1E} \|\mathrm{D}^2\Phi(x)[v, w]\| \\
&= \sup_{v,w\in S_1E} |\langle \mathrm{D}\nabla\Phi(x)v, w\rangle| \\
&= \sup_{v\in S_1E} \|\mathrm{D}\nabla\Phi(x)v\| \\
&= \|\mathrm{D}\nabla\Phi(x)\|.
\end{aligned}$$

6.15 Recapitulación. Sea Y un subespacio cerrado del espacio de Banach X. Sean $U \subseteq X$ abierto y $f\colon U \to Z$ continuamente diferenciable, donde Z es otro espacio de Banach. La derivada parcial $\mathrm{D}_Y f(x) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ para $x \in U$ es la derivada en 0 del mapeo $V \to Z$, $y \mapsto f(x+y)$, donde V es una vecindad de 0 en Y suficientemente chica tal que $x+V \subseteq U$.

Si X es un espacio de Hilbert y $Z = \mathbb{R}$, entonces el gradiente del mapeo $y \mapsto f(x + y)$ en 0 es $P_Y\nabla f(x)$, donde P_Y es la proyección ortogonal a Y en X, ya que

$$\langle P_Y\nabla f(x), v\rangle = \langle\nabla f(x), v\rangle = \mathrm{D}f(x)v = \mathrm{D}_Y f(x)v$$

para todo $v \in Y$.

Necesitaremos una versión extendida del teorema de punto fijo de Banach, donde la situación depende de parámetros. Sean X, Y espacios métricos no vacíos, Y completo, $f\colon X \times Y \to Y$ y $M \in [0, 1)$ tales que

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \le Md(y_1, y_2) \qquad \text{para todo } x \in X,\ y_1, y_2 \in Y.$$

En esta situación se dice que f es una *contracción en* Y*, uniformemente en* X. Escribamos $f_x(y) := f(x, y)$.

6.16 Proposición. *Si f es una contracción en Y, uniformemente en X, y si $f(\cdot, y)\colon X \to Y$ es continua para todo $y \in Y$, entonces existe para todo $x \in X$ un y sólo un punto fijo $\eta(x)$ de f_x, y el mapeo η es continuo.*

Demostración. Es fácil ver que f es un mapeo continuo. Fijemos $y_0 \in Y$. Para $k \in \mathbb{N}_0$ escribimos

$$f_x^k := \underbrace{f_x \circ f_x \circ \cdots \circ f_x}_{k \text{ veces}}.$$

El teorema de Banach dice que existe el punto fijo único $\eta(x)$ de f_x para todo $x \in X$, y que $\eta(x) = \lim_{k\to\infty} f_x^k(y_0)$. Además se tiene

$$d(\eta(x), f_x^k(y_0)) \le \frac{M^k}{1-M} d(f_x(y_0), y_0). \tag{6.27}$$

Sea $(x_n) \subseteq X$ convergente con límite x^*. Ponemos $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} d(f(x_n, y_0), y_0) < \infty$, usando que f es continua. Si $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que $CM^{k_0}/(1-M) \le \varepsilon/2$. Se sigue para todo n que

$$\begin{aligned} d(\eta(x_n), \eta(x^*)) \le d(\eta(x_n), f_{x_n}^{k_0}(y_0)) + d(f_{x_n}^{k_0}(y_0), f_{x^*}^{k_0}(y_0)) + d(f_{x^*}^{k_0}(y_0), \eta(x^*)) \\ \le d(f_{x_n}^{k_0}(y_0), f_{x^*}^{k_0}(y_0)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} d(\eta(x_n), \eta(x^*)) \le \varepsilon$ por la continuidad de f. Dejando $\varepsilon \to 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} d(\eta(x_n), \eta(x^*)) = 0$. Eso muestra que η es continua. □

Notemos que la Proposición 3.11 es cierta en espacios normados, es decir, las componentes conexas y las componentes arcoconexas de un subconjunto abierto Ω de un espacio normado X coinciden. Además, ellas son abiertas en X y cerradas en Ω.

6.17 Definición. Sean $U \subseteq E$ un subconjunto abierto y $\Phi\colon U \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Un punto crítico x_0 de Φ es un *punto de tipo paso de montaña* (PM) si existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de x_0 tal que para toda vecindad abierta $W \subseteq V$ de x_0 y para $c := \Phi(x_0)$ el conjunto $\dot{\Phi}^c \cap W$ no es vacío y no es conexo.

