

Vorlesung

# Mathematik für Studierende der Physik III

**Vorlesungsskript WS 2019**

Dr. Nils Ackermann\*

Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt

Stand: 1. Dezember 2020

\*Basierend auf einem Skript von Dr. Sven Jarohs

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>3</b>
1.1	Halboffene Quader und ihre Zerlegung . . . . .	3
1.2	Das äußere Lebesguemaß und Nullmengen . . . . .	6
1.3	Messbarkeit und Lebesguemaß . . . . .	10
1.4	Messbare Funktionen und Elementarfunktionen . . . . .	14
1.5	Integration nichtnegativer messbarer Funktionen . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Integrierbare Funktionen</b>	<b>24</b>
2.1	Parameterabhängige Integrale und Transformationsformeln . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Integration auf Untermannigfaltigkeiten und der Gaußsche Integralsatz</b>	<b>37</b>
3.1	Der klassische Integralsatz von Stokes . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>57</b>
4.1	Erinnerung an die komplexen Zahlen . . . . .	57
4.2	Holomorphe Funktionen und Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$ . . . . .	60
4.3	Der komplexe Logarithmus . . . . .	71
4.4	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	73
4.5	Windungszahlen . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Laurentreihen und der Residuenkalkül</b>	<b>78</b>
<b>6</b>	<b>Die Fouriertransformation</b>	<b>83</b>
6.1	Distributionen und Fundamentallösungen . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>93</b>
7.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	94
7.2	Explizite Lösungen spezieller Differentialgleichungen . . . . .	98
7.2.1	Getrennte Variablen . . . . .	98
7.2.2	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	99
7.2.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	101
7.3	Skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	104
7.3.1	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	105
7.4	Qualitative Theorie nichtlinearer Systeme . . . . .	106
7.4.1	Lineare autonome Systeme . . . . .	111
7.4.2	Nichtlineare autonome Systeme . . . . .	112
7.4.3	Die Lyapunovfunktion . . . . .	115

# 1 Integration im $\mathbb{R}^N$

Wir wollen in diesem Abschnitt unsere Kenntnisse zur Integration einer Variable erweitern. In der Vorlesung *Mathematik für Studierende der Physik I* ist das sogenannte Riemann-Integral eingeführt worden, welches jedoch nicht „vollständig“ ist in Bezug auf Vertauschbarkeit von Integration und punktweise konvergenten Funktionenfolgen.

Um diese Eigenschaften zu verbessern, werden wir hier eine andere Herangehensweise an das Integrieren vornehmen. Ziel ist es

- das Volumen für eine möglichst große Klasse von Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  zu bestimmen.
- das Integral für eine möglichst große Klasse von Funktionen  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  zu definieren.

## 1.1 Halboffene Quader und ihre Zerlegung

**Definition 1.1.** Für  $a, b \in \mathbb{R}^N$  schreiben wir  $(a, b] := (a_1, b_1] \times \dots \times (a_N, b_N]$  und nennen  $Q := (a, b]$  einen (*halboffenen*) *Quader*. Die Zahl

$$|Q| := \begin{cases} (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_N - a_N), & \text{falls } a_i \leq b_i \text{ für alle } i \\ 0, & \text{falls } a_i > b_i \text{ für ein } i \text{ (d.h. falls } Q = \emptyset) \end{cases}$$

heißt *Volumen* von  $Q$ . Die Menge aller halboffenen Quader in  $\mathbb{R}^N$  bezeichnen wir mit  $Q^N$ .

**Notation 1.2.** Zwei Mengen  $A, B$  heißen *disjunkt*, falls  $A \cap B = \emptyset$ . Sind  $A$  und  $B$  disjunkt so schreiben wir  $A \cup B$  als die disjunkte Vereinigung der Mengen  $A$  und  $B$ .

**Satz 1.3.** Seien  $Q, K \in Q^N$ . Dann gilt:

- (a)  $Q \cap K \in Q^N$ .
- (b) Es gibt endlich viele disjunkte  $Q_1, \dots, Q_k \in Q^N$  mit  $Q \setminus K = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ .

*Beweis. (a):* Ist  $Q = (a, b]$  und  $K = (c, d]$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^N$ , so ist  $Q \cap K = (x, y]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^N$  gegeben durch  $x_i = \max\{a_i, c_i\}$  und  $y_i = \min\{b_i, d_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

*(b):* Wir dürfen zunächst annehmen, dass  $K \subseteq Q$  gilt. Andernfalls können wir  $K$  unter Betrachtung von (a) durch  $Q \cap K$  ersetzen. Ferner sei ohne Einschränkungen  $Q \neq \emptyset \neq K$ . Wir argumentieren nun per Induktion nach  $N$ :

„ $N = 1$ “: Sei  $Q = (a, b]$  und  $K = (c, d]$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq c < d \leq b$ . Dann ist  $Q \setminus K = (a, c] \cup (d, b]$ .

„ $N > 1$ “: Angenommen die Aussage gilt für ein  $(N - 1) \in \mathbb{N}_0$ . Wir schreiben  $Q := Q_1 \times Q_2$  und  $K = K_1 \times K_2$  mit  $Q_1, K_1 \in Q^1$  und  $Q_2, K_2 \in Q^{N-1}$ . Dann ist  $K_1 \subseteq Q_1$  und  $K_2 \subseteq Q_2$  und wir haben die disjunkte Vereinigung

$$Q \setminus K = [Q_1 \setminus K_1] \times [Q_2 \setminus K_2] \cup [Q_1 \setminus K_1] \times K_2 \cup K_1 \times [Q_2 \setminus K_2].$$

Gemäß dem Fall  $N = 1$  können wir  $Q_1 \setminus K_1 = A_1 \cup A_2$  schreiben mit disjunkten  $A_1, A_2 \in Q^1$ . Ferner finden wir nach Induktionsannahme eine Zerlegung

$$Q_2 \setminus K_2 = B_1 \cup \dots \cup B_k \quad \text{mit disjunkten } B_i \in Q^{N-1}.$$

Somit ist

$$Q \setminus K = \bigcup_{\substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,k}} A_i \times B_j \cup \bigcup_{i=1,2} A_i \times K_2 \cup \bigcup_{j=1,\dots,k} K_1 \times B_j. \quad \square$$

**Korollar 1.4.** *Seien  $Q, Q_1, \dots, Q_n \in Q^N$ . Dann existieren endliche viele disjunkte  $K_1, \dots, K_m \in Q^N$  mit  $Q \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_n) = K_1 \cup \dots \cup K_m$ .*

*Beweis.* Wir werden diese Aussage per Induktion zeigen. Für  $n = 1$  ist die Aussage wahr nach Satz 1.3(b). Sei nun  $(n - 1) \in \mathbb{N}$  derart, dass die Aussage gilt. Dann existieren (nach Induktionsbehauptung) disjunkte  $K_1, \dots, K_{m_1} \in Q^N$  und (nach Satz 1.3(b)) disjunkte  $L_1, \dots, L_{m_2} \in Q^N$  mit

$$\begin{aligned} Q \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1} \cup Q_n) &= Q \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}) \cap Q \setminus Q_n \\ &= \left( \bigcup_{i=1}^{m_1} K_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^{m_2} L_j \right) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,m_1 \\ j=1,\dots,m_2}} M_{ij}, \end{aligned}$$

mit  $M_{ij} := K_i \cap L_j \in Q^N$  nach Satz 1.3(a), für alle  $i = 1, \dots, m_1$  und  $j = 1, \dots, m_2$ . Schließlich gilt für  $(i, j) \neq (k, \ell)$ ,  $i, k = 1, \dots, m_1$ ,  $j, \ell = 1, \dots, m_2$

$$M_{ij} \cap M_{k\ell} = (K_i \cap L_j) \cap (K_k \cap L_\ell) = (K_i \cap K_k) \cap (L_j \cap L_\ell) = \emptyset,$$

da entweder  $i \neq k$  und damit  $K_i \cap K_k = \emptyset$  oder  $j \neq \ell$  und damit  $L_j \cap L_\ell = \emptyset$  gilt. Somit sind die  $M_{ij}$  paarweise disjunkt. Es folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.5.** *Seien  $Q_k \in Q^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  disjunkte Quader derart, dass  $Q := \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  ebenfalls in  $Q^N$  liegt. Dann gilt*

$$|Q| = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \quad (\sigma\text{-Additivität des Quadervolumens})$$

*Die Aussage gilt auch für endliche Vereinigungen indem man fast alle  $Q_k$  als leer annimmt.*

*Beweis.* Aufwändig. Siehe [8].  $\square$

**Korollar 1.6.** Sei  $Q \in \mathbb{Q}^N$  und seien  $Q_1, \dots, Q_k \in \mathbb{Q}^N$  disjunkte, in  $Q$  enthaltene Quader. Dann ist

$$\sum_{n=1}^k |Q_n| \leq |Q|.$$

*Beweis.* Nach Korollar 1.4 ist  $Q \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) = J_1 \cup \dots \cup J_\ell$  mit disjunkten Quadern  $J_i \in \mathbb{Q}^N$ . Dies liefert die disjunkte Vereinigung  $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k \cup J_1 \cup \dots \cup J_\ell$  und mit Satz 1.5 folgt

$$|Q| = \sum_{i=1}^k |Q_i| + \sum_{j=1}^{\ell} |J_j| \geq \sum_{i=1}^k |Q_i|.$$

□

**Korollar 1.7.** Seien  $Q_k \in \mathbb{Q}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ . Dann existieren disjunkte Quader  $J_k \in \mathbb{Q}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|$ , wobei in dieser Ungleichung der Wert  $\infty$  zugelassen ist.

*Beweis.* Nach Korollar 1.4 existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung der Form

$$Q_k \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1}) = J_{k1} \cup \dots \cup J_{k\ell(k)}$$

in disjunkte Quader  $J_{ki}$ ,  $i = 1, \dots, \ell(k)$ . Somit ist

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\ell(k)} J_{ki}$$

und diese Vereinigung ist ebenfalls disjunkt. Weiterhin gilt  $\sum_{i=1}^{\ell(k)} |J_{ki}| \leq |Q_k|$  für alle  $k$  nach Korollar 1.6, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell(k)} |J_{ki}|$$

□

**Satz 1.8.** Jede Offene Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  lässt sich als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Quader aus  $\mathbb{Q}^N$  schreiben.

*Beweis.* Sei  $\tilde{Q}$  die Menge der in  $D$  enthaltenen Quader  $(a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}^N$ . Diese Menge ist abzählbar, da  $\mathbb{Q}$  und somit  $\mathbb{Q}^N$  abzählbar ist. Wir behaupten nun

$$(1.1) \quad D = \bigcup_{Q \in \tilde{Q}} Q$$

„ $\supseteq$ “ ist trivialerweise erfüllt.

„ $\subseteq$ “: Sei  $x \in D$ . Da  $D$  offen ist, existiert  $m \in \mathbb{N}$  derart, dass  $y \in D$  für alle  $y \in \mathbb{R}^N$  mit  $|x - y|_{\infty} < \frac{1}{m}$ . Für  $i = 1, \dots, N$  wähle nun  $y_i \in \mathbb{Q} \cap [x_i - \frac{1}{m}, x_i)$  und setze  $z_i := y_i + \frac{1}{m}$ . Dann liegen  $y = (y_1, \dots, y_N)$  und  $z = (z_1, \dots, z_N)$  in  $\mathbb{Q}^N$  und es gilt  $x \in (y, z] \subseteq D$ . Es folgt  $(y, z] \in \tilde{Q}$  und somit ist  $x \in \bigcup_{Q \in \tilde{Q}} Q$ .

Insgesamt folgt (1.1) und mit Korollar 1.7 erhalten wir schließlich auch eine disjunkte Zerlegung, wie behauptet. □

## 1.2 Das äußere Lebesguemaß und Nullmengen

**Definition 1.9.** Im Folgenden sei  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

(a) Wir vereinbaren folgende Rechenregeln in  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\begin{aligned} a \pm \infty &= \pm\infty & \forall a \in \mathbb{R} \\ \infty + \infty &= \infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \\ a \cdot (\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty & \text{für } a \in (0, \infty] \\ \mp\infty & \text{für } a \in [-\infty, 0) \\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Nicht** definiert ist allerdings  $\infty - \infty$ !

(b) Wir definieren  $a < \infty$  für alle  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $a > -\infty$  für alle  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .  
Ferner sei  $|\pm\infty| := \infty$ .

(c) Für  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  setzen wir

$$\begin{aligned} \sup A &= \begin{cases} \infty & \text{falls } \infty \in A \\ \sup(A \cap \mathbb{R}) & \text{falls } \infty \notin A \end{cases} \\ \inf A &= \begin{cases} -\infty & \text{falls } -\infty \in A \\ \inf(A \cap \mathbb{R}) & \text{falls } -\infty \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Ist  $(a_k)_k$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  so sei

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} a_n \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} a_n \end{aligned}$$

Falls diese beiden übereinstimmen, schreiben wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  für diesen gemeinsamen Wert.

(e) Ist  $(a_k)_k$  eine Folge in  $[0, \infty]$  so setzen wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k a_j \in [0, \infty].$$

Diese Summe nimmt nach (a) bereits dann den Wert  $\infty$  an, wenn mindestens eines der  $a_k = \infty$  ist.

Mit dieser Definition gilt der folgende Satz

**Satz 1.10** (Doppelreihensatz). Sind  $a_{ij} \in [0, \infty]$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij},$$

wobei die letzte Summe für eine beliebige Abzählung der  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  steht.

**Definition 1.11.** Für  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  sei das *äußere Lebesguemaß* von  $A$  definiert durch

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \mid Q_k \in Q^N \text{ für } k \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\} \in [0, \infty].$$

**Satz 1.12.** Seien  $A, B, A_k \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- (a)  $\lambda^*(A) \geq 0$ .
- (b)  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ .
- (c)  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ , falls  $A \subseteq B$ .
- (d)  $\lambda^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k)$ .

*Beweis.* **(a):** ist klar.

**(b):** Setze  $Q_k = \emptyset \in Q^N$  für  $k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\emptyset \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = |\emptyset| = 0$ . Es folgt  $\lambda^*(\emptyset) = 0$ .

**(c):** Sind  $Q_k \in Q^N$  für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ , so gilt auch  $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ . Daher folgt  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$  bereits nach Definition von  $\lambda^*$ .

**(d):** Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Definition von  $\lambda^*(A_k)$  existieren  $Q_{kj} \in Q^N$ ,  $j \in \mathbb{N}$  mit

$$A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{kj} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{kj}| \leq \lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da die  $Q_{kj}$ ,  $k, j \in \mathbb{N}$  wieder eine abzählbare Menge von Quadern bilden und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_{kj}$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda^* \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) &\leq \sum_{j,k=1}^{\infty} |Q_{kj}| \stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun war  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt, also folgt (d). □

**Satz 1.13.** Für  $Q \in Q^N$  gilt  $\lambda^*(Q) = |Q|$ .

*Beweis.* Nach Definition von  $\lambda^*$  gilt

$$(1.2) \quad \lambda^*(Q) \leq |Q| \quad (\text{setze } Q_1 = Q \text{ und } Q_k = \emptyset \text{ f\u00fcr } k = 2, 3, \dots)$$

Sei nun  $Q_k \in Q^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  beliebig mit  $Q \subseteq \bigcup_k Q_k$  und sei  $\tilde{Q}_k := Q_k \cap Q$  f\u00fcr  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k$  und  $|\tilde{Q}_k| \leq |Q_k|$  f\u00fcr alle  $k$ . Nach Korollar 1.7 existieren disjunkte  $M_k \in Q^N$  mit

$$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{Q}_k|.$$

Mit Satz 1.5 ergibt sich also

$$|Q| = \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{Q}_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|.$$

Nach Definition von  $\lambda^*$  folgt demnach  $|Q| \leq \lambda^*(Q)$ . Mit (1.2) folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 1.14.** Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  hei\u00dft ( $N$ -dimensionale) *Nullmenge*, falls  $\lambda^*(A) = 0$  ist. Dies gilt genau dann, wenn f\u00fcr alle  $\varepsilon > 0$  Quader  $Q_k \in Q^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  existieren mit  $A \subseteq \bigcup_k Q_k$  und  $\sum_k |Q_k| < \varepsilon$ .