6.18 Teorema. *Sean $U \subseteq E$ abierto, $\Phi\colon U \to E$ dos veces continuamente diferenciable tal que $f := \nabla\Phi = I - F$ con $F \in \mathcal{K}(U, E)$. Sea $x_0 \in U$ un punto crítico aislado de Φ de tipo* (PM). *Además, sea* $\dim \mathcal{N}(\mathrm{D}f(x_0)) \le 1$ *si* $\sigma(\mathrm{D}f(x_0)) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. *Entonces* $\mathrm{ind}(f, x_0) = -1$.

6.19 Nota. Cuando Φ es tal que sus puntos críticos son soluciones de una ecuación diferencial (parcial) escalar del orden dos, muchas veces el espacio propio del primer valor propio de $I - \mathrm{D}F(x)$ tiene dimensión uno. Así la última condición del teorema es cierta automáticamente en esos casos.

Demostración del Teorema 6.18. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y $c = 0$, es decir, $\Phi(0) = 0$ y $f(0) = \nabla\Phi(0) = 0$. Podemos también suponer que 0 es el único punto crítico de Φ en U. Escribimos $A := \mathrm{D}f(0) = I - \mathrm{D}F(0)$. Por el Lema 4.42 $\mathrm{D}F(0)$ es un operador lineal compacto. Por las propiedades del espectro de operadores compactos $\sigma(A) = \sigma(I - \mathrm{D}F(0))$ consiste de 1 y de a lo más un conjunto numerable de valores propios que convergen a 1. Los subconjuntos $\sigma_\pm := \sigma(A) \cap \mathbb{R}^\pm$ y $\sigma_0 := \sigma(A) \cap \{0\}$ son abiertos y cerrados en $\sigma(A)$. Podemos denotar por $E_\pm$ y E_0 los espacios espectrales respectivos y por $P_\pm$ y P_0 las proyecciones ortogonales a esos espacios, usando el inciso (c) de la recapitulación 6.13. Usaremos también la notación $X := E_0$ y $Y := E_+ \oplus E_-$ y las proyecciones ortogonales respectivas P_X y P_Y. Sea

$$m := \text{mín}\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}\}.$$

El inciso (b) de la misma recapitulación implica que

$$\langle Ae, e\rangle \geq m \qquad e \in S_1E_+ \tag{6.28}$$

$$\langle Ae, e\rangle \leq -m \qquad e \in S_1E_-. \tag{6.29}$$

(6.30)

Se sigue para $y_\pm \in E_\pm$ y $y = y_+ + y_-$ que

$$\|Ay_\pm\|\,\|y_\pm\| \geq |\langle Ay_\pm, y_\pm\rangle| \geq m\|y_\pm\|^2,$$

es decir, $\|Ay_\pm\| \geq m\|y_\pm\|$. Entonces la invariancia y ortogonalidad de $E_\pm$ implica

$$\|Ay\|^2 = \|Ay_+\|^2 + \|Ay_-\|^2 \geq m^2(\|y_+\|^2 + \|y_-\|^2) = m^2\|y\|^2,$$

y luego

$$\|Ay\| \geq m\|y\| \qquad \text{para todo } y \in Y. \tag{6.31}$$

El mapeo $U \to Y$, $z \mapsto P_Yf(z)$, es continuamente diferenciable y tiene un cero en 0. Su derivada parcial $\mathrm{D}_YP_Yf(0) = P_YA|_Y$ en 0 es un isomorfismo. En seguida, el teorema de la función implícita dice que existen $r_0 > 0$ y un mapeo continuamente diferenciable $\kappa\colon B_{r_0}X \to Y$ tales que para $V := B_{r_0}X + B_{r_0}E_+ + B_{r_0}E_-$ se tiene

$$\{z \in V \mid P_Yf(z) = 0\} = \{(x, \kappa(x)) \mid x \in B_{r_0}X\}$$

y

$$\kappa(0) = 0,\ \mathrm{D}\kappa(0) = 0.$$

Aquí escribimos $(x, y) := x + y$ para $x \in X$ y $y \in Y$. En lo que sigue denotaremos $\Gamma(x) := \Phi(x + \kappa(x))$ y

$$g(x) := P_Xf(x + \kappa(x)) = f(x + \kappa(x)) \in X$$

para $x \in B_{r_0}X$. Claramente Γ es continuamente diferenciable. Demostremos que $\nabla\Gamma = g$, así que Γ es dos veces continuamente diferenciable. Si $x \in B_{r_0}X$, $\mathrm{D}_Y\Phi(x+\kappa(x)) = P_Y f(x+\kappa(x)) = 0$. Calculamos:

$$\mathrm{D}\Gamma(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x,\kappa(x)) = \mathrm{D}_X\Phi(x,\kappa(x)) + \mathrm{D}_Y\Phi(x,\kappa(x))\mathrm{D}\kappa(x) = \mathrm{D}_X\Phi(x,\kappa(x))$$

y luego $\nabla\Gamma(x) = P_X f(x+\kappa(x)) = g(x)$.

Mostremos la siguiente fórmula:

$$\operatorname{ind}(f,0) = (-1)^{\dim E_-}\operatorname{ind}(g,0). \tag{6.32}$$

Para eso consideramos la homotopía

$$H(t,z) := \begin{cases} P_X F(x + (1-t)y + t\kappa(x)) + P_Y F(z), & t \in [0,1], \\ P_X F(x+\kappa(x)) + P_Y F((2-t)x + y), & t \in [1,2], \end{cases}$$

escribiendo $z = x + y$ con $x \in X$ y $y \in Y$. Como $\dim X < \infty$, el mapeo κ es compacto, así que la compacidad de F implica que también H es compacta. Denotamos $h := I_E - H$. Si $t \in [0,1]$, $z \in V$ y $h(t,z) = 0$, entonces $P_Y f(x+\kappa(x)) = 0$ y (6.31) implican $0 = \|P_Y h(t,z)\| = \|P_Y f(z)\|$, es decir, $y = \kappa(x)$. Por consiguiente, $0 = h(t,z) = f(z)$ y luego $z = 0$. Si $t \in [1,2]$, $z \in V$ y $h(t,z) = 0$, entonces $0 = P_X h(t,z) = P_X f(x+\kappa(x)) = f(x+\kappa(x))$. Eso implica que $x = 0$ y luego $0 = \|P_Y h(t,x)\| = \|P_Y f(y)\|$ es decir, $y = 0$. En seguida, h es una homotopía admisible en cualquier vecindad de 0 contenida en V, y se sigue que

$$\operatorname{ind}(f,0) = \operatorname{ind}(h_0,0) = \operatorname{ind}(h_2,0) = \deg(A, B_1Y, 0)\operatorname{ind}(g,0).$$

Aquí usamos que $h_2(x+y) = P_X f(x+\kappa(x)) + P_Y f(y)$, es decir, la parte en X sólo depende de x, y la parte en Y sólo depende de y. No es difícil, usando la definición del grado de Leray-Schauder, extender la Proposición 3.34 a ese caso. Con el Teorema 4.40, aplicado a $\deg(A, B_1Y, 0)$, concluimos la demostración de (6.32).

Construiremos una forma normal del funcional Φ: mostraremos que existe un homeomorfismo μ definido en una vecindad de 0 en E con rango en V tal que

$$\Phi(\mu(x+y_+ + y_-)) = \Gamma(x) + \frac{1}{2}\|y_+\|^2 - \frac{1}{2}\|y_-\|^2 =: \widetilde{\Phi}. \tag{6.33}$$

Para alcanzar esto, definimos la homotopía $\Lambda\colon [0,1] \times B_{r_0}X \times B_{r_0}Y \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\Lambda(t,x,y) := (1-t)\widetilde{\Phi}(z) + t\Phi(x+\kappa(x)+y).$$

Notemos que $B_{r_0}X \times B_{r_0}Y \subseteq V$. Podemos suponer, por la continuidad de $\mathrm{D}f$, que r_0 es tan chico que

$$\|\mathrm{D}f(z) - A\| \le \min\{m,1\}/2 \qquad \text{para todo } z \in V. \tag{6.34}$$

Calculamos cotas para algunas derivadas de Λ:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}_t\Lambda(t,x,y)| &= |\Phi(x+\kappa(x)+y) - \Gamma(x) - \|y_+\|^2 + \|y_-\|^2| \\
&= \left|\int_0^1 \mathrm{D}\Phi(x+\kappa(x)+sy)y\,\mathrm{d}s - \|y_+\|^2 + \|y_-\|^2\right| \\
&= \left|\int_0^1 \langle f(x+\kappa(x)+sy), y\rangle\,\mathrm{d}s - \|y_+\|^2 + \|y_-\|^2\right| \\
&= \left|\int_0^1\int_0^1 \langle \mathrm{D}f(x+\kappa(x)+rsy)sy, y\rangle\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s - \|y_+\|^2 + \|y_-\|^2\right| \\
&\leq \int_0^1\int_0^1 \|\mathrm{D}f(x+\kappa(x)+rsy)\|\,\|y\|^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s + \|y_+\|^2 + \|y_-\|^2 \\
&\leq C_1\|y\|^2
\end{aligned} \tag{6.35}$$

por (6.34), para una constante $C_1 \geq 0$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
P_Y\nabla\Lambda(t,x,y) &= tP_Yf(x+\kappa(x)+y) + (1-t)(y_+ - y_-) \\
&= t\int_0^1 P_Y\mathrm{D}f(x+\kappa(x)+sy)y\,\mathrm{d}s + (1-t)(y_+ - y_-).
\end{aligned} \tag{6.36}$$