**Satz 1.15.**

- (a) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  eine Nullmenge und  $B \subseteq A$ , so ist auch  $B$  eine Nullmenge.
- (b) Sind  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Nullmengen im  $\mathbb{R}^N$ , so ist auch  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  eine Nullmenge.

*Beweis.* (a) folgt aus Satz 1.12(c), und (b) folgt aus Satz 1.12(d).  $\square$

**Beispiel 1.16.** (a) F\u00fcr alle  $x \in \mathbb{R}^N$  ist  $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^N$  eine Nullmenge, denn f\u00fcr alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\{x\} \subseteq (x_1 - \varepsilon, x_1] \times \dots \times (x_N - \varepsilon, x_N] =: Q_\varepsilon \in Q^N.$$

Nun gilt  $|Q_\varepsilon| = \varepsilon^N \rightarrow 0$  f\u00fcr  $\varepsilon \rightarrow 0$  und damit ist  $\{x\}$  eine Nullmenge.

- (b) Jede abz\u00e4hlbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  ist eine Nullmenge nach (a) und Satz 1.15(b). Insbesondere ist  $\mathbb{Q}^N$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^N$ .
- (c)  $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N$  ist eine Nullmenge, denn:

$$\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \times \{0\}) \quad \text{mit } I_k := (-k, k] \times \dots \times (-k, k] \in Q^{N-1},$$

wobei

$$\lambda^*(I_k \times \{0\}) \leq \inf_{\varepsilon > 0} |I_k \times (-\varepsilon, 0]| = \inf_{\varepsilon > 0} (2k)^{N-1} \varepsilon = 0$$

f\u00fcr alle  $k$  gilt und somit  $I_k \times \{0\}$  eine Nullmenge ist. Satz 1.15(b) liefert dann die Behauptung.



Ein Würfel ist ein Quader, dessen Seiten alle gleich lang sind.

**Lemma 1.17.** Ist  $Q \in Q^N$ , so existieren endlich viele Würfel  $W_1, \dots, W_k \in Q^N$  mit

$$Q \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i \quad \text{und} \quad |Q| \leq \sum_{i=1}^k |W_i| \leq 2^N |Q|.$$

*Beweis.* Einfache Übung. □

**Definition 1.18.** Für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  setzen wir  $\text{diam}(A) := \sup\{|x-y|_2 \mid x, y \in A\}$  für den Durchmesser der Menge  $A$ .

**Satz 1.19.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ .

- (a)  $A$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  Mengen  $A_k \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  existieren mit  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } A_k)^N < \varepsilon$ .
- (b) Ist  $A$  eine Nullmenge und  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^N$  Lipschitzstetig, so ist auch  $f(A) \subseteq \mathbb{R}^N$  eine Nullmenge.

*Beweis. (a): „ $\Rightarrow$ “:* Sei  $A$  eine Nullmenge, so existieren (nach Definition) zu jedem  $\varepsilon > 0$  Quader  $Q_k \in Q^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{2^N N^{N/2}}$ . Mit Lemma 1.17 folgt, dass es für jedes  $k$  endlich viele Würfel  $W_1, \dots, W_{n(k)} \in Q^N$  gibt mit  $Q_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(k)} W_{ki}$  und  $\sum_{i=1}^{n(k)} |W_{ki}| \leq 2^N |Q_k|$ . Wegen  $|W_{ki}| = N^{-N/2} (\text{diam } W_{ki})^N$  folgt

$$\varepsilon > N^{N/2} 2^N \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \geq N^{N/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(k)} |W_{kj}| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n(k)} (\text{diam } W_{ki})^N = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } A_k)^N,$$

wo wir eine Abzählung der  $W_{ki}$  als  $A_k$  mit nur einem Index schreiben.

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $\varepsilon > 0$  und  $A_k \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } A_k)^N < \varepsilon$ . Bezeichne mit  $\tilde{A}_k$  einen Würfel mit Kantenlänge  $\text{diam } A_k$ , so dass  $A_k \subseteq \tilde{A}_k$  gilt. Dann ist

$$|A_k| \leq |\tilde{A}_k| = (\text{diam } A_k)^N.$$

Da nun ebenfalls  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$  gilt, folgt

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{A}_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } A_k)^N < \varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon$  beliebig gewählt war, ist  $A$  eine Nullmenge.

(b): Übung. □

**Bemerkung 1.20.** (a) Betrachte  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  affin linear, d.h.  $f(x) = Tx + c$  mit  $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $c \in \mathbb{R}^N$ , so ist  $f$  Lipschitzstetig (siehe Mathe II) und bildet damit Nullmengen auf Nullmengen ab. Mit Beispiel 1.16(c) folgt direkt, dass  $x_0 + V$  eine Nullmenge ist für jeden Untervektorraum  $V \subseteq \mathbb{R}^N$  mit  $\dim(V) < N$  und jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , da  $x_0 + V \subseteq f(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$  für eine geeignet gewählte affin lineare Abbildung  $f$  ist.

- (b) Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$  und  $A \subseteq D$  eine Nullmenge, so ist auch  $f(A) \subseteq \mathbb{R}^N$  eine Nullmenge. Dies lässt sich wie folgt begründen: Zunächst beobachten wir, dass für jede kompakte Menge  $K \subseteq D$  gilt, dass  $f$  eingeschränkt auf  $K$  Lipschitzstetig ist. Demnach ist  $f(K \cap A)$  eine Nullmenge, da  $A \cap K \subseteq A$  eine Nullmenge ist. Nun lässt sich  $D$  durch abzählbar viele kompakte Mengen in  $D$  überdecken und dies liefert die Behauptung.
- (c) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $N > k$  und  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^{N-k})$ , dann ist  $\text{Graph } f \subseteq \mathbb{R}^N$  eine Nullmenge. Dies folgt mit Aussage (b) unter Verwendung der Abbildung  $\tilde{f} \in C^1(D \times \mathbb{R}^{N-k}, \mathbb{R}^N)$  definiert durch  $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x))$ . Dann ist  $D \times \{0_{N-k}\}$  eine Nullmenge und also auch  $\text{Graph } f = \tilde{f}(D \times \{0_{N-k}\})$ . Man kann sogar zeigen, dass der Graph einer Funktion bereits dann eine Nullmenge ist, wenn  $f$  nur stetig ist.
- (d) Mit Hilfe von (a) und (c) lässt sich zeigen, dass jede  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$ ,  $k < N$ , eine Nullmenge ist, da diese sich lokal als affin lineares Bild eines Graphen darstellen lässt. Man muss dann nur zeigen, dass jede Überdeckung der Untermannigfaltigkeit mit solchen Graphendarstellungen eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Dies ist eine wichtige Bemerkung bei der Konstruktion von sogenannten „Oberflächenintegralen“.

### 1.3 Messbarkeit und Lebesguemaß

**Bemerkung 1.21.** Wir haben im vorherigen Abschnitt das äußere Lebesguemaß kennengelernt. Um diesen Wert als ein Volumen zu interpretieren, sollte gelten: Sind  $A, B$  disjunkt, dann ist  $\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$ . Für das äußere Lebesguemaß gibt es jedoch disjunkte Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$  mit  $\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ . Solche Mengen lassen sich jedoch nur mit dem *Auswahlaxiom* der Mengenlehre konstruieren. Im Folgenden wollen wir uns also auf eine Klasse  $\mathcal{M}^N$  von Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  beschränken für die stets gilt: Sind  $A_k \in \mathcal{M}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , disjunkt, dann ist  $\lambda^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k)$ .

**Definition 1.22.** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  heißt *Lebesgue-messbar*, falls für **alle** Teilmengen  $Z \subseteq \mathbb{R}^N$  gilt:

$$\lambda^*(Z) = \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A).$$

Die Klasse der Lebesgue-messbaren Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}^N$ .

**Bemerkung 1.23.** Für **alle** Teilmengen  $A, Z \subseteq \mathbb{R}^N$  gilt  $\lambda^*(Z) \leq \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A)$  nach Satz 1.12(d).

**Satz 1.24.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . Dann gilt:

- (a)  $A$  Nullmenge  $\Rightarrow A \in \mathcal{M}^N$ , d.h.  $A$  ist Lebesgue-messbar.
- (b)  $A \in \mathcal{Q}^N \Rightarrow A \in \mathcal{M}^N$ .

*Beweis. (a):* Sei  $A$  eine Nullmenge und  $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ . Dann ist

$$\lambda^*(Z) \stackrel{\text{Satz 1.12(c)}}{\geq} \lambda^*(Z \setminus A) = \underbrace{\lambda^*(Z \cap A)}_{=0} + \lambda^*(Z \setminus A).$$

Nach Bemerkung 1.23 folgt die Gleichheit.

**(b):** Sei  $A \in \mathcal{Q}^N$  und  $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ . Wegen Bemerkung 1.23 genügt es

$$(1.3) \quad \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A) \leq \lambda^*(Z)$$

zu zeigen. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  und seien  $Q_k \in \mathcal{Q}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $Z \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| \leq \lambda^*(Z) + \varepsilon$ . Nach Satz 1.3(b) ist  $Q_k \setminus A = \bigcup_{i=1}^{l(k)} J_{ki}$  mit disjunkten  $J_{ki} \in \mathcal{Q}^N$ . Somit ist  $Z \cap A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Q_k \cap A)$  und  $Z \setminus A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{l(k)} J_{ki}$ , also

$$\lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( |Q_k \cap A| + \sum_{i=1}^{l(k)} |J_{ki}| \right) \stackrel{\text{Satz 1.5}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| \leq \lambda^*(Z) + \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig gewählt war, folgt (1.3). □

**Definition 1.25.** Seien  $\Omega$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{P}(\Omega)$  die Potenzmenge von  $\Omega$  (das System aller Teilmengen von  $\Omega$ ).

(a) Ein System  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  von Teilmengen von  $\Omega$  heißt  *$\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$* , wenn gilt:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ,
- (ii)  $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$ ,
- (iii)  $A_k \in \mathcal{M}$ ,  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ .

Das Paar  $(\Omega, \mathcal{M})$  nennt man dann *Messraum* oder *messbarer Raum*, und die Elemente von  $\mathcal{M}$  heißen *messbare Mengen*.

(b) Eine Abbildung  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  heißt (*positives*) *Maß*, wenn gilt:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) Sind  $A_k \in \mathcal{M}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  disjunkt, so gilt

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  nennt man dann *Maßraum*.

**Hauptsatz 1.26.** Das System  $\mathcal{M}^N$  der Lebesgue-messbaren Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  bildet eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^N$ . Die Einschränkung  $\lambda^N: \mathcal{M}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der Mengenfunktion  $\lambda^*$  ist ein Maß.  $\mathcal{M}^N$  wird auch als die Lebesguesche  $\sigma$ -Algebra bezeichnet (andere Schreibweise:  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ ) und  $\lambda^N$  heißt ( $N$ -dimensionales) Lebesguemaß. Wenn die Dimension  $N$  klar ist, schreiben wir manchmal auch  $\lambda$  statt  $\lambda^N$ .

*Beweis.* Wir zeigen die geforderten Eigenschaften aus Definition 1.25.

**(a)(i):** Es ist  $\emptyset \in \mathcal{M}^N$ , da  $\lambda^*(Z) = \lambda^*(\emptyset) + \lambda^*(Z) = \lambda^*(Z \cap \emptyset) + \lambda^*(Z \setminus \emptyset)$  für alle  $Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  gilt.

**(ii):** Sei  $A \in \mathcal{M}^N$ . Dann ist auch das Komplement  $A^c := \mathbb{R}^N \setminus A \in \mathcal{M}^N$ , denn für beliebiges  $Z \subseteq \mathbb{R}^N$  gilt

$$\lambda^*(Z) = \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A) = \lambda^*(Z \setminus A^c) + \lambda^*(Z \cap A^c).$$

**(iii): Behauptung 1:** Sind  $A, B \in \mathcal{M}^N$ , so ist auch  $A \cap B \in \mathcal{M}^N$ . Sei dazu  $Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  beliebig. Wegen  $A \in \mathcal{M}^N$  und  $B \in \mathcal{M}^N$  ist

$$\begin{aligned} \lambda^*(Z) &= \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A) = \lambda^*(Z \cap A \cap B) + \lambda^*((Z \cap A) \setminus B) + \lambda^*(Z \setminus A) \\ &\geq \lambda^*(Z \cap A \cap B) + \lambda^*(Z \setminus (A \cap B)), \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} Z \setminus A \cup (Z \cap A) \setminus B &= Z \cap (A^c \cup (A \cap B^c)) = Z \cap (A^c \cup (B^c \setminus A^c)) \\ &= Z \cap (A^c \cup B^c) = Z \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

und der Eigenschaft Satz 1.12(d) von  $\lambda^*$ . „ $\leq$ “ gilt sowieso, also folgt  $A \cap B \in \mathcal{M}^N$ . Aus (ii) und Behauptung 1 folgt

**Behauptung 2:** Sind  $A, B \in \mathcal{M}^N$ , so auch  $A \cup B = \mathbb{R}^N \setminus (A^c \cap B^c)$ . Sind ferner  $A$  und  $B$  disjunkt, so gilt

$$\lambda^*(Z \cap (A \cup B)) = \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \cap B) \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

Letztere Gleichheit folgt, da mit  $Z' := Z \cap (A \cup B)$  entsprechend der Definition der Messbarkeit von  $A$  und  $B \subseteq A^c$  folgt:

$$\lambda^*(Z') = \lambda^*(Z' \cap A) + \lambda^*(Z' \setminus A) = \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \cap B).$$

**Behauptung 3:** Sind  $A_k \in \mathcal{M}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  disjunkt, so ist  $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}^N$ , und es gilt

$$(1.4) \quad \lambda^*(Z \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(Z \cap A_k) \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

Dies sieht man so: Wegen Behauptung 2 ist  $\lambda^*(Z \cap \bigcup_{k=1}^m A_k) = \sum_{k=1}^m \lambda^*(Z \cap A_k)$ . Mit der Monotonie von  $\lambda^*$  folgt

$$\lambda^*(Z) = \lambda^*\left(Z \cap \bigcup_{k=1}^m A_k\right) + \lambda^*\left(Z \setminus \bigcup_{k=1}^m A_k\right) \geq \sum_{k=1}^m \lambda^*(Z \cap A_k) + \lambda^*(Z \setminus A) \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Durch Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\lambda^*(Z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(Z \cap A_k) + \lambda^*(Z \setminus A) \geq \lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \setminus A) \geq \lambda^*(Z)$$

mit Hilfe von Satz 1.12(d). Also gilt überall Gleichheit, und dies zeigt Behauptung 3.

**(b)(ii):** Folgt aus (1.4) mit  $Z = \mathbb{R}^N$ . Die anderen Maßeigenschaften sind für  $\lambda^*|_{\mathcal{M}^N}$  trivialerweise erfüllt.  $\square$

**Korollar 1.27.** *Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$  ist messbar.*

*Beweis.* Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  offen, so ist  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$  mit Quadern  $Q_k \in \mathcal{Q}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  nach Satz 1.8. Dabei ist  $Q_k \in \mathcal{M}^N$  für alle  $k$  nach Satz 1.24. Mit Definition 1.25(a)(iii) folgt  $A \in \mathcal{M}^N$ .

Mit Definition 1.25(a)(ii) folgt schließlich, dass auch abgeschlossene Teilmengen messbar sind. □

**Korollar 1.28.** *Seien  $A, B, A_k \in \mathcal{M}^N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:*

(a) *Die Mengen  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  und  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$  sind messbar.*

(b) *Ist  $B \subseteq A$  und  $\lambda(B) < \infty$ , so gilt*

$$\lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(B).$$

(c) *Gilt  $A_k \subseteq A_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so ist*

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k).$$

(d) *Gilt  $\lambda(A_1) < \infty$  und  $A_{k+1} \subseteq A_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  so ist*

$$\lambda\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k).$$

*Beweis.* Übung. □

**Bemerkung 1.29.** Ist  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , so sind  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b) \in \mathcal{M}^N$ . Ferner sind  $\{a\}$  und  $\{b\}$  Nullmengen. Es folgt

$$\lambda([a, b]) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b)) = b - a.$$

Analog gilt: Sind  $a, b \in \mathbb{R}^N$ , so sind  $\{a\}$  und  $\{b\}$  Nullmengen und es ist  $\lambda((a, b]) = |(a, b]|$ .

**Proposition 1.30.** *Ist  $I$  eine Indexmenge und  $\mathcal{M}_i$ ,  $i \in I$  eine Familie von  $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$ , so ist auch*

$$\mathcal{M} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

*eine  $\sigma$ -Algebra.*

*Beweis.* Übung. □

**Definition 1.31.** Sei  $\mathcal{O}$  das System der offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^N$ . Nach Proposition 1.30 ist dann

$$\mathcal{B}^N := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-Algebra auf } \mathbb{R}^N \\ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}} \mathcal{M}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^N$ , die kleinste, die alle offenen und somit auch alle abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^N$  enthält. Diese heißt die *Borelsche  $\sigma$ -Algebra* auf  $\mathbb{R}^N$ , und ihre Elemente heißen *Borel-messbare Teilmengen von  $\mathbb{R}^N$* .

**Bemerkung 1.32.** Es gilt  $\mathcal{B}^N \subseteq \mathcal{M}^N$ , wegen Korollar 1.27. Man kann zeigen, dass diese Inklusion strikt ist, dass also nicht alle Lebesgue-messbaren Mengen Borel-messbar sind. Im Folgenden werden wir jedoch nur Lebesgue-Messbarkeit betrachten und deshalb statt „Lebesgue-messbar“ einfach „messbar“ sagen.

## 1.4 Messbare Funktionen und Elementarfunktionen

**Definition 1.33.** Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion.

(a) Für  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  definieren wir

$$\{f > c\} := \{x \in B \mid f(x) > c\} \subseteq B.$$

Analog „ $\geq$ , „ $=$ , „ $\leq$ , „ $<$ “. Insbesondere ist dann  $\{f = c\} = f^{-1}(c)$ .

(b)  $f$  heißt *messbar*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- (i)  $\{f > c\} \in \mathcal{M}^N$  für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$
- (ii)  $\{f \leq c\} \in \mathcal{M}^N$  für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$
- (iii)  $\{f < c\} \in \mathcal{M}^N$  für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$
- (iv)  $\{f \geq c\} \in \mathcal{M}^N$  für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$

*Beweis der Äquivalenz.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Für  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{f \leq c\} = B \setminus \{f > c\} \in \mathcal{M}^N$  nach Korollar 1.28(a).

„(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: Sei  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Ist  $c = -\infty$ , so ist  $\{f < c\} = \emptyset \in \mathcal{M}^N$ . Ist ferner  $c > -\infty$  und  $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R}$  eine Folge mit  $c_k \leq c_{k+1} < c$  für alle  $k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ , so ist  $\{f < c\} = \bigcup_k \{f \leq c_k\} \in \mathcal{M}^N$  nach Definition 1.25(a)(iii)

„(iii)  $\Rightarrow$  (iv)“ und „(iv)  $\Rightarrow$  (i)“ beweist man analog. □

**Bemerkung 1.34.** Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

(a) Ist  $f$  messbar, so ist  $\{f = c\} = \{f \geq c\} \cap \{f \leq c\} \in \mathcal{M}^N$  nach Korollar 1.28(a) für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ .

(b) Definiert man die *triviale Fortsetzung*  $\bar{f}$  von  $f$  durch

$$\bar{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt:  $f$  messbar  $\Leftrightarrow \bar{f}$  messbar. Dies folgt da für  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  gilt:

$$\begin{aligned} \{f > c\} &= \{\bar{f} > c\}, & \text{falls } c \geq 0 \\ \{f > c\} &= \{\bar{f} > c\} \cap B & \text{und} \quad \{\bar{f} > c\} = \{f > c\} \cup (\mathbb{R}^N \setminus B), & \text{falls } c < 0. \end{aligned}$$

**Lemma 1.35.** *Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann gilt*

- (a) *Ist  $f$  monoton wachsend, d.h. für  $x, y \in B$ ,  $x \leq y$  folgt  $f(x) \leq f(y)$ , dann ist  $f$  messbar.*
- (b) *Ist  $f$  monoton fallend, d.h. für  $x, y \in B$ ,  $x \leq y$  folgt  $f(x) \geq f(y)$ , dann ist  $f$  messbar.*

*Beweis.* Da Intervalle als eindimensionale Quader aufgefasst werden können ist  $B$  messbar. Es genügt dann zu erkennen, dass für  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  die Menge  $\{f > c\}$  für  $f$  monoton fallend bzw.  $\{f < c\}$  für  $f$  monoton wachsend messbar sind (Übung).  $\square$

**Satz 1.36.** *Ist  $B \subseteq \mathbb{R}^N$  messbar und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  messbar.*

*Beweis.* Sei  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  ist  $\{f > c\}$  offen in  $B$ , d.h. es existiert eine offene Teilmenge  $C \subseteq \mathbb{R}^N$  mit  $\{f > c\} = B \cap C$ . Da  $B, C \in \mathcal{M}^N$  gilt, folgt  $\{f > c\} \in \mathcal{M}^N$ .  $\square$

**Satz 1.37.** *Seien  $B \in \mathcal{M}^N$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und seien  $f, g: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann gilt*

- (a)  $\alpha f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist messbar.
- (b) *Ist  $\{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} = \emptyset = \{f = -\infty\} \cap \{g = \infty\}$ , so ist  $f + g: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  wohldefiniert und messbar.*

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Satz 1.38.** *Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  und seien  $f_k: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  messbare Funktionen. Dann gilt:*

- (a) *Die auf  $B$  punktweise definierten Funktionen  $f := \inf_k f_k$  und  $F := \sup_k f_k$  sind messbar. Daraus folgt dann direkt die Messbarkeit von  $\min f_k$  und  $\max f_k$  bei endlich vielen Funktionen.*
- (b) *Die auf  $B$  punktweise definierten Funktionen  $g := \liminf_k f_k$  und  $G := \limsup_k f_k$  sind messbar.*

*Beweis.* **(a):** Für alle  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  ist

$$\{f \geq c\} = \bigcap_k \underbrace{\{f_k \geq c\}}_{\in \mathcal{M}^N} \in \mathcal{M}^N$$

und  $\{F \leq c\} = \bigcap_k \{f_k \leq c\} \in \mathcal{M}^N$ .

**(b):** Nach (a) ist  $g_k := \inf_{l \geq k} f_l$  messbar für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit auch  $g = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k$ . Ähnlich folgt die Messbarkeit von  $G$ .  $\square$

**Korollar 1.39.** Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann sind auch  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := -\min\{f, 0\}$  und  $|f| = f^+ + f^-$  messbar.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 1.38(a) und Satz 1.37(b).  $\square$

**Bemerkung 1.40.** Ist  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f_k := B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine monotone Funktionenfolge, d.h.  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  für alle  $x \in B$  ( $(f_k)_k$  ist monoton wachsend,  $f_k \nearrow$ ) oder  $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$  für alle  $x \in B$  ( $(f_k)_k$  ist monoton fallend,  $f_k \searrow$ ), so existiert der punktweise Grenzwert  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  für alle  $x \in B$ : Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass  $(f_k)_k$  monoton wächst. Ist die Folge  $(f_k(x))_k$  nach oben beschränkt, so existiert der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) =: f(x)^1$ . Ist  $(f_k(x))_k$  nicht nach oben beschränkt, so ist wegen der Monotonie  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty \in \overline{\mathbb{R}}$ . Folglich existiert eine punktweise Grenzwertfunktion  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Nach Satz 1.38(b) folgt, dass  $f$  messbar ist.

**Definition 1.41.** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^N$  und sei  $A$  eine Aussage über die Punkte aus  $B$ . Wir sagen „ $A$  gilt fast überall (kurz: f.ü.) auf  $B$ “, wenn es eine Nullmenge  $M \subseteq B$  derart gibt, dass  $A$  für alle  $x \in B \setminus M$  gilt. Ist  $B$  aus dem Zusammenhang bekannt, so sagen wir kurz: „ $A$  gilt f.ü.“ (üblich ist auch die Schreibweise „ $A$  gilt  $\lambda$ -f.ü.“).

**Satz 1.42.** Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  und seien  $f, g: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Ist  $f$  messbar und  $f = g$  f.ü. auf  $B$ , so ist auch  $g$  messbar.

*Beweis.* Sei  $M \subseteq B$  eine Nullmenge mit  $f = g$  auf  $B \setminus M$ , und sei  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  beliebig. Dann ist

$$\{g > c\} = \left( \underbrace{\{f > c\}}_{\in \mathcal{M}^N} \setminus M \right) \cup \underbrace{(\{g > c\} \cap M)}_{\in \mathcal{M}^N, \text{ da Nullmenge}} \in \mathcal{M}^N. \quad \square$$

**Korollar 1.43.** Seien  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und seien  $f_k: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  messbar mit  $f_k \rightarrow f$  punktweise f.ü. auf  $B$ . Dann ist auch  $f$  messbar.

*Beweis.* Sei  $M \subseteq B$  eine Nullmenge, so dass  $g := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  auf  $B \setminus M$  existiert. Nach Satz 1.38(b) ist  $g$  dann messbar auf  $B \setminus M$ , und die triviale Fortsetzung  $\bar{g}$  ist messbar auf  $\mathbb{R}^N$ , nach Bemerkung 1.34(b). Es ist einfach zu sehen, dass dann auch  $\bar{g}|_B$  messbar ist, und wegen  $\bar{g}|_B = f$  f.ü. liefert Satz 1.42 die Behauptung.  $\square$

<sup>1</sup>Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede monoton steigende, nach oben beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Grenzwert



**Definition 1.44.** (a) Für  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  heißt

$$1_A := \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

*Indikatorfunktion (oder charakteristische Funktion) von A.* Offensichtlich ist  $1_A$  genau dann messbar, wenn die Menge  $A$  messbar ist.

- (b) Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  messbar. Eine messbare Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Elementarfunktion*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt und die Menge  $\{x \in B \mid f(x) \neq 0\}$  beschränkt ist. Wir setzen  $\mathcal{E}(B) := \{f: B \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Elementarfunktion}\}$ .

**Bemerkung 1.45.**

- (a) Speziell: Die sogenannte Dirichletfunktion ist gegeben durch die Indikatorfunktion der Menge  $\mathbb{Q}$ ,  $1_{\mathbb{Q}}$ . Diese ist **nicht** Riemann-integrierbar. Es gilt jedoch  $1_{\mathbb{Q}} = 0$  f.ü., da  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  eine eindimensionale Nullmenge ist.
- (b) Ist  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f \in \mathcal{E}(B)$ , so ist  $f = \sum_{y \in f(B)} y 1_{\{f=y\}}$  und dies ist eine endliche Summe. Insbesondere existieren für jedes  $f \in \mathcal{E}(B)$  endlich viele messbare Mengen  $A_1, \dots, A_n \subseteq B$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda(A_i) < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \text{ und} \quad f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}.$$

Umgekehrt sind Linearkombinationen von Indikatorfunktionen beschränkter messbarer Mengen immer Elementarfunktionen.

**Satz 1.46.** Seien  $B \in \mathcal{M}^N$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und seien  $f, g, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}(B)$ . Dann gilt:

- (a)  $\alpha f, f + g \in \mathcal{E}(B)$ . Insbesondere ist  $\mathcal{E}(B)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (b)  $\min_{i=1, \dots, n} f_i, \max_{i=1, \dots, n} f_i \in \mathcal{E}(B)$ .

*Beweis.* Folgt aus Bemerkung 1.45 und Satz 1.38(a). □

**Satz 1.47.** Seien  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Dann existiert eine Folge  $(f_k)_k \subseteq \mathcal{E}(B)$  von Elementarfunktionen mit

$$|f_k| \leq |f| \quad \text{für alle } k \text{ und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in B.$$

Ist  $f$  nichtnegativ, d.h.  $f(B) \subseteq [0, \infty]$ , so kann man eine solche Folge finden, welche zusätzlich

$$0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in B, k \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

*Beweis.* **1. Spezialfall:**  $f$  nichtnegativ. Definiere dann  $f_k: B \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k \in \mathbb{N}$  durch

$$f_k(x) := \begin{cases} (m-1)2^{-k}, & \text{falls } (m-1)2^{-k} \leq f(x) < m2^{-k} \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, m \leq k2^k \text{ gilt;} \\ k, & \text{falls } f(x) \geq k \text{ gilt.} \end{cases}$$

Die so definierte Folge von Stufenfunktionen hat die gewünschten Eigenschaften.

**2. Allg. Fall:** Sei  $f$  eine beliebige messbare Funktion  $B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind auch  $f^+, f^-: B \rightarrow [0, \infty]$  messbar nach Korollar 1.39. Wir wählen  $(f_k^1)_k$  bzw.  $(f_k^2)_k$  zu  $f^+$  bzw.  $f^-$  wie im Spezialfall und setzen  $f_k := f_k^1 - f_k^2$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$  für alle  $x \in B$  und  $|f_k| \leq |f_k^1| + |f_k^2| \leq f^+ + f^- = |f|$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 1.5 Integration nichtnegativer messbarer Funktionen

**Satz 1.48** (Produktsatz). Seien  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $N = k + m$ ,  $A \in \mathcal{M}^k$  und  $B \in \mathcal{M}^m$ . Dann gilt:  $A \times B \in \mathcal{M}^N$  und

$$(1.5) \quad \lambda^N(A \times B) = \lambda^k(A) \cdot \lambda^m(B).$$

Nicht für die Lösung von Blatt 3 verwenden!

*Beweis.* Siehe [4, Kap. IX.5, Aufg. 1].  $\square$

**Definition 1.49.** Für  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir den Subgraphen  $U(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ .

**Satz 1.50.** Sei  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  eine beliebige Abbildung.

(a) Ist  $f$  messbar, so ist  $U(f) \in \mathcal{M}^{N+1}$ .

(b) Sind  $f_k: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  messbare Funktionen mit  $f_k \leq f_{k+1}$  für alle  $k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  punktweise, so gilt

$$(1.6) \quad \lambda^{N+1}(U(f)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{N+1}(U(f_k)).$$

(c) Ist  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ , so gilt

$$\lambda^{N+1}(U(f)) = \sum_{y \in f(\mathbb{R}^N)} y \cdot \lambda^N(\{f = y\}).$$

*Beweis.* Sei zunächst  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Dann ist  $f(\mathbb{R}^N)$  endlich und

$$U(f) = \bigcup_{y \in f(\mathbb{R}^N)} \underbrace{\{f = y\}}_{\in \mathcal{M}^N} \times (0, y).$$

Nach Hauptsatz 1.26 und Satz 1.48 ist also  $U(f) \in \mathcal{M}^{N+1}$  mit

$$\lambda^{N+1}(U(f)) = \sum_{y \in f(\mathbb{R}^N)} \lambda^N(\{f = y\}) \cdot \lambda^1((0, y)) = \sum_{y \in f(\mathbb{R}^N)} y \cdot \lambda^N(\{f = y\}).$$

Insbesondere folgt (c).