De (6.28) y (6.29) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|tAy_+ + (1-t)y_+\|\,\|y_+\| &\geq \langle tAy_+ + (1-t)y_+, y_+\rangle \\
&\geq (tm + 1 - t)\|y_+\|^2 \\
&\geq \mathrm{mín}\{m,1\}\|y_+\|^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|tAy_- - (1-t)y_-\|\,\|y_-\| &\geq \langle tAy_- - (1-t)y_-, -y_-\rangle \\
&\geq (tm + 1 - t)\|y_-\|^2 \\
&\geq \mathrm{mín}\{m,1\}\|y_-\|^2.
\end{aligned}$$

Con eso se sigue que

$$\begin{aligned}
\|tAy + (1-t)(y_+ - y_-)\|^2 &= \|tAy_+ + (1-t)y_+\|^2 + \|tAy_- - (1-t)y_-\|^2 \\
&\geq \mathrm{mín}\{m^2,1\}(\|y_+\|^2 + \|y_-\|^2) \\
&= \mathrm{mín}\{m^2,1\}\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Insertar esta desigualdad en (6.36) implica

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}_Y\Lambda(t,x,y)\| &\geq \|tAy + (1-t)(y_+ - y_-)\| - t\int_0^1 \|\mathrm{D}f(x+\kappa(x)+sy) - A\|\,\mathrm{d}s\|y\| \\
&\geq \frac{\mathrm{mín}\{m,1\}}{2}\|y\|.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, existen constantes $C_2, C_3 \geq 0$ tales que

$$C_2\|y\| \leq \|\mathrm{D}_Y \Lambda(t,x,y)\| \leq C_3\|y\|. \tag{6.37}$$

De (6.36) obtenemos

$$\mathrm{D}_Y P_Y \nabla\Lambda(t,x,y) = tP_Y \mathrm{D}_Y f(x+\kappa(x)+y) - (P_+ - P_-)$$

y luego por (6.34) una constante $C_4 \geq 0$ tal que

$$\|\mathrm{D}_Y^2 \Lambda(t,x,y)\| \leq C_4 \tag{6.38}$$

para $(t,x,y) \in [0,1] \times B_{r_0}X \times B_{r_0}Y$. Similarmente, (6.36) implica

$$\mathrm{D}_t P_Y \nabla\Lambda(t,x,y) = P_Y f(x+\kappa(x)+y) - (y_+ - y_-) = \int_0^1 P_Y \mathrm{D} f(x+\kappa(x)+sy)y\,\mathrm{d}s - (y_+ - y_-)$$

y luego

$$\|\mathrm{D}_t \mathrm{D}_Y \Lambda(t,x,y)\| \leq C_5\|y\|, \tag{6.39}$$

otra vez por (6.34).

Definimos un campo vectorial k en $B_{r_0}Y$ que depende del tiempo t y de $x \in B_{r_0}X$ como parámetro:

$$k(t,x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ -\mathrm{D}_t\Lambda(t,x,y)\dfrac{P_Y\nabla\Lambda(t,x,y)}{\|P_Y\nabla\Lambda(t,x,y)\|^2} & \text{si } y \neq 0. \end{cases}$$

Entonces k está bien definida por (6.37), y resulta ser continua en $[0,1] \times B_{r_0}X \times (B_{r_0}Y \backslash \{0\})$. Las desigualdades (6.35) y (6.37) implican que

$$\|k(t,x,y)\| \leq \frac{C_1}{C_2}\|y\| \tag{6.40}$$

y por tanto que k es continua en todo $[0,1] \times B_{r_0}X \times B_{r_0}Y$.