Seien nun  $f_k, k \in \mathbb{N}$  Funktionen wie in (b). Dann ist  $f$  messbar nach Korollar 1.43. Wir zeigen nun

(1.7) Ist  $U(f_k)$  messbar für alle  $k$ , so auch  $U(f)$  und (1.6) gilt.

Es gilt

$$U(f_k) \subseteq U(f_{k+1}) \quad \text{für alle } k \quad \text{und} \quad U(f) = \bigcup_k U(f_k).$$

Mit Korollar 1.28 folgt

$$\lambda^{N+1}(U(f)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{N+1}(U(f_k)).$$

Es folgt (1.7). Wir beweisen nun (a): Ist  $f$  messbar, so existiert nach Satz 1.47 eine Folge von Funktionen  $f_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ , welche die Voraussetzungen von (b) erfüllt. Gemäß (c) ist dabei  $U(f_k)$  messbar für alle  $k$  und mit (1.7) folgt die Messbarkeit von  $U(f)$ . Es folgt somit (a) und (b) folgt dann aus (a) mit (1.7).  $\square$

**Definition 1.51.** Für eine messbare Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir das (Lebesgue-)Integral durch

$$\int f := \lambda^{N+1}(U(f)) \in [0, \infty].$$

**Bemerkung 1.52.** Aus Satz 1.50(c) folgt insbesondere

$$(1.8) \quad \lambda^N(A) = \int 1_A$$

für jede messbare Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ .

**Satz 1.53** (Satz von der aufsteigenden monotonen Konvergenz). *Seien  $f_k: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , messbare Funktionen, mit  $f_k \leq f_{k+1}$  für alle  $k$  und sei  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ . Dann gilt  $\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 1.50(b) und Definition 1.51.  $\square$

**Satz 1.54.** *Seien  $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\alpha > 0$ . Dann gilt:*

- (a) *Ist  $f \leq g$  f.ü., so ist  $\int f \leq \int g$ .*
- (b) *Ist  $f = g$  f.ü., so ist  $\int f = \int g$ .*
- (c)  *$\int \alpha f = \alpha \int f$  und  $\int (f + g) = \int f + \int g$ .*

(d) Ist  $\int f = 0$ , so ist  $f = 0$  f.ü.

(e) Ist  $\int f < \infty$ , so ist  $f < \infty$  f.ü.

*Beweis.* **(a):** Beachte: Ist  $f \leq g$  f.ü., so existiert eine Nullmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  mit  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N \setminus M$ . Dann ist  $M \times \mathbb{R}$  eine  $(N + 1)$ -dimensionale Nullmenge (siehe Übungsblatt 3) und es folgt  $U(f) \setminus (M \times \mathbb{R}) \subseteq U(g) \setminus (M \times \mathbb{R})$ . Dies liefert

$$\begin{aligned} \int f &= \lambda^{N+1}(U(f)) = \lambda^{N+1}(U(f) \setminus (M \times \mathbb{R})) \\ &\leq \lambda^{N+1}(U(g) \setminus (M \times \mathbb{R})) = \lambda^{N+1}(U(g)) = \int g. \end{aligned}$$

**(b):** Folgt aus (a).

**(c):** Seien zunächst  $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Mit  $F := f + \alpha g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  gilt dann nach Satz 1.50

$$\begin{aligned} \int F &= \sum_{w \in F(\mathbb{R}^N)} w \lambda^N(\{F = w\}) = \sum_{y \in f(\mathbb{R}^N)} y \lambda^N(\{f = y\}) + \sum_{z \in \alpha \cdot g(\mathbb{R}^N)} z \lambda^N(\{\alpha \cdot g = z\}) \\ &= \sum_{y \in f(\mathbb{R}^N)} y \lambda^N(\{f = y\}) + \sum_{x \in g(\mathbb{R}^N)} \alpha x \lambda^N(\{g = x\}) = \int f + \alpha \int g. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall seien  $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Nach Satz 1.47 existieren dann  $f_k, g_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  mit  $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ ,  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$  für alle  $k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  sowie  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g$ . Es folgt dann

$$\int (f + \alpha g) \stackrel{\text{Satz 1.53}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int (f_k + \alpha g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \stackrel{\text{Satz 1.53}}{=} \int f + \alpha \int g.$$

**(d):** Sei  $A_k := \{f \geq \frac{1}{k}\}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\frac{1}{k} 1_{A_k} \leq f$  und somit nach (a):  $\frac{1}{k} \lambda^N(A_k) = \int \frac{1}{k} 1_{A_k} \leq \int f = 0$  für alle  $k$ . Es folgt, dass  $\{f > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  eine Nullmenge ist.

**(e):** Sei  $A := \{f = \infty\}$ . Dann ist  $k \cdot 1_A \leq f$  und somit  $k \lambda^N(A) \leq \int f$  nach (a) für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es folgt, da  $k$  beliebig gewählt ist und  $\int f < \infty$  gilt, dass  $\lambda(A) = 0$  gilt.  $\square$

**Satz 1.55.** Seien  $f_k: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  messbar.

(a) Für  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$  gilt  $\int f = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k$  (Satz von Beppo Levi)

(b) Ist  $\int f_1 < \infty$  und  $f_{k+1} \leq f_k$  für alle  $k$ , so gilt

$$\int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \quad (\text{Satz von der absteigenden monotonen Konvergenz})$$

*Beweis.* **(a):** Sei  $g_k := \sum_{j=1}^k f_j$ , dann ist  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Mit Satz 1.53 folgt

$$\int f = \int \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \stackrel{\text{Satz 1.54(c)}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int f_j = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

(b): Wegen  $\int f_1 < \infty$  und weil  $f_k \searrow f$  gilt, können wir nach Satz 1.54(e) annehmen, dass  $f_k(x) < \infty$  für alle  $x$  und  $k$  gilt. Dazu setzen wir jeweils  $f_k(x) := 0$  für  $x$  in der Nullmenge  $\{f_1 = \infty\}$ . Die Werte der unten betrachteten Integrale verändert dies nicht, laut Satz 1.54(b). So können wir  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  und  $g_k := f_1 - f_k$  definieren. Dann ist wiederum  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und mit Satz 1.53 folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k = \int \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \int (f_1 - f)$ . Mit Satz 1.54(c) erhalten wir

$$\int (f_1 - f) + \int f = \int f_1 = \int g_k + \int f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int (f_1 - f) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k.$$

Dies liefert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \int f$ , wie behauptet.  $\square$

**Definition und Bemerkung 1.56.** Sei  $B \in \mathcal{M}^N$  messbar und  $f: B \rightarrow [0, \infty]$  messbar, und sei  $\bar{f}$  die triviale Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R}^N$  wie in Bemerkung 1.34(b). Wir setzen

$$\int_B f := \int \bar{f}.$$

Sätze 1.53 bis 1.55 übertragen sich dann auf Integrale über  $B$ . Es gilt insbesondere:

- (a)  $\int_B f = \lambda^{N+1}(U(\bar{f}))$ , wobei  $U(\bar{f}) = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$  gilt.
- (b)  $\int_B f = 0 \Rightarrow f = 0$  f.ü. auf  $B$ .

Beachte, dass ebenfalls  $\bar{f} = 1_B \bar{f}$  gilt.

**Satz 1.57.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und sei  $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  Riemann-integrierbar. Dann ist  $f$  messbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t) dt.$$

*Beweis.* Für festes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Z_n := \{x_0, \dots, x_{2^n}\} \subseteq [a, b]$  die äquidistante Zerlegung der Feinheit  $\frac{b-a}{2^n}$ , d.h.  $x_k = a + k \frac{b-a}{2^n}$ , für  $k = 0, \dots, 2^n$ . Seien ferner  $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{E}([a, b])$  definiert durch

$$\varphi_n(t) = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad \psi_n(t) = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{für alle } t \in [x_{k-1}, x_k) \text{ und } k = 1, \dots, 2^n$$

und  $\varphi_n(b) = f(b) = \psi_n(b)$ . Dann gilt

$$(1.9) \quad 0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f \leq \psi_{n+1} \leq \psi_n$$

sowie

$$(1.10) \quad \int_{[a,b]} \varphi_n = U(f, Z_n), \quad \int_{[a,b]} \psi_n = O(f, Z_n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\rho_n := \psi_n - \varphi_n \in \mathcal{E}([a, b])$  gilt  $0 \leq \rho_{n+1} \leq \rho_n$ . Aus der Beschränktheit von  $f$  folgt außerdem  $\int \rho_0 < \infty$ . Also existiert eine messbare Funktion  $\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  und es gilt

$$\int_{[a,b]} \rho \stackrel{\text{Satz 1.55(b)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \rho_n \stackrel{(1.10)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [O(f, Z_n) - U(f, Z_n)] = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  folgt (siehe Mathe I). Es folgt mit Satz 1.54(d), dass  $\rho = 0$  f.ü. in  $[a, b]$  gilt und zusammen mit (1.9) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f$  f.ü. auf  $[a, b]$ . Nach Korollar 1.43 ist somit  $f$  messbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f \stackrel{\text{Satz 1.53}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \stackrel{(1.9)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, Z_n) = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

**Bemerkung 1.58.** Ist  $B \in \mathcal{M}^N$  und  $f: B \rightarrow [0, \infty]$  messbar, so sind andere gebräuchliche Schreibweisen für  $\int_B f$  auch:

$$\int_B f(x) dx, \quad \int_B f(x) d(x_1, \dots, x_N), \quad \int_B f(x) d\lambda(x) \quad \text{oder} \quad \int_B f(x) \lambda(dx).$$

Sind  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $B = (a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ , so schreiben wir gelegentlich  $\int_B f = \int_a^b f$ .

**Bemerkung 1.59.** Sei  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  mit  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $N = k + m$ . Für  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  und  $x \in \mathbb{R}^k$  sei

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (x\text{-Schnitt von } A)$$

Man sieht leicht: Ist  $A$  offen, so ist  $A_x$  offen in  $\mathbb{R}^m$  für alle  $x \in \mathbb{R}^k$ .

**Satz 1.60.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  messbar. Dann gilt das Cavalierische Prinzip (CP):

- (i)  $A_x \in \mathcal{M}^m$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^k$ .
- (ii) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ ,  $f(x) := \lambda^*(A_x)$  ist messbar.
- (iii) Es gilt  $\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^*(A_x) dx$ .

*Beweis.* Siehe z.B. [4, Kap. X.6]. □

**Satz 1.61** (Satz von Fubini (1. Version)). Sei  $N = k + m$  und  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Für  $x \in \mathbb{R}^k$  sei ferner  $f_x: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch  $f_x(y) = f(x, y)$ . Dann gilt

- (a) Für fast alle  $x \in \mathbb{R}^k$  ist  $f_x$  messbar.
- (b) Die fast überall definierte Funktion  $\mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ ,  $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$  ist messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_x \right) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy dx.$$

*Beweis.* (a) Sei  $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  eine aufsteigende Folge nichtnegativer Elementarfunktionen mit  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$  überall auf  $\mathbb{R}^N$ , so wie in Satz 1.47. Nach (CP) ist dann  $\psi_k^x(y) := \varphi_k(x, y)$  für festes  $k$  und  $x \in \mathbb{R}^k \setminus M_k$  mit einer  $k$ -dimensionalen Nullmenge  $M_k$  eine Elementarfunktion auf  $\mathbb{R}^m$ . Es folgt, dass  $\psi_k^x$  für  $x \in \mathbb{R}^k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  jeweils eine Elementarfunktion und somit  $f_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k^x$  für fast alle  $x$  in  $\mathbb{R}^k$  messbar ist.

Zu (b): Sei  $A := U(f) \subseteq \mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m+1}$ . Für  $x \in \mathbb{R}^k$  ist dann

$$A_x := \{(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in A\} = \{(y, z) \mid 0 < z < f(x, y)\} = U(f_x) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}.$$

Für fast alle  $x \in \mathbb{R}^k$  ist nun nach (a) die Funktion  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ ,  $g(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f_x = \lambda^{m+1}(A_x)$  wohldefiniert. Nach (CP) ist  $g$  messbar und es gilt  $\int_{\mathbb{R}^N} f = \lambda^{N+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^k} g$ .  $\square$

**Bemerkung 1.62.** Sei  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Die  $N$ -malige Anwendung von Satz 1.61 liefert

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_N) dx_N \dots dx_1$$

Ist  $\pi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  eine Permutation, so gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_N) dx_{\pi(N)} \dots dx_{\pi(1)}.$$

Es kommt also bei nichtnegativen Funktionen nicht auf die Integrationsreihenfolge an.

**Beispiel 1.63.** Sei  $B := \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq y\} \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: B \rightarrow [0, \infty]$  gegeben durch  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$ . Als abgeschlossene Menge ist  $B$  messbar, ferner ist  $f$  als stetige Funktion auf  $B$  messbar. Sei nun  $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$  die triviale Fortsetzung von  $f$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_B f &= \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_1^y \frac{y^2}{x^2} dx dy = \int_1^2 \frac{-y^2}{x} \Big|_{x=1}^{x=y} dy \\ &= \int_1^2 (-y + y^2) dy = \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

## 2 Integrierbare Funktionen

Im Folgenden sei stets  $B \subseteq \mathbb{R}^N$  eine messbare Menge.

### Definition 2.1.

- (a) Eine messbare Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *(Lebesgue-)integrierbar (auf  $B$ )*, wenn  $\int_B |f| < \infty$  gilt.

Wir setzen  $\mathcal{L}^1(B) := \{f: B \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ integrierbar}\}$ .

- (b) Für  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  sei

$$\int_B f := \int_B f^+ - \int_B f^- \in \mathbb{R} \quad (\text{Lebesgueintegral von } f \text{ über } B).$$

Man beachte: Nach Korollar 1.39 sind  $f^+ := \max\{f, 0\}$  und  $f^- := -\min\{f, 0\}$  messbar und nichtnegativ und besitzen somit ein Integral. Ferner ist  $f^\pm \leq |f|$  und somit ist  $\int_B f^\pm \leq \int_B |f| < \infty$ . Daher ist  $\int_B f \in \mathbb{R}$  wohldefiniert.

**Bemerkung 2.2.** (a) Ist  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  nichtnegativ, so stimmt  $\int_B f$  aus Definition 2.1(b) mit Definition 1.51 überein.

- (b) Ist  $f: B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  derart, dass  $\int_B |f| < \infty$  gilt, so stimmt  $f$  nach Abänderung auf einer Nullmenge nach Satz 1.54 mit einer Funktion  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(B)$  überein. Wir werden dies benötigen, wenn wir punktweise Grenzwerte von Funktionenfolgen in  $\mathcal{L}^1(B)$  betrachten.

- (c)  $f \in \mathcal{L}^1(B) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(B)$ .

- (d) Ist  $g \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $|f| \leq g$  f.ü. auf  $B$ , so ist auch  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  (*Majorantenkriterium*).

- (e) Ist  $g \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $f = g$  f.ü. auf  $B$ , so ist auch  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $\int_B f = \int_B g$ .

- (f) Wir schreiben anstelle von  $\int_B f$  auch  $\int_B f(x) dx$ ,  $\int_B f(x) d\lambda(x)$ ,  $\int_B f(x) \lambda(dx)$  bzw.  $\int_B f(x) d(x_1, \dots, x_N)$ .