Mostremos que k es Lipschitz continua en $y \in B_{r_0}Y$. Denotemos $\Lambda_t := \mathrm{D}_t\Lambda$ etc. Estimamos primero para $y \neq 0$, usando (6.35), (6.37), (6.38) y (6.39),

$$\|\mathrm{D}_Y k(t,x,y)\| = \left\| \Lambda_{tY}\frac{\Lambda_Y}{\|\Lambda_Y\|^2} + \Lambda_t \frac{\Lambda_{YY}\|\Lambda_Y\|^2 - 2\Lambda_Y\|\Lambda_Y\|\Lambda_{YY}}{\|\Lambda_Y\|^4} \right\| \\ \leq \frac{C_5}{C_2} + \frac{C_1C_4}{C_2} =: C_6,$$

es decir, $\mathrm{D}_Y k$ es acotado en $B_{r_0}Y\backslash\{0\}$. Si $y_0, y_1 \in B_{r_0}Y\backslash\{0\}$, existe un camino continuamente diferenciable $\gamma\colon [0,1] \to B_{r_0}Y\backslash\{0\}$ tal que $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$ y tal que su longitud verifica

$$\int_0^1 \|\dot\gamma(t)\| \,\mathrm{d}t \leq 2\|y_2 - y_1\|.$$

Aquí uno puede tomar el camino $(1-t)y_0 + ty_1$ y modificarlo un poco para evitar 0. Se sigue que

$$\begin{aligned}\|k(t,x,y_1) - k(t,x,y_0)\| &= \left\|\int_0^1 \mathrm{D}_Y k(t,x,\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leq C_6 \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \leq 2C_6\|y_1 - y_0\|,\end{aligned}$$

para todo t, x admisible. Junto con (6.40) eso implica que k es Lipschitz continua en y, independientemente de t y x.

Para $x \in B_{r_0}X$ y $y \in B_{r_0}Y$ sea $t \mapsto \eta(t,x,y)$ la única solución de la ecuación en u

$$\dot u(t) = k(t,x,u(t)), \qquad u(0) = y, \tag{6.41}$$

ver [2]. Esta ecuación no es autónoma ya que el lado derecho depende de t, y depende de el parámetro x. La solución maximal $\eta(\cdot,x,y)$ en $J(x,y) = [0, T^+(x,y))$, donde $T^+(x,y) \leq 1$, se construye para cada $x \in B_{r_0}X$ y $y \in B_{r_0}Y$ de la misma manera como en el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf, ahora usando el teorema de punto fijo de Banach con un parámetro, Proposición 6.16. Si definimos

$$\mathcal{D} := \{(t,x,y) \in [0,1] \times B_{r_0}X \times B_{r_0}Y \mid t \in J(x,y)\},$$

$\mathcal{D}$ es abierta en $[0,1] \times B_{r_0}X \times B_{r_0}Y$ y $\eta\colon \mathcal{D} \to B_{r_0}Y$ es continua. Definimos $V' \subseteq B_{r_0}X \times B_{r_0}Y$ como la preimagen de $B_{r_0}Y$ bajo el mapeo $\eta^1 := \eta(1,\cdot,\cdot)$. Como $k(t,x,0) = 0$, $(0,0) \in V'$. Por la continuidad de η^1 V' es abierta. Existe $r_1 \in (0,r]$ tal que con $W_\pm := B_{r_1}E_\pm$ se tiene $B_{r_1}X \times W_+ \times W_- \subseteq V'$.

Mostremos que para $x \in B_{r_1}X$ fijo el mapeo $\eta^1_x := \eta(1,x,\cdot)$ es un homeomorfismo de $W_+ \times W_-$. Si $y_0 \in W_+ \times W_-$ y $u(t) := \eta(t,x,y_0)$, ponemos $y_1 := u(1)$. La función $v(t) := u(1-t)$ resuelve el problema

$$\dot v(t) = -k(1-t,x,v(t)), \qquad v(0) = y_1 \tag{6.42}$$

y cumple $v(1) = y_0$. El problema (6.42) puede ser tratado de la misma manera como el problema (6.41), generando un sistema dinámico continuo que da, para x fijo y tiempo 1, la inversa continua η^{-1}_x de η^1_x. Además, η^{-1}_x también depende continuamente de x.

Definimos $\mu\colon B_{r_1}X \times W_+ \times W_- \to X \times Y$ por $\mu(x,y) := x + \kappa(x) + \eta^1_x(y)$ y mostremos que μ es invertible con inversa $\nu(x,y) := x + \eta^{-1}_x(y - \kappa(x))$. Sean $x \in B_{r_1}X$ y $y \in W_+ \times W_-$. Denotando $x' := P_X\mu(x,y) = x$ y $y' := P_Y\mu(x,y) = \kappa(x) + \eta^1_x(y)$, calculamos

$$\nu(\mu(x,y)) = x' + \eta^{-1}_{x'}(y' - \kappa(x')) = x + \eta^{-1}_x(\kappa(x) + \eta^1_x(y) - \kappa(x)) = x + y.$$

Eso demuestra que $\nu = \mu^{-1}$, definida en la imagen de μ. Por la continuidad de κ, η_x^1 y η_x^{-1} en x y y, μ es un homeomorfismo.