**Satz 2.3.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(B)$  und sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $f \leq g$  f.ü. auf  $B$ , so ist  $\int_B f \leq \int_B g$ .

- (b) Ist  $f = g$  f.ü., so ist  $\int_B f = \int_B g$ .



(c)  $f + \alpha g \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $\int_B(f + \alpha g) = \int_B f + \alpha \int_B g$ .

(d)  $|\int_B f| \leq \int_B |f|$  (Standardabschätzung)

(e) Ist  $\int_B |f| = 0$ , so ist  $f = 0$  f.ü. auf  $B$ .

*Beweis. (a):* Sei  $M \subseteq B$  eine Nullmenge mit  $f \leq g$  auf  $B \setminus M$ . Dann ist auch  $f^+ \leq g^+$  und  $f^- \geq g^-$  auf  $B \setminus M$ , also

$$\int_B f = \int_B f^+ - \int_B f^- \leq \int_B g^+ - \int_B g^- = \int_B g.$$

(b): folgt direkt aus (a).

(c): Es ist für  $F := f + \alpha g$ :  $|F| \leq |f| + |\alpha| |g|$  auf  $B$ , also

$$\int_B |F| \leq \int_B |f| + |\alpha| \int_B |g| = \int_B |f| + |\alpha| \int_B |g| < \infty.$$

Die Linearität folgt ähnlich wie in (a).

(d):  $|\int_B f| = |\int_B f^+ - \int_B f^-| \leq \int_B f^+ + \int_B f^- = \int_B (f^+ + f^-) = \int_B |f|$ .

(e): Folgt wie im Falle einer messbaren Funktion  $f: B \rightarrow [0, \infty]$ . □

**Satz 2.4.** Sei  $N = k + m$ .

(a) *Satz von Fubini (2. Version):* Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ . Dann ist für fast alle  $x \in \mathbb{R}^k$  die Funktion  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  integrierbar. Die f.ü. definierte Funktion  $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$  lässt sich dabei zu einer Funktion in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$  fortsetzen, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy dx.$$

(b) Ist  $f \in \mathcal{L}^1(B)$ , so gilt auch

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x) dx_N \dots dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x) dx_{\pi(N)} \dots dx_{\pi(1)}$$

für alle Permutationen  $\pi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ .

(c) *Satz von Tonelli:* Ist  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx_{\pi(N)} \dots dx_{\pi(1)} < \infty$  für mindestens eine Permutation  $\pi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$  und (2.1) gilt für jede Permutation.

*Beweis.* Dies folgt direkt durch Anwendung vom Satz von Fubini (1. Version) auf  $f^+$  und  $f^-$  bzw. auf  $|f|$ . □

**Bemerkung 2.5.** (a) In Anwendungen ist man häufig vor Allem daran interessiert, die Integrationsreihenfolge zu ändern, um Rechnungen vereinfachen zu können.

(b) In Satz 2.12 weiter unten werden wir sehen, dass Satz 1.57 über den Zusammenhang von Lebesgue- und Riemannintegral auf vorzeichenwechselnde Funktionen ausgedehnt werden kann. Dies verwenden wir in den folgenden Beispielen.

**Beispiel 2.6.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  eine beschränkte messbare Menge mit  $\lambda^N(A) > 0$ . Dann ist der *Schwerpunkt*  $S(A) = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N$  von  $A$  definiert durch

$$s_i := \frac{1}{\lambda(A)} \int_A x_i \, d(x_1, \dots, x_N).$$

Konkretes Beispiel: Sei  $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 3 < x_2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Wir bemerken, dass  $A \subseteq (-2, 2) \times (-3, 1)$  gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\stackrel{\text{Satz 1.61}}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(A_{x_1}) \, dx_1 = \int_{-2}^2 (1 - (x_1^2 - 3)) \, dx_1 \\ &= \int_{-2}^2 (4 - x_1^2) \, dx_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $|x_1 1_A(x)| \leq 2 \cdot 1_A(x)$  und  $|x_2 1_A(x)| \leq 3 \cdot 1_A(x)$ , für alle  $x \in \mathbb{R}^2$ . Da  $1_A$  integrierbar ist, liefert das Majorantenkriterium, dass die Funktionen  $x_1 1_A$  und  $x_2 1_A$  integrierbar sind. Wir können den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned} \int_A x_1 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 1_A(x_1, x_2) \, dx \stackrel{\text{Satz 2.4}}{=} \int_{\mathbb{R}} x_1 \int_{\mathbb{R}} 1_A(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} x_1 \lambda^1(A_{x_1}) \, dx_1 \\ &= \int_{-2}^2 x_1 (4 - x_1^2) \, dx_1 = 0 \quad (\text{ungerader Integrand}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_A x_2 \, dx &= \dots = \int_{\mathbb{R}} x_2 \int_{\mathbb{R}} 1_A(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{-3}^1 x_2 2\sqrt{x_2 + 3} \, dx_2 \\ &= 2 \int_0^4 (s - 3)\sqrt{s} \, ds = 2 \left( \frac{2}{5} s^{\frac{5}{2}} - 2s^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 = \frac{4}{5} 2^5 - 4 \cdot 2^3 = -\frac{1}{5} 2^5 = -\frac{32}{5}. \end{aligned}$$

Es folgt für den Schwerpunkt:

$$S(A) = \frac{3}{32} \left( 0, -\frac{32}{5} \right) = \left( 0, -\frac{3}{5} \right).$$

**Beispiel 2.7.** Sei  $B := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) \, dx &= \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dx = \left| \begin{array}{l} s = x+y \\ ds = dx \end{array} \right| = \int_y^{1+y} \frac{s-2y}{s^3} \, ds \\ &= \left( -\frac{1}{s} + \frac{y}{s^2} \right) \Big|_{s=y}^{s=1+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{(1+y)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= - \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2} \, dy = \left| \begin{array}{l} s = 1+y \\ ds = dy \end{array} \right| \\ &= - \int_1^2 \frac{1}{s^2} \, ds = \frac{1}{s} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Offenbar ist jedoch  $f(x, y) = -f(y, x)$  für alle  $(x, y) \in B$ , also folgt

$$\int_0^1 f(x, y) \, dy = - \int_0^1 f(y, x) \, dy = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad \text{also} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx = \frac{1}{2}.$$

Hier hängt der Wert des iterierten Integrals von der Integrationsreihenfolge ab! Dies ist kein Widerspruch zu Satz 1.61, denn  $f \not\geq 0$ . Ferner gilt  $f \notin \mathcal{L}^1(B)$ , denn

$$\begin{aligned} \int_B |f(x, y)| \, d(x, y) &\geq \int_{\{(x, y) \in B \mid x \geq y\}} \frac{x-y}{(x+y)^3} \, d(x, y) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.61}}{=} \int_0^1 \int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dy \, dx = \left| \begin{array}{l} s = x+y \\ ds = dy \end{array} \right| \\ &= \int_0^1 \int_x^{2x} \frac{2x-s}{s^3} \, ds \, dx = \int_0^1 \left( -\frac{x}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \Big|_x^{2x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \right) \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4} \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \infty. \end{aligned}$$

Somit ist dies auch kein Widerspruch zu Satz 2.4, und  $\int_B f$  ist nicht definiert.

**Satz 2.8** (Satz von der monotonen Konvergenz). *Seien  $f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  für  $k \in \mathbb{N}$ .*

- (a) *Ist  $f_{k+1} \geq f_k$  für alle  $k$  und  $\sup_k \int_B f_k < \infty$ , so ist  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  und es gilt  $\int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k$ .*
- (b) *Ist  $f_{k+1} \leq f_k$  für alle  $k$  und  $\inf_k \int_B f_k > -\infty$ , so ist  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  und es gilt  $\int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k$ .*

*Beweis. (a):* Setze  $g_k := f_k - f_1$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Man beachte, dass hier alle  $f_k$  Werte in  $\mathbb{R}$  annehmen und dass diese Differenz daher wohldefiniert ist. Dann ist  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$  für alle  $k$  und für  $g := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = f - f_1$  gilt nach Satz 1.53

$$\int_B g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B g_k \stackrel{\text{Satz 2.3}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k - \int_B f_1 < \infty.$$

Also ist  $g \in \mathcal{L}^1(B)$ . Folglich ist  $f = g + f_1 \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $\int_B f = \int_B g + \int_B f_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k$ .

**(b):** Dies folgt nach (a) durch Anwendung auf  $-f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . □

**Satz 2.9** (Lemma von Fatou). Seien  $f_k \in \mathcal{L}^1(B)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $g \in \mathcal{L}^1(B)$ .

- (a) Ist  $f_k \geq g$  für alle  $k$  und  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_B f_k < \infty$ , so ist auch  $f := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  und

$$\int_B f \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k.$$

- (b) Ist  $f_k \leq g$  für alle  $k$  und  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \int_B f_k > -\infty$ , so ist auch  $f := \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  und

$$\int_B f \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k.$$

*Beweis.* **(a):** Setze  $h_k := \inf_{l \geq k} f_l$ . Dann ist  $h_k$  messbar und  $g \leq h_k \leq f_k$ , also

$$|h_k| \leq |g| + |f_k| \in \mathcal{L}^1(B) \quad \text{und somit } h_k \in \mathcal{L}^1(B) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin ist  $h_k \leq h_{k+1}$  für alle  $k$  und  $\sup_k \int_B h_k \leq \sup_k \int_B f_k < \infty$ . Mit Satz 2.8(a) folgt  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k \in \mathcal{L}^1(B)$  und

$$\int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B h_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B h_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k.$$

**(b):** folgt analog. □

**Satz 2.10** (Satz von der dominierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)). Seien die Funktionen  $f_k$  für  $k \in \mathbb{N}$  messbar auf  $B$ , und  $g \in \mathcal{L}^1(B)$  erfülle  $|f_k| \leq g$  auf  $B$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Ferner möge der punktweise Grenzwert  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  f.ü. auf  $B$  existieren. Dann gilt  $f_k, f \in \mathcal{L}^1(B)$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k$ .

*Beweis.* Für alle  $k$  ist  $f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  nach dem Majorantenkriterium. Ferner gilt

$$\left| \int_B f_k \right| \leq \int_B |f_k| \leq \int_B |g| < \infty.$$

Weiterhin ist  $f = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$  f.ü. auf  $B$ . Satz 2.9 liefert also

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k \geq \int_B f \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k, \quad \text{also } \int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k. \quad \square$$

**Satz 2.11.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(B)$ . Dann gilt:

- (a) Es existiert eine Folge von Elementarfunktionen  $f_k \in \mathcal{E}(B)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B |f - f_k| = 0$ .
- (b) Es existiert eine Folge  $(f_k)_k \subseteq C(B) \cap \mathcal{L}^1(B)$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B |f - f_k| = 0$ .
- (c) Es existiert eine Folge  $(f_k)_k \subseteq C(B) \cap \mathcal{L}^1(B)$ , so dass die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f_k(x) \neq 0\}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  beschränkt sind und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B |f - f_k| = 0$  gilt.

*Beweis.* **(a):** Offenbar ist  $\mathcal{E}(B) \subseteq \mathcal{L}^1(B)$  und nach Satz 1.47 existieren  $f_k \in \mathcal{E}(B)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $|f_k| \leq |f|$  für alle  $k$  und  $f_k \rightarrow f$  punktweise. Setze  $g_k := |f_k - f|$ . Dann konvergiert die Folge  $(g_k)_k$  punktweise gegen 0 und es gilt

$$|g_k| \leq |f_k| + |f| \leq 2|f| \quad \text{auf } B \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B g_k = 0$  wie behauptet.

**(b):** Ohne Einschränkungen sei  $B = \mathbb{R}^N$ ; den Fall für allgemeine Mengen  $B$  kann man durch den Übergang von  $f$  zur trivialen Fortsetzung  $\bar{f}$  und durch Einschränkung der erhaltenen Folgen  $(f_k)_k$  auf  $B$  erledigen.

Fall 1:  $f = 1_\Omega$  für eine offene Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ . Dann definieren wir stetige Funktionen

$$f_k: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) := \begin{cases} \min\{1, k \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}.$$

Es gilt  $0 \leq f_k \leq f_{k+1} \leq f$  für alle  $k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  punktweise auf  $\Omega$ . Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|f - f_k|}_{\geq 0} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_k dx \xrightarrow{\text{Satz 2.10}} \int_{\mathbb{R}^N} f dx - \int_{\mathbb{R}^N} f dx = 0.$$

Fall 2:  $f = 1_\Omega$  für eine beschränkte messbare Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Mit der Definition des äußeren Lebesguemaßes finden wir  $Q_k \in \mathcal{Q}^N$ , so dass  $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$  und  $\sum_{k=1}^\infty |Q_k| \leq \lambda(\Omega) + \varepsilon/2$  gelten. Dann überdecken wir diese halboffenen Quader mit größeren offenen Quadern  $\tilde{Q}_k$  so, dass  $\sum_{k=1}^\infty \lambda(\tilde{Q}_k) \leq \lambda(\Omega) + \varepsilon$  gilt. Dies liefert die offene Teilmenge  $\Omega' := \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{Q}_k$  mit  $\Omega \subseteq \Omega'$  und

$$\int_{\mathbb{R}^N} |1_{\Omega'} - 1_\Omega| dx = \lambda(\Omega' \setminus \Omega) < \varepsilon.$$

Also folgt die Behauptung aus Fall 1.

Fall 3:  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ . Dann lässt sich  $f$  als endliche Linearkombination von Funktion wie im Fall 2 schreiben und die Behauptung folgt.

Fall 4:  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$  beliebig. Dann existiert nach (a) zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$  mit  $\int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}| dx < \varepsilon$ . Also folgt die Behauptung aus Fall 3.

**(c):** Dies folgt nun aus einer Kombination von (a) und (b). □

**Satz 2.12.** Seien  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a < b$ .

(a) Sind  $a, b \in \mathbb{R}$  und ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar, so ist  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  mit

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t) dt.$$

(b) Ist  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und existiert das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_a^b |f(t)| dt$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$  und

$$\int_{(a,b)} f = \int_a^b f(t) dt \quad (\text{uneigentliches Riemann-Integral}).$$

*Beweis. (a):* Ist  $f$  Riemann-integrierbar, so sind  $f^\pm$  Riemann-integrierbar und somit gilt die Behauptung für  $f^\pm$  nach Satz 1.57 und die Behauptung folgt somit auch für  $f = f^+ - f^-$ .

*(b):* Als stetige Funktion ist  $f$  messbar. Die Existenz von  $\int_a^b |f(t)| dt$  impliziert die Existenz von  $\int_a^b f(t) dt$ . Seien nun  $r_n, s_n \in (a, b)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $r_n < s_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$ . Sei ferner

$$f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad f_n(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [r_n, s_n], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  punktweise auf  $(a, b)$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1:  $f \geq 0$  auf  $(a, b)$ . Dann ist  $f_n \leq f_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\int_{(a,b)} f \stackrel{\text{Satz 1.53}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(r_n, s_n)} f \stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r_n}^{s_n} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt < \infty.$$

Es folgt  $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$  und damit die Behauptung.

Fall 2:  $f$  beliebig. Der erste Fall (angewendet auf  $|f|$ ) liefert dann  $|f| \in \mathcal{L}^1((a, b))$ . Da ferner  $|f_n| \leq |f|$  auf  $(a, b)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt mit Satz 2.10:

$$f \in \mathcal{L}^1((a, b)) \quad \text{und} \quad \int_{(a,b)} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} f_n \stackrel{\text{wie oben}}{=} \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

**Bemerkung 2.13.** Satz 2.12(b) ist ohne die Bedingung der Riemann-Integrierbarkeit von  $|f|$  im Allgemeinen falsch. Konkretes Beispiel: Die Funktion  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  ist messbar und der Betrag des Riemann-Integral ist endlich, d.h.  $\left| \int_0^\infty f(x) dx \right| < \infty$ . Aber  $f$  ist nicht Lebesgueintegrierbar, da  $\int_0^\infty f^+(x) dx = \int_0^\infty f^-(x) dx = \infty$  gilt.