Tenemos para $t \in [0,1]$ y $x \in B_{r_1}X$ y $y \in W_+ \times W_- \backslash \{0\}$ que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,x,\eta(t,x,y)) &= \mathrm{D}_t\Lambda(t,x,\eta(t,x,y)) + \mathrm{D}_Y\Lambda(t,x,\eta(t,x,y))[\dot{\eta}(t,x,y)] \\ &= \mathrm{D}_t\Lambda(t,x,\eta(t,x,y)) + \langle P_Y \nabla\Lambda(t,x,\eta(t,x,y)), k(t,x,\eta(t,x,y))\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

por la definición de k. Si $y = 0$, entonces $\eta(t,x,0) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, y $\Lambda(t,x,0) = 0$ también implica que $\Lambda(t,x,\eta(t,x,0))$ tiene derivada cero. En seguida, Λ es constante a lo largo de órbitas de η y se tiene

$$\Phi(\mu(x,y)) = \Lambda(1,x,\eta(1,x,y)) = \Lambda(0,x,\eta(0,x,y)) = \widetilde{\Phi}(x+y),$$

es decir, la forma normal (6.33) deseada.

Usaremos esa forma normal para calcular los términos $\dim E_-$ y $\operatorname{ind}(g,0)$ de la fórmula (6.32). Como μ es un homeomorfismo de una vecindad de 0, 0 es el único punto crítico de $\widetilde{\Phi}$ en $B_{r_1}X \times W_+ \times W_-$, y es de tipo (PM). Para simplificar la notación, escribiremos ahora Φ para $\widetilde{\Phi}$. En seguida, usaremos la representación

$$\Phi(x + y_+ + y_-) = \Gamma(x) + \frac{1}{2}\|y_+\|^2 - \frac{1}{2}\|y_-\|^2. \tag{6.43}$$

También supongamos que r_1 es tan chico que

(6.44) toda vecindad abierta $W' \subseteq B_{r_1}X \times W_+ \times W_-$ de 0 cumple que $W' \cap \dot{\Phi}^0$ es no vacía y no conexa.

Escogemos $r_2 \in (0, r_1]$ suficientemente chico tal que

$$\|\Gamma(x)\| \leq \frac{r_1^2}{9} \qquad \text{para todo } x \in W_0 := B_{r_2}X. \tag{6.45}$$

Eso se puede ya que Γ es continua y $\Gamma(0) = 0$. Denotemos $W := W_0 \times W_+ \times W_-$ y $\Omega := W \cap \dot{\Phi}^0$, así que (6.44) implica

(6.46) Ω es no vacía y no conexa.

Se cumple que $W_- \backslash \{0\} \subseteq \dot{\Phi}^0$ por (6.43).

Mostremos primero que

(6.47) Si $\dim E_- \geq 1$, toda componente conexa de Ω tiene intersección no vacía con $W_- \backslash \{0\}$.

Sea $z_0 \in \Omega$. Basta mostrar que existe un camino de z_0 en Ω a un elemento en $W_- \backslash \{0\}$. Escribimos $z_0 = x + y_+ + y_-$ con $x \in W_0$ y $y_\pm \in W_\pm$. El camino $\gamma_1(t) := z_0 + (1-t)y_+ + y_-$

conecta z_0 con $z_1 := x+y_-$ en Ω, por (6.43) y porque la norma de la parte en Y_+ decrementa a lo largo de γ_1. Pongamos $y := \max\{r_1/(2\|y_-\|), 1\}y_-$ y $z_2 := x + y$. El camino $\gamma_2(t) := x + (1-t)y_- + ty$ conecta z_1 con z_2 en Ω porque la norma de parte en Y_- incrementa a lo largo de γ_2. Definimos $z_3 := y \in W_-\backslash\{0\}$ y $\gamma_3(t) := (1-t)x + y$. Para $t \in [0,1]$ se tiene que

$$\Phi(\gamma_3(t)) = \Gamma((1-t)x) - \frac{1}{2}\|y\|^2 \leq \frac{r_1^2}{9} - \frac{r_1^2}{8} < 0$$

porque $(1-t)x \in W_0$ para $t \in [0,1]$. En conclusión, la unión de los caminos γ_1, γ_2 y γ_3 conecta z_0 con z_3 en Ω.