**Bemerkung 2.14.**

(a) Für  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  lässt sich eine sogenannte *Halbnorm* durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(B)} := \int_B |f| dx$$

definieren. Für  $f, g \in \mathcal{L}^1(B)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  lässt sich leicht überprüfen:

- (i)  $\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^1(B)} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^1(B)}$ .
- (ii)  $\|f\|_{\mathcal{L}^1(B)} \geq 0$ . Ferner gilt  $\|f\|_{\mathcal{L}^1(B)} = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  f.ü. in  $B$  (wegen der f.ü.-Eigenschaft handelt es sich hier nicht um eine Norm).
- (iii)  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(B)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(B)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(B)}$ .

Wir definieren nun auf  $\mathcal{L}^1(B)$  eine Äquivalenzrelation durch

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \quad \text{fast überall auf } B.$$

Wir setzen

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1(B) \mid f \sim g\}$$

als die zugehörige Äquivalenzklasse zu  $f$  und definieren:

$$L^1(B) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^1(B)\}.$$

Es gilt dann

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad \text{und} \quad [f + g] = [f] + [g] \quad \text{für } f, g \in \mathcal{L}^1(B), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit ist  $L^1(B)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und durch  $\|[f]\|_{L^1(B)} := \|f\|_{\mathcal{L}^1(B)}$  wird eine Norm auf  $L^1(B)$  erklärt. Aus Bequemlichkeitsgründen schreibt man üblicherweise  $f \in L^1(B)$ , d.h. man lässt die eckigen Klammern weg. Somit steht  $f$  also sowohl für eine bestimmte Funktion als auch für **alle** anderen Funktionen, die *fast überall* mit dieser Funktion übereinstimmen. Schlampig (aber eingängig) formuliert steht  $f$  also für eine *nur bis auf Nullmengen eindeutig definierte* Funktion. Wir schließen uns im Folgenden dieser Bezeichnungsweise an.

(b) Man kann zeigen:

1. Ist  $f_k \in \mathcal{L}^1(B)$  für  $k \in \mathbb{N}$  und ist  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  mit  $\|f - f_k\|_{L^1(B)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  (man sagt  $(f_k)_k$  konvergiert gegen  $f$  in  $L^1(B)$ ), so existiert eine Teilfolge  $(f_{k_j})_j$ , welche punktweise fast überall auf  $B$  gegen  $f$  konvergiert.
2. Ist  $(f_k)_k \subseteq \mathcal{L}^1(B)$  eine Cauchyfolge bzgl.  $\|\cdot\|_{L^1(B)}$ , so konvergiert  $(f_k)_k$ , d.h. es gibt ein  $f \in \mathcal{L}^1(B)$  derart, dass  $f_k$  gegen  $f$  in  $L^1(B)$  konvergiert. Es folgt, dass  $L^1(B)$  ein Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|_{L^1(B)}$  ist.

Wichtig ist hierbei: Eine  $L^1(B)$ -Konvergenz liefert im Allgemeinen **nicht** die punktweise Konvergenz der Gesamtfolge (auch nicht fast überall).

(c) Analog definiert man für  $p \geq 1$ :

$$L^p(B) := \{[f] \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(B)\}, \quad \|[f]\|_{L^p(B)} := \left( \int_B |f|^p \right)^{1/p}.$$

$L^p(B)$  ist dann für alle  $p \geq 1$  ein Banachraum. Wie zuvor lässt man die eckigen Klammern üblicherweise weg und schreibt einfach  $f \in L^p(B)$ .

Speziell: Für  $p = 2$  ist  $L^2(B)$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle_{L^2(B)} := \int_B f \cdot g$  für  $f, g \in L^2(B)$  ( $L^2(\mathbb{R}^N)$  wird auch als der Raum der quadratintegriblen Funktionen bezeichnet).

## 2.1 Parameterabhängige Integrale und Transformationsformeln

**Satz 2.15** (Satz über die stetige Parameterabhängigkeit von Integralen). *Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $f: X \times B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $f(x, \cdot): B \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar für alle  $x \in X$
- (ii)  $f(\cdot, y): X \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig für fast alle  $y \in B$
- (iii) Es existiert  $g \in \mathcal{L}^1(B)$  derart, dass für alle  $x \in X$  gilt:  $|f(x, \cdot)| \leq g$  auf  $B$ .

Dann ist die Funktion  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \int_B f(x, y) \, dy$  stetig.

*Beweis.* Seien  $a \in X$  und  $(x_k)_k \subseteq X$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ . Definiere  $f_k: B \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_k(y) = f(x_k, y)$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist dann  $f_k$  messbar nach (i) und  $|f_k| \leq g$  auf  $B$  nach (iii). Weiterhin gilt

$$f_k \rightarrow f(a, \cdot): B \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{punktweise f.ü. auf } B \text{ nach (ii).}$$

Mit dem Satz über die dominierte Konvergenz, Satz 2.10, folgt

$$h(a) = \int_B f(a, y) \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(y) \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f(x_k, y) \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k),$$

also ist  $h$  stetig in  $a$ . □

**Satz 2.16** (Satz zur Vertauschung partieller Ableitung und des Integrals). *Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $f: X \times B \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit*

- (i)  $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(B)$  für alle  $x \in X$ .
- (ii)  $f(\cdot, y): X \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar für fast alle  $y \in B$ .
- (iii) Es existiert  $g \in \mathcal{L}^1(B)$  derart, dass für alle  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  und  $x \in X$  gilt:  $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \cdot)| \leq g$  f.ü. auf  $B$ .

Dann ist die Funktion  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \int_B f(x, y) \, dy$  stetig differenzierbar mit

$$(2.2) \quad \partial_j h(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \, dy \quad \text{für alle } x \in X, j = 1, \dots, N.$$

*Beweis.* Es ist nur (2.2) zu zeigen, denn dann folgt die Stetigkeit von  $\partial_j h: X \rightarrow \mathbb{R}$  aus Satz 2.15. Sei dazu  $x \in X$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  und  $(\varepsilon_m)_m \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Nullfolge. Für  $m \in \mathbb{N}$  definiere

$$k_m: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_m(y) = \frac{1}{\varepsilon_m} (f(x + \varepsilon_m e_j, y) - f(x, y)).$$

Dann ist  $k_m$  messbar für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und

$$(2.3) \quad k_m \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \cdot) \quad \text{für } m \rightarrow \infty \text{ punktweise f.ü. nach Voraussetzung (ii).}$$

Nach Korollar 1.43 ist  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \cdot)$  dann messbar. Weiterhin ist nach den Voraussetzungen

$$|k_m(y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', y) \right| \leq |g(y)| \quad \text{für alle } y \in B \text{ und } m \in \mathbb{N}.$$



Hier ist  $x' = x'(y, m)$  nach dem Mittelwertsatz (siehe Mathe II) als Zwischenstelle in  $\{x + te_j \mid |t| \leq |\varepsilon_m|\}$  gewählt. Mit Satz 2.10 und (2.3) folgt

$$\frac{h(x + \varepsilon_m e_j) - h(x)}{\varepsilon_m} = \int_B k_m(y) dy \rightarrow \int_B \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Dies liefert (2.2). □

**Beispiel 2.17.** Die *Gammafunktion*  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist definiert durch  $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ .

- (a) Wir zeigen zuerst:  $\Gamma \in C^\infty((0, \infty))$ . Um dies einzusehen, sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir wählen zunächst feste  $0 < a < b$  und definieren die stetige Funktion  $f(z, t) := t^{z-1} e^{-t}$ . Sei ferner

$$g_k: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definiert durch} \quad g_k(t) := \begin{cases} |\log t|^k t^{a-1} e^{-t}, & t < 1, \\ |\log t|^k t^{b-1} e^{-t}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Dann ist  $g_k$  stückweise stetig und somit auf jedem kompakten Teilintervall von  $(0, \infty)$  Riemann-integrierbar. Wir erhalten

$$\int_0^\infty g_k(t) dt \leq \int_0^1 |\log t|^k t^{a-1} dt + \int_1^\infty |\log t|^k t^{b-1} e^{-t} dt < \infty.$$

Wegen  $g_k \geq 0$  und nach Satz 2.12 ist  $g_k \in \mathcal{L}^1((0, \infty))$ . Weiterhin ist

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^k f(z, t) \right| \leq g_k(t)$$

für alle  $t \in (0, \infty)$  und  $z \in (a, b)$ . Mit Satz 2.16 folgt daher induktiv  $\Gamma \in C^\infty((a, b))$ . Da  $a$  und  $b$  beliebig gewählt waren, folgt  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

- (b) Für alle  $z > 0$  ist  $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$ . Insbesondere gilt für  $n \in \mathbb{N}$ :  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . (leichte Übung!)

**Satz 2.18** (Transformationssatz). *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $\varphi \in \text{Diff}(U, V)$  ( $C^1$ -Diffeomorphismen zwischen  $U$  und  $V$ ). Sei ferner  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gilt: Genau dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(V)$ , wenn  $(f \circ \varphi)|\det J_\varphi| \in \mathcal{L}^1(U)$  ist, und in diesem Fall gilt die Integraltransformationsformel:*

$$(2.4) \quad \int_V f(y) dy = \int_{\varphi(U)} f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx.$$

*Beweis.* Umfangreich, siehe z.B. [10], Kapitel IV.2. □

**Bemerkung und Beispiel 2.19.** Seien  $U, V, \varphi$  und  $f$  wie in Satz 2.18.

- (a) (2.4) gilt auch, falls  $f$  nichtnegativ und lediglich messbar ist — Integrierbarkeit ist in diesem Fall nicht notwendig.
- (b) Ist  $\varphi$  affin linear, d.h.  $\varphi(x) = Tx + c$  für  $x \in U$  mit  $T \in \text{GL}(N)$  und  $c \in \mathbb{R}^N$ , so ist  $\det J_\varphi(x) = \det T$  für alle  $x \in U$  und somit gilt

$$(2.5) \quad \int_V f(y) \, dy = |\det(T)| \int_U f(Tx + c) \, dx.$$

- (c) Ist  $K \subseteq U$  messbar, so auch  $\varphi(K) \subseteq V$  und es gilt

$$\lambda^N(\varphi(K)) = \int_K |\det J_\varphi(x)| \, dx.$$

Dies folgt aus (a) angewendet auf  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1_{\varphi(K)}(x)$ . Mit  $\varphi$  wie in (b) erhält man speziell  $\lambda^N(T(K) + c) = |\det(T)|\lambda^N(K)$  für  $T \in \text{GL}(N)$  und  $T(K) + c := \{Tx + c \mid x \in K\}$ .

Spezielles Beispiel: Seien  $a, b, c > 0$ , und sei  $A = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Ellipsoid. Um  $\lambda^3(A)$  zu berechnen, betrachten wir  $T \in \text{GL}(N)$  definiert durch  $T(x, y, z) = (ax, by, cz)$ . Dann ist  $\det(T) = abc > 0$  und  $A = T(B_1(0))$ , also folgt

$$\lambda^3(A) = |\det(T)|\lambda^3(B_1(0)) \stackrel{\text{Übung!}}{=} abc \frac{4}{3}\pi.$$

- (d) Ist  $W = [0, 1]^N \subseteq \mathbb{R}^N$  der Einheitswürfel und  $T \in \text{GL}(N)$ , so ist  $T(W)$  das von den Vektoren  $Te_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  aufgespannte *Parallelotop*. Nach (c) gilt  $\lambda^N(T(W)) = |\det(T)|$ . Man bezeichnet daher  $\det(T)$  auch als das *orientierte Volumen* von  $T(W)$  (vgl. Mathe II).
- (e) Der Beweis von Satz 2.18 besteht im Wesentlichen aus drei großen Schritten. Im ersten Schritt beweist man die Formel (2.5) aus (b) für stetige Funktionen  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , die außerhalb einer gewissen beschränkten Menge nur den Wert 0 annehmen. Dabei schreibt man die lineare Transformationsabbildung  $T$  als Komposition von Elementarmatrizen (siehe Mathe II) und wendet den Satz von Fubini an.

Im zweiten Schritt betrachtet man allgemein Transformationsabbildungen  $\varphi: U \rightarrow V$  und integrierbare stetige Funktionen  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Hier schreibt man  $f$  als eine lokal endliche Summe von Funktionen, die nur auf einer kleinen Menge nicht verschwinden. Auf diesen Mengen ist jeweils die Abweichung zwischen der Abbildung  $\varphi$  und ihrer Linearisierung aber ebenfalls klein, so dass man durch einen Approximationsprozess zum Ziel gelangt.

Im dritten Schritt verwendet man Satz 2.11(b), um von stetigen Funktionen zu integrierbaren Funktionen übergehen zu können.

**Satz 2.20.**

(a) (ebene Polarkoordinaten) Für  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^\infty r \int_{-\pi}^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) d\varphi dr.$$

(b) (Zylinderkoordinaten) Für  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty r \int_{-\pi}^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) d\varphi dr dz.$$

*Beweis. (a):* Sei  $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $P_2: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $P_2(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ . Aus Mathe II folgt

- $V := P_2(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ ; insbesondere ist  $\mathbb{R}^2 \setminus V$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$ .
- $P_2 \in \text{Diff}(U, V)$  und  $\det(J_{P_2}(r, \varphi)) = r$  für alle  $(r, \varphi) \in U$ .

Mit Satz 2.18 und dem Satz von Fubini folgt die Behauptung.

(b): folgt nun aus (a) und dem Satz von Fubini. □

**Beispiel 2.21.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = e^{-x^2}$ . Wegen

$$0 \leq f(x) \leq \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ e^{-|x|}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

und mit Satz 2.12(b) folgt, dass  $f$  integrierbar ist. Zur Berechnung von  $\int f$  betrachten wir  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $g(x, y) = f(x)f(y)$ . Dann ist  $g \geq 0$  und

$$(2.6) \quad \int_{\mathbb{R}^2} g = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^2 < \infty.$$

Also ist  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$  und somit nach Satz 2.20(a):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g &= \int_0^\infty r \int_{-\pi}^\pi e^{-r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} d\varphi dr = \int_0^\infty r \int_{-\pi}^\pi e^{-r^2} d\varphi dr \\ &= \pi \int_0^\infty 2re^{-r^2} dr = \left| \begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r dr \end{array} \right| = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = -\pi e^{-t} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Aus (2.6) folgt also  $\int_{\mathbb{R}} f = \sqrt{\pi}$ .

**Satz 2.22** (Allgemeine Polarkoordinaten). Sei  $N \geq 2$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f &= \int_0^\infty r^{N-1} \underbrace{\int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{(N-2)\text{-mal}} f(P_N(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2})) \times \\ &\quad \times \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} d\theta_1 \dots d\theta_{N-2} d\varphi dr, \end{aligned}$$

wobei  $P_N$  induktiv definiert ist durch  $P_2(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$  und

$$P_N(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2}) = (P_{N-1}(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-3}) \sin(\theta_{N-2}), r \cos(\theta_{N-2})) \quad \text{für } N > 2.$$

Insbesondere gilt für  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_0^\infty r^2 \int_{-\pi}^\pi \int_0^\pi f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

**Korollar 2.23.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$  eine radialsymmetrische Funktion, d.h. es gibt  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \tilde{f}(|x|_2)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, dx = \omega_{N-1} \int_0^\infty r^{N-1} \tilde{f}(r) \, dr,$$

mit

$$\omega_{N-1} := 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{(N-2)\text{-mal}} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} \, d\theta_1 \dots \, d\theta_{N-2} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Bemerkung: Mit den Begriffsbildungen im folgenden Kapitel werden wir  $\omega_{N-1}$  als die Oberfläche der Einheitssphäre  $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^N$  interpretieren können.