Ahora mostremos que

$$\dim E_- \leq 1. \tag{6.48}$$

Supongamos por contradicción que $\dim E_- \geq 2$. Basta mostrar que Ω es conexa para obtener una contradicción con (6.46). Sean $z_0, z_1 \in \Omega$. Por (6.47) existen $z_0', z_1' \in W_-\backslash\{0\}$ tales que z_0 y z_0' están en la misma componente conexa de Ω, y tales que z_1 y z_1' están en la misma componente conexa de Ω. Pero $W_-\backslash\{0\} \subseteq \Omega$ es conexo porque $\dim E_- \geq 2$. Por consiguiente, podemos completar el camino de z_0 a z_1 en Ω usando un camino en $W_-\backslash\{0\}$ que conecta z_0' con z_1'. Eso muestra que Ω es conexa y luego (6.48).

Tratemos el caso de que $\dim E_- = 1$. Por el Corolario 6.12 y por (6.32) basta mostrar que 0 es un mínimo local de Γ. Si eso no fuera cierto, existiría un $x \in W_0 \cap \dot{\Gamma}^0$. Mostremos que Ω es conexo, dando una contradicción con (6.46). Por (6.47) Ω tiene a lo más dos componentes conexas. Sean $y_0, y_1 \in W_-\backslash B_{r_1/2}E$ representantes de esas componentes. Definimos el camino

$$\gamma(t) := \begin{cases} y_0 + tx, & t \in [0,1], \\ (2-t)y_0 + (t-1)y_1 + x, & t \in [1,2], \\ y_1 + (3-t)x, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Para $t \in [0,1]$ tenemos que

$$\Phi(\gamma(t)) = \Gamma(tx) - \frac{1}{2}\|y_0\|^2 \leq \frac{r_1^2}{9} - \frac{r_1^2}{8} < 0.$$

Para $t \in [1,2]$ se cumple

$$\Phi((2-1)y_0 + (t-1)y_1 + x) \leq \Gamma(x) < 0$$

por (6.43). Y para $t \in [2,3]$ se tiene $\Phi(\gamma(t)) < 0$ por el mismo argumento que se usó en el caso $t \in [0,1]$. El camino γ conecta los puntos y_0 y y_1 en Ω, es decir, Ω es conexo.

Sólo falta ver el caso $\dim E_- = 0$, es decir, $\sigma(\mathrm{D}f(0)) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Por las hipótesis tenemos $\dim X \leq 1$. Si fuera cierto $X = \{0\}$, entonces 0 sería un mínimo local de Φ, es decir, $\Omega = \varnothing$. Eso sería una consecuencia de que 0 es un punto crítico aislado. Tendríamos una contradicción con (6.46). Por lo tanto, $\dim X = 1$. Mostremos que Γ tiene un máximo local en 0. Escogemos $e \in S_1 X$. Por 0 ser un punto crítico aislado de Γ, el mapeo $\tau\colon t \mapsto \Gamma(te)$ es estrictamente monótono en $(-r_2, 0)$ y en $(0, r_2)$. Si τ tendría un mínimo local en 0, entonces Φ tendría un mínimo local en 0, caso que ya quedó excluido en argumentos anteriores. Si τ sería estrictamente creciente en $B_{r_2}\mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces τ sería estrictamente creciente en $B_{r_2}\mathbb{R}$, por su continuidad. Tendríamos por (6.43) que Ω es conexo: Cada $z = x + y \in \Omega$, donde $x \in X$ y $y \in Y$, podría ser conectado en Ω con $x \in W_0 \cap \dot{\Phi}^0$ por el segmento entre z y x. Como $W_0 \cap \dot{\Phi}^0 = (-r_2, 0)$ sería conexo, también Ω sería conexo, en contradicción con (6.46). Entonces τ no puede ser estrictamente creciente. En la misma manera se muestra que τ no puede ser estrictamente decreciente. El único caso que queda es donde 0 es un máximo local de τ. Como $\tau' > 0$ en $(-r_2, 0)$ y $\tau' < 0$ en $(0, r_2)$, $\operatorname{ind}(\tau', 0) = -1$. El mapeo $B_{r_2}\mathbb{R} \to W_0$, $t \mapsto te$, es un homeomorfismo, así que $\operatorname{ind}(g, 0) = \operatorname{ind}(\tau', 0) = -1$. La conclusión del teorema ahora es una consecuencia de $\dim E_- = 0$ y (6.32). □