*Beweis.* Die Integralformel folgt direkt aus Satz 2.22 und der Identität

$$|P_N(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2})| = r. \quad \square$$

### Bemerkung und Beispiel 2.24.

- (a) Ist  $f$  eine nichtnegative messbare Abbildung, so gelten die Formeln aus Satz 2.20, Satz 2.22 und Korollar 2.23 ohne weitere Voraussetzung.
- (b) Sei  $B := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^N$  die Einheitskugel und  $\alpha > -N$ . Dann ist die Funktion  $x \mapsto |x|_2^\alpha 1_{B \setminus \{0\}}(x)$  radialsymmetrisch. Somit gilt gemäß Korollar 2.23:

$$\int_B |x|^\alpha \, dx = \omega_{N-1} \int_0^1 r^{\alpha+N-1} \, dr = \frac{\omega_{N-1}}{N + \alpha}.$$

Insbesondere gilt also mit  $\alpha = 0$ :

$$\lambda^N(B_1(0)) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_{B_1(0)}(x) \, dx = \frac{\omega_{N-1}}{N} = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}.$$

Mit der Bemerkung aus Korollar 2.23 liefert dies einen direkten Zusammenhang zwischen dem Kugelvolumen und ihrer Oberfläche.

# 3 Integration auf Untermannigfaltigkeiten und der Gaußsche Integralsatz

Im Folgenden sei stets  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

**Definition und Bemerkung 3.1.**

- (a) Sei  $k \leq N$  und  $A \in \mathbb{R}^{N \times k}$  eine Matrix mit maximalem Rang. Dann ist  $A^t A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  positiv definit, die Abbildung  $x \mapsto Ax$  ist injektiv und es gilt  $\det(A^t A) > 0$  (siehe Mathe II). Dabei gilt die Formel

$$A^t A = (\langle Ae_i, Ae_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k},$$

d.h. die Matrix  $A^t A$  hängt nur von der Länge der Vektoren  $Ae_1, \dots, Ae_k$  und den Winkeln zwischen diesen Vektoren ab. Die positive Zahl  $\sqrt{\det(A^t A)}$  gibt dabei das  $k$ -dimensionale Volumen des von  $Ae_1, \dots, Ae_k$  in  $\mathbb{R}^N$  aufgespannten Parallelotops an. Um dies zu sehen genügt der Fall  $N = k$ ; dann gilt  $\sqrt{\det(A^t A)} = |\det A|$  und dies haben wir bereits in Bemerkung und Beispiel 2.19(d) gesehen.

- (b) Sei  $\psi: U \rightarrow M \cap V$  eine lokale Parametrisierung der  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$ . Wir setzen

$$g_{ij} := \langle \partial_i \psi, \partial_j \psi \rangle: U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, k$$

und

$$g_\psi := \det((g_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}) = \det(J_\psi^t J_\psi): U \rightarrow (0, \infty).$$

Die Abbildung  $g_\psi$  heißt *Gramsche Determinante der Parametrisierung*  $\psi$ . Im Spezialfall  $k = 2, N = 3$  gilt:  $g_\psi = |\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi|_2^2$ , wobei  $a \times b$  das Vektorprodukt zweier Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  beschreibt (Übung).

**Beispiel 3.2.** Sei  $M := S^{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N, V = \mathbb{R}^N \setminus \{e_N\}, \psi: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow M \cap V$  die *stereographische Projektion*, gegeben durch  $\psi(x) = \frac{1}{1+|x|_2^2} \begin{pmatrix} 2x \\ |x|_2^2 - 1 \end{pmatrix}$ . Nach Übungsblatt 2 folgt

$$(J_\psi(x))^t J_\psi(x) = \frac{4}{(1+|x|_2^2)^2} E_{N-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Es folgt also für die Gramsche Determinante von  $\psi$ :

$$g_\psi(x) = \left( \frac{4}{(1+|x|_2^2)^2} \right)^{N-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

**Satz 3.3.** Seien  $(U_1, V_1, \varphi)$  und  $(U_2, V_2, \psi)$  zwei lokale Parametrisierungen von  $M$  mit  $W := M \cap V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Sei ferner  $f: M \cap V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gilt:  $(f \circ \varphi)\sqrt{g_\varphi}$  ist genau dann integrierbar, wenn  $(f \circ \psi)\sqrt{g_\psi}$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(3.1) \quad \int_{\varphi^{-1}(W)} (f \circ \varphi)\sqrt{g_\varphi} = \int_{\psi^{-1}(W)} (f \circ \psi)\sqrt{g_\psi}.$$

*Beweis.* Sei  $m := N - k$ . Nach Mathe 2 ( $\clubsuit\clubsuit\clubsuit$ ) ist die Parameterwechselabbildung

$$\rho := \psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Wir untersuchen das Transformationverhalten der Gramschen Determinanten unter dem Parameterwechsel. Wegen  $\varphi = \psi \circ \rho$  ist  $J_\varphi = (J_\psi \circ \rho)J_\rho$ , also

$$\begin{aligned} g_\varphi &= \det(J_\varphi^t J_\varphi) = \det(J_\rho^t (J_\psi \circ \rho)^t (J_\psi \circ \rho) J_\rho) \\ &= (\det J_\rho)^2 \det((J_\psi \circ \rho)^t (J_\psi \circ \rho)) = (\det J_\rho)^2 g_\psi \circ \rho. \end{aligned}$$

Dies liefert zusammen mit dem Transformationssatz (Satz 2.18):  $(f \circ \psi)\sqrt{g_\psi}$  ist genau dann integrierbar, wenn

$$(f \circ \psi \circ \rho)\sqrt{g_\psi \circ \rho} |\det J_\rho| = (f \circ \psi \circ \rho)\sqrt{(\det J_\rho)^2 (g_\psi \circ \rho)} = (f \circ \varphi)\sqrt{g_\varphi}$$

integrierbar ist. Ist dies der Fall, so folgt weiter (3.1) aus dem Transformationssatz.  $\square$

Wegen Satz 3.3 ergibt die folgende Definition Sinn:

**Definition 3.4.** Sei  $(U, V, \psi)$  eine lokale Parametrisierung von  $M$ . Wir nennen eine Funktion  $f: M \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  *elementar integrierbar über  $M \cap V$* , wenn die Funktion  $(f \circ \psi)\sqrt{g_\psi}$  über  $U$  integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das *Integral von  $f$  über  $M \cap V$*  durch

$$\int_{M \cap V} f \, d\sigma := \int_U (f \circ \psi)\sqrt{g_\psi}.$$

**Beispiel 3.5.** Sei wiederum  $M := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $S_- := S^2 \setminus \{e_3\}$ . Dann ist 1 elementar integrierbar über  $S_-$ . Um dies zu sehen, betrachten wir die stereographische Projektion  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M \cap V$  wie in Beispiel 3.2 mit  $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{e_3\}$ . Nach Beispiel 3.2 gilt

$$g_\psi(x) = \left( \frac{4}{(1 + |x|_2^2)^2} \right)^2,$$

also mit Satz 1.61 (Fubini für nichtnegative Funktionen) und Korollar 2.23

$$\begin{aligned} \int_{S_-} 1 \, d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1 + |x|_2^2)^2} \, dx = 2\pi \int_0^\infty r \cdot \frac{4}{(1 + r^2)^2} \, dr \\ &= \left| \begin{array}{l} s = 1 + r^2 \\ ds = 2r \, dr \end{array} \right| = 4\pi \int_1^\infty \frac{1}{s^2} \, ds = 4\pi < \infty. \end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist, die lokale Definition eines Integrals über  $M$  aus Definition 3.4 zu globalisieren, d.h. auf die ganze Untermannigfaltigkeit  $M$  auszudehnen. Dazu werden wir die lokalen Definitionen mit Hilfe einer Zerlegung der Eins „zusammenkleben“.

**Definition 3.6.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

- (a) Für  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  bezeichnen wir die Menge  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}} \cap U$  als *Träger von  $f$* .
- (b) Wir bezeichnen mit  $C_c^k(U, \mathbb{R}^m)$  den Vektorraum der Abbildungen  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ , deren *Träger* kompakt ist. Diese Abbildungen betrachten wir stets als durch 0 auf  $\mathbb{R}^N$  fortgesetzt. Im Fall  $m = 1$  schreiben wir  $C_c^k(U)$  anstelle von  $C_c^k(U, \mathbb{R})$ . Der Raum  $C_c^\infty(U)$  wird auch als Raum der *Testfunktionen auf  $U$*  bezeichnet.

**Proposition 3.7** (Zerlegung (Partition) der Eins). *Sei  $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  eine Familie offener Teilmengen von  $\mathbb{R}^N$  und sei  $V := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ . Dann existieren Funktionen  $\eta_j \in C^\infty(V)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , mit*

- (i)  $\eta_j(x) \in [0, 1]$  für alle  $x \in V$  und  $j \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $\sum_{j=1}^\infty \eta_j \equiv 1$  auf  $V$ ,
- (iii) für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existiert  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\text{supp}(\eta_j) \subseteq V_i$ ,
- (iv) jedes  $x \in V$  besitzt eine offene Umgebung  $U$  in  $V$ , so dass  $U \cap \text{supp}(\eta_j) \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $j \in \mathbb{N}$  gilt.

Die Familie  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  nennt man eine der Familie  $\mathcal{V}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Die im Beweis konstruierte Zerlegung hat kompakte Träger, d.h. in (iii) gilt zusätzlich  $\eta_j \in C_c^\infty(V_i)$ .

**Bemerkung 3.8.** Anders als üblich betrachten wir hier aus technischen Gründen glatte Zerlegungen der Eins, ohne immer kompakte Träger zu fordern.

*Beweis von Proposition 3.7.* Setze

$$(3.2) \quad \rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|_2^2 - 1}\right), & |x|_2 < 1, \\ 0, & |x|_2 \geq 1, \end{cases}$$

und definiere für  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $\rho_\varepsilon(x) := \rho(x/\varepsilon)$ . Dann ist  $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  (Übung!),  $\text{supp}(\rho_\varepsilon) = \overline{B}_\varepsilon(0)$  und  $\rho_\varepsilon > 0$  in  $B_\varepsilon(0)$ .

Für  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir die Mengen

$$A_k := \left\{ x \in V \mid \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) \geq \frac{1}{k}, |x|_2 \leq k \right\}.$$

Dann gilt  $A_k \subseteq A_{k+1}$  für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k$  ist kompakt und  $V = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ . Man nennt  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  auch eine *Ausschöpfung von  $V$  mit kompakten Mengen*.

Zu jedem  $x \in V$  existieren  $i \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon_x \in (0, 1)$  mit  $\overline{B}_{\varepsilon_x}(x) \subseteq V_i$ . Sei  $X_1 \subseteq V$  eine endliche Teilmenge, so dass

$$A_1 \subseteq \bigcup_{x \in X_1} B_{\varepsilon_x}(x)$$

gilt. Induktiv finden wir für  $k \geq 2$  eine endliche Menge  $X_k \subseteq V$  mit

$$A_k \setminus \mathring{A}_{k-1} \subseteq \bigcup_{x \in X_k} B_{\varepsilon_x}(x).$$

Dies ist möglich, weil  $A_k \setminus \mathring{A}_{k-1}$  kompakt ist. Für  $X := \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  gilt dann

$$V = \bigcup_{x \in X} B_{\varepsilon_x}(x).$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Familie  $\{\overline{B}_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in X\}$  eine *lokal endliche* Überdeckung von  $V$  ist, d.h., dass zu jedem  $y \in V$  eine offene Umgebung  $U \subseteq V$  von  $y$  existiert, so dass  $U \cap \overline{B}_{\varepsilon_x}(x) \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $x \in X$  gilt.

Wir schreiben  $X = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  und  $\varepsilon_j := \varepsilon_{x_j}$  und definieren für  $j \in \mathbb{N}$  die gesuchten Funktionen durch

$$\eta_j(x) := \begin{cases} \frac{\rho_{\varepsilon_j}(x - x_j)}{\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j}(x - x_j)}, & x \in V, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus V. \end{cases} \quad \square$$

**Definition und Satz 3.9.** Seien  $(U_i, V_i, \psi_i)$  lokale Parametrisierungen von  $M$ , so dass  $\mathcal{V} := \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  eine offene Überdeckung von  $M$  darstellt. Sei ferner  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine der Familie  $\mathcal{V}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins und sei  $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  so, dass  $\text{supp } \eta_j \subseteq V_{\kappa(j)}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt. Wir nennen eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  *integrierbar über  $M$* , wenn  $f$  über alle  $V_i$  jeweils elementar integrierbar ist und wenn gilt:

$$(3.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} |f| \eta_j \, d\sigma < \infty.$$

Ist dies der Fall, dann ist das *Integral von  $f$  über  $M$* ,

$$(3.4) \quad \int_M f \, d\sigma := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} f \eta_j \, d\sigma,$$

wohldefiniert, d.h., unabhängig von  $\mathcal{V}$  und der gewählten Zerlegung der Eins.

*Beweis.* Sei  $f$  über alle  $V_i$  jeweils elementar integrierbar. Dann ist  $(f \circ \psi_i) \sqrt{g_{\psi_i}}$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  messbar und daher  $f \eta_j$  und  $|f| \eta_j$ , für  $j \in \mathbb{N}$ , jeweils über  $V_{\kappa(j)}$  elementar integrierbar. Die Integrale in (3.3) und auf der rechten Seite von (3.4) sind also wohldefiniert. Jetzt nehmen wir zusätzlich (3.3) an. Wegen (3.3) und wegen der Standardabschätzung



(Satz 2.3(d)) ist die Reihe in (3.4) absolut konvergent und somit der Ausdruck auf der rechten Seite wohldefiniert.

Um die Definitionen zu rechtfertigen, fehlt nur noch, für die Integrierbarkeit von  $f$  über  $M$  und den Ausdruck auf der rechten Seite von (3.4) die Unabhängigkeit von  $\mathcal{V}$  und der Zerlegung der Eins zu zeigen.

Sei zunächst  $\{\gamma_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine weitere  $\mathcal{V}$  untergeordnete Zerlegung der Eins und  $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gegeben mit  $\text{supp}(\gamma_j) \subseteq V_{\lambda(j)}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Für  $j, k \in \mathbb{N}$  folgt  $\text{supp}(\eta_j \gamma_k) \subseteq V_{\kappa(j)} \cap V_{\lambda(k)}$  und daher

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad & \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} |f| \eta_j \, d\sigma \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} \sum_{k=1}^{\infty} |f| \eta_j \gamma_k \, d\sigma \stackrel{\text{Satz 1.55(a)}}{=} \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} |f| \eta_j \gamma_k \, d\sigma \\
&\stackrel{\text{Satz 3.3}}{=} \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\lambda(k)}} |f| \eta_j \gamma_k \, d\sigma \stackrel{\text{Satz 1.55(a)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\lambda(k)}} \sum_{j=1}^{\infty} |f| \eta_j \gamma_k \, d\sigma \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\lambda(k)}} |f| \gamma_k \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Somit hängt der Begriff der Integrierbarkeit von  $f$  über  $M$  nicht von der gewählten Zerlegung der Eins ab.