6.20 Ejemplo. Sea $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$ coercivo y continuamente diferenciable tal que $\nabla\Phi = I - K$ con K completamente continuo y $K = \nabla\Psi$. Si Φ tiene un punto crítico x_1 que no es un mínimo global, y si se cumple uno de

(i) x_1 es un mínimo local de Φ;

(ii) K es diferenciable en x_1 tal que $I - \mathrm{D}K(x_1)$ es inyectiva;

(iii) K es continuamente diferenciable en una vecindad de x_1 y x_1 es un paso de montaña para Φ.

Entonces, Φ tiene al menos tres puntos críticos.

Para ver esto, primero mostremos que Φ alcanza un mínimo global. Sea (y_n) tal que $\Phi(y_n) \to \inf \Phi(E)$. Por la coercividad de Φ, (y_n) queda acotada, y podemos suponer que $y_n \rightharpoonup x_2$. La continuidad débil de Ψ en sucesiones (véase el Lema 6.4) y la semicontinuidad débil por debajo de $\|\cdot\|$ en sucesiones implican que $-\infty < \Phi(x_2) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(y_n) = \inf \Phi(E)$, es decir, Φ tiene un mínimo global en x_2.

Si no fuera cierto que Φ tiene otro punto crítico, entonces x_1, x_2 serían puntos críticos aislados. Tendríamos que

$$\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_2) = 1 \tag{6.49}$$

por el Corolario 6.12. En el caso (i) el mismo Corolario daría $\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_1) = 1$. En el caso (ii) la Proposición 4.43 daría $|\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_1)| = 1$. El caso (iii) está cubierto por el Teorema 6.18 y daría $\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_1) = -1$. En todos los casos tendríamos que

$$|\operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_1)| = 1. \tag{6.50}$$

Además, el Corolario 6.11 implica que si $r > 0$ es suficientemente grande, $x_1, x_2 \in B_r E$ y

$$\deg(\nabla\Phi, B_r E, 0) = 1. \tag{6.51}$$

Pero por la propiedad (D2) tendríamos

$$\deg(\nabla\Phi, B_r E, 0) = \operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_1) + \operatorname{ind}(\nabla\Phi, x_2),$$

en contradicción con (6.49), (6.50) y (6.51).

Esta sección está basada en los artículos [1, 10]. Ver también [9, 12].

Bibliografía

[1] H. Amann, *A note on degree theory for gradient mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 4, 591–595. MR 83i:47069

[2] ———, *Ordinary differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 13, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990, An introduction to nonlinear analysis, Translated from the German by Gerhard Metzen. MR MR1071170 (91e:34001)

[3] C. Bandle and W. Reichel, *Solutions of quasilinear second-order elliptic boundary value problems via degree theory*, Stationary partial differential equations. Vol. I, Handb. Differ. Equ., North-Holland, Amsterdam, 2004, pp. 1–70. MR MR2103687 (2005m:35081)

[4] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985. MR MR787404 (86j:47001)

[5] A. Dold, *Teoría de punto fijo. Vol I*, Monografías del Instituto de Matemáticas [Monographs of the Institute of Mathematics], vol. 18, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1986, Translated from the German by Carlos Prieto. MR MR852209 (88b:55003c)

[6] ———, *Teoría de punto fijo. Vol II*, Monografías del Instituto de Matemáticas [Monographs of the Institute of Mathematics], vol. 18, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1986, Translated from the German by Carlos Prieto. MR MR852209 (88b:55003c)

[7] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR MR737190 (86c:35035)

[8] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003. MR 1987179 (2004d:58012)

[9] H. Hofer, *A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain-pass theorem*, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), no. 3, 566–570. MR 87e:58041

[10] ______, *The topological degree at a critical point of mountain-pass type*, Nonlinear functional analysis and its applications, Part 1 (Berkeley, Calif., 1983), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 501–509. MR 87h:58031

[11] M.A. Krasnosel′skiĭ and P.P. Zabreĭko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 263, Springer-Verlag, Berlin, 1984, Translated from the Russian by Christian C. Fenske. MR MR736839 (85b:47057)

[12] P.H. Rabinowitz, *A note on topological degree for potential operators*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), no. 2, 483–492. MR 57 #10518

[13] W. Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR MR1157815 (92k:46001)

[14] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer-Verlag, New York, 1986, Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack. MR 816732 (87f:47083)