Für  $j \in \mathbb{N}$  konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} f \eta_j \gamma_k$  punktweise gegen  $f \eta_j$ . Außerdem gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f \eta_j \gamma_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f| \eta_j \gamma_k = |f| \eta_j,$$

eine in  $M \cap V_{\kappa(j)}$  elementar integrierbare Funktion. Der Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 2.10) liefert also

$$\int_{M \cap V_{\kappa(j)}} f \eta_j \, d\sigma = \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} \sum_{k=1}^{\infty} f \eta_j \gamma_k \, d\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} f \eta_j \gamma_k \, d\sigma.$$

Analog gilt auch

$$\int_{M \cap V_{\lambda(k)}} f \gamma_k \, d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\lambda(k)}} f \eta_j \gamma_k \, d\sigma.$$

Also kann man das Argument in (3.5) auf  $f$  statt  $|f|$  anwenden und erhält, dass die rechte Seite von (3.4) nicht von der gewählten Zerlegung der Eins abhängt.

Sei nun  $\mathcal{W} := \{W_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$  eine weitere offene Überdeckung von  $M$  aus lokalen Parametrisierungen, und sei  $\{\gamma_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  eine  $\mathcal{W}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Wir setzen  $V := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$  und  $W := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} W_\ell$ . Indem wir alle  $V_i$  jeweils durch  $V_i \cap W$  und alle  $W_\ell$  jeweils durch  $W_\ell \cap V$  ersetzen, können wir  $V = W$  annehmen. Dazu schränken wir auch die Abbildungen der Zerlegungen der Eins jeweils auf  $V$  ein und erhalten wieder

glatte Zerlegungen der Eins, welche auf  $M$  unverändert sind. Die Ausdrücke in (3.3) und (3.4) ändern sich also nicht durch dieses Vorgehen. Dann ist auch  $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$  eine offene Überdeckung von  $M$  mit lokalen Parametrisierungen, und sowohl  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  als auch  $\{\gamma_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  sind  $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$  untergeordnete Zerlegungen der Eins. Aus dem oben gezeigten folgt die Unabhängigkeit von diesen Zerlegungen und somit die Unabhängigkeit von der offenen Überdeckung durch lokale Parametrisierungen.  $\square$

**Bemerkung 3.10.** Wenn  $M$  durch  $(U, V, \psi)$  **global** parametrisiert ist, dann können wir die triviale Zerlegung der Eins,  $\{1_V\}$ , in (3.4) verwenden. Das Integral von  $f$  über  $M$  ist dann einfach das zur Parametrisierung gehörende elementare Integral.

**Satz 3.11.** Seien  $f, h: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $M$  und sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + h$  und  $\alpha f$  integrierbar über  $M$ , und es gilt

$$(a) \int_M (f + h) \, d\sigma = \int_M f \, d\sigma + \int_M h \, d\sigma.$$

$$(b) \int_M \alpha f \, d\sigma = \alpha \int_M f \, d\sigma.$$

*Beweis.* Dies folgt sofort aus (3.4).  $\square$

**Satz 3.12.** Sei  $M$  kompakt und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar über  $M$ .

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $p \in M$  existiert eine Einbettungskarte  $(V, \tau)$  für  $M$  bei  $p$ . Sei  $r > 0$  klein genug, so dass  $\overline{B_r(p)} \subseteq V$  gilt. Dann ist  $\tau(\overline{B_r(p)})$  eine kompakte Teilmenge von  $\tau(V)$  und somit ist  $J_{\tau^{-1}}$  auf  $\tau(\overline{B_r(p)})$  beschränkt. Mit  $U := \tau(M \cap B_r(p))$  und  $\psi: U \rightarrow M \cap B_r(p)$ ,  $\psi := \tau^{-1}|_U$ , ist  $(U, B_r(p), \psi)$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  in  $p$  und sowohl  $U$  als auch  $g_\psi$  sind beschränkt. Diese Auswahl können wir an jedem Punkt  $p$  von  $M$  treffen und folglich die kompakte Menge  $M$  mit endlich vielen lokalen Parametrisierungen  $(U_i, V_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , überdecken, so dass jeweils  $U_i$  und  $g_{\psi_i}$  beschränkt sind.

Da  $f$  stetig auf  $M$  ist, ist  $f$  beschränkt. Zusammen mit der Stetigkeit von  $f$  und der Beschränktheit von  $U_i$  und  $g_{\psi_i}$  erhalten wir, dass  $f$  über jede Menge  $M \cap V_i$  elementar integrierbar ist. Sei  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine der Familie  $\{V_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins mit  $\text{supp}(\eta_j) \subseteq V_{\kappa(j)}$  für alle  $j$ . Es folgt mit dem Satz von Beppo Levi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} |f| \eta_j \, d\sigma &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \kappa^{-1}(i)} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} |f| \eta_j \, d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{M \cap V_i} |f| \sum_{j \in \kappa^{-1}(i)} \eta_j \, d\sigma \leq \sum_{i=1}^n \int_{M \cap V_i} |f| \, d\sigma < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 3.13.**

(a) Eine Teilmenge  $S \subseteq M$  heißt

- *integrierbar über  $M$* , falls die Funktion  $1_S: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $M$  ist.

- $k$ -dimensionale Nullmenge, falls  $S$  integrierbar über  $M$  und  $\int_M 1_S d\sigma = 0$  ist.
- (b) Ist  $S \subseteq M$  integrierbar über  $M$ , so nennen wir  $\text{vol}_k(S) := \int_M 1_S d\sigma$  das  $k$ -dimensionale Volumen von  $S$ .
- (c) Eine Aussage für Punkte aus  $M$  gilt per Definition *f.ü. auf  $M$* , wenn sie für alle Punkte bis auf eine Nullmenge in  $M$  gilt.

**Satz 3.14.** Seien  $f, h: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $M$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $f \leq h$  *f.ü. auf  $M$* , so folgt  $\int_M f d\sigma \leq \int_M h d\sigma$ .
- (b) Ist  $f = h$  *f.ü. auf  $M$* , so folgt  $\int_M f d\sigma = \int_M h d\sigma$ .
- (c) Ist  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, so dass für jede lokale Parametrisierung  $(U, V, \psi)$  von  $M$  die Abbildung  $(g \circ \psi) \sqrt{g_\psi}$  messbar ist und so, dass  $|g|$  über  $M$  integrierbar ist, dann ist  $g$  über  $M$  integrierbar und es gilt  $|\int_M g d\sigma| \leq \int_M |g| d\sigma$ .

*Beweis.* Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.3 nach Übergang zu lokalen Parametrisierungen.  $\square$

**Bemerkung 3.15.** Seien  $(U_i, V_i, \psi_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , lokale Parametrisierungen von  $M$ , und sei  $K \subseteq M \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i)$ . Es folgt sofort aus Definition und Satz 3.9 und Definition 3.13, dass  $K$  genau dann eine  $k$ -dimensionale Nullmenge ist, wenn  $\psi_i^{-1}(K \cap V_i)$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  eine Nullmenge ist. Es folgt:

- Jede Teilmenge einer  $k$ -dimensionalen Nullmenge wieder eine  $k$ -dimensionale Nullmenge.
- Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar über  $M$ , wenn sie über  $M \setminus K$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt  $\int_M f d\sigma = \int_{M \setminus K} f d\sigma$ .

**Bemerkung 3.16.** Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar über  $M$ , so schreiben wir anstelle von  $\int_M f d\sigma$  im Folgenden auch

$$\int_M f(x) d\sigma(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_M f(x_1, \dots, x_N) d\sigma(x_1, \dots, x_N).$$

**Bemerkung und Beispiel 3.17.**

- (a) Sei  $M := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ .
1. Die Menge  $K := \{x \in S^2 \mid x_2 = 0 \text{ und } x_1 \leq 0\}$  ist eine Nullmenge in  $S^2$ . Um dies zu sehen, betrachten wir die stereographischen Projektionen  $\psi$  und  $\varphi$  aus Beispiel 7.44 in Mathe 2. Dann ist  $K \subseteq \psi(\mathbb{R}^2) \cup \varphi(\mathbb{R}^2) = S^2$  und  $\psi^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\} = \varphi^{-1}(K)$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$ . Mit Bemerkung 3.15 folgt, dass  $K \subseteq S^2$  eine zweidimensionale Nullmenge ist.

2. Ist  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt

$$(3.6) \quad \int_{S^2} f \, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Tatsächlich ist nämlich  $f = f1_V + f1_K$  mit  $K$  wie in 1. und  $V = S^2 \setminus K$ . Ferner ist  $f1_V$  elementar integrierbar über  $S^2$  mittels der lokalen Parametrisierung

$$\psi: (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow V, \quad \psi(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Für die Gramsche Determinante gilt dabei  $g_\psi(\varphi, \theta) = \sin^2 \theta$ , also folgt (3.6) wie behauptet.

Spezielles Beispiel: Sei  $a := (0, 0, s) \in \mathbb{R}^3$  mit  $s > 1$  und  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := \frac{1}{|x-a|_2}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S^2} f \, d\sigma &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + (\cos \theta - s)^2)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + s^2 - 2s \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{(1 + s^2 - 2s \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \, d\theta \, d\varphi = \left| \begin{array}{l} z = \cos \theta \\ dz = -\sin \theta \, d\theta \end{array} \right| \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 + s^2 - 2sz)^{\frac{1}{2}}} \, dz \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2s}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} - z}} \, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{2s}} \left( -2\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} - z} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{2s}} \left( -\sqrt{\frac{1+s^2-2s}{2s}} + \sqrt{\frac{1+s^2+2s}{2s}} \right) = \frac{2\pi}{s} ((1+s) - (s-1)) \\ &= \frac{4\pi}{s} = \frac{\text{vol}_2(S^2)}{|a|_2} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hat eine physikalische Interpretation: Das elektrische Potential (oder Gravitationspotential), welches von einer homogenen Ladungsverteilung (oder Massenverteilung) auf einer Kugel erzeugt wird, entspricht dem Potential, welches von einer Punktladung (oder Punktmasse) gleicher Größe im Zentrum der Kugel erzeugt wird.

- (b) Ein zu 1. entsprechendes Resultat erhält man für stetige Funktionen  $f: S^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit allgemeinen Polarkoordinaten. Noch allgemeiner: Betrachtet man für  $f$  den Definitionsbereich für  $r > 0$

$$rS^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|_2 = r\},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 N = 2 : \quad & \int_{rS^1} f \, d\sigma = r \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, d\varphi, \\
 N = 3 : \quad & \int_{rS^2} f \, d\sigma = r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \\
 N \geq 4 : \quad & \int_{rS^{N-1}} f \, d\sigma = r^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{(N-2)\text{-mal}} f(P_N(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2})) \times \\
 & \quad \times \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} \, d\theta_1 \dots \, d\theta_{N-2} \, d\varphi,
 \end{aligned}$$

wobei  $P_N$  gegeben ist wie in Satz 2.22. Insbesondere gilt also für  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  stetig:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, dx &= \int_0^{\infty} r^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{(N-2)\text{-mal}} f(P_N(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2})) \times \\
 & \quad \times \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} \, d\theta_1 \dots \, d\theta_{N-2} \, d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^{\infty} r^{N-1} \int_{S^{N-1}} f(r \cdot \tilde{x}) \, d\sigma(\tilde{x}) \, dr.
 \end{aligned}$$

**Definition 3.18.** Der *Schwerpunkt*  $S(M) = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N$  einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  ist definiert durch

$$s_i := \frac{1}{\text{vol}_k(M)} \int_M x_i \, d\sigma(x), \quad \text{für } i = 1, \dots, N,$$

falls diese Integrale existieren. Üblich ist auch die folgende, vektorwertige Schreibweise:

$$S(M) = \frac{1}{\text{vol}_k(M)} \int_M x \, d\sigma(x) \in \mathbb{R}^N.$$

**Beispiel 3.19.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$  offen und  $M := \text{Graph } f \subseteq \mathbb{R}^N$  für eine  $C^1$ -Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann wird  $M$  global parametrisiert durch  $\psi: U \rightarrow M$ ,  $\psi(x) = (x, f(x))$  und es gilt

$$g_{\psi}(x) = \det J_{\psi}(x)^t J_{\psi}(x) = 1 + |\nabla f(x)|_2^2 \quad (\text{Übung!}).$$

Im Falle der Existenz der Integrale gilt also

$$\text{vol}_{N-1}(M) = \int_M 1_M \, d\sigma = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|_2^2} \, dx$$

und (vektorwertig)

$$S(M) = \left[ \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|_2^2} \, dx \right]^{-1} \int_U (x, f(x)) \sqrt{1 + |\nabla f(x)|_2^2} \, dx \in \mathbb{R}^N.$$

*Spezielles Beispiel:*

Sei  $U := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \sqrt{1 - |x|_2^2}$ . Dann ist  $M := \text{Graph } f$  die obere Halbsphäre mit  $\text{vol}_2(M) = 2\pi$ . Für die zugehörige globale Parametrisierung gilt  $g_\psi(x) = 1 + \frac{|x|_2^2}{1 - |x|_2^2} = \frac{1}{1 - |x|_2^2}$ . Also ist  $S(M) = (0, 0, s_3)$  mit

$$s_3 = \frac{1}{2\pi} \int_U \sqrt{1 - |x|_2^2} \sqrt{\frac{1}{1 - |x|_2^2}} dx = \frac{\lambda^2(U)}{2\pi} = \frac{1}{2},$$

d.h.  $S(M) = (0, 0, \frac{1}{2})$ .

**Satz und Definition 3.20** (Rotationsflächen). *Sei  $M \subseteq \mathbb{R} \times (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit und  $R_M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in M\}$  die von  $M$  erzeugte Rotationsfläche (bzgl. der Rotation um die  $x$ -Achse). Dann ist  $R_M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit und es gilt*

$$(3.7) \quad \text{vol}_2(R_M) = 2\pi \int_M r d\sigma(x, r) \quad (\text{Erste Guldinsche Regel}).$$

*Anschaulich: Das zweidimensionale Volumen von  $R_M$  ergibt sich als Produkt aus der „Länge von  $M$ “ (d.h.  $\text{vol}_1(M)$ ) und dem Umfang des Kreises, der durch Rotation des Schwerpunktes von  $M$  um die  $x$ -Achse erzeugt wird.*

*Beweis.* Seien  $(U_i, V_i, \rho_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , lokale Parametrisierungen von  $M$ , so dass  $\mathcal{V} := \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  eine Überdeckung von  $M$  bildet, und sei  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine der Familie  $\mathcal{V}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins mit  $\text{supp } \eta_j \subseteq V_{\kappa(j)}$  für alle  $j$ . Wir betrachten  $A := \mathbb{R} \times \{0\} \times (-\infty, 0)$  und definieren

$$\tilde{V}_i := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \in V_i\} \setminus A, \quad \tilde{V} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{V}_i,$$

sowie  $\psi_i: \tilde{U}_i := U_i \times (-\pi, \pi) \rightarrow R_M \cap \tilde{V}_i$  durch  $\psi_i(t, \varphi) := (\rho_{i,1}(t), \rho_{i,2}(t) \sin \varphi, \rho_{i,2}(t) \cos \varphi)$ , für  $i \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$J_{\psi_i}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{i,1}(t) & 0 \\ \dot{\rho}_{i,2}(t) \sin \varphi & \rho_{i,2}(t) \cos \varphi \\ \dot{\rho}_{i,2}(t) \cos \varphi & -\rho_{i,2}(t) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und somit

$$(3.8) \quad g_{\psi_i}(t, \varphi) = |\dot{\rho}_i(t)|_2^2 \rho_{i,2}(t)^2 = \rho_{i,2}(t)^2 g_{\rho_i}(t) > 0.$$

Insbesondere ist  $J_{\psi_i}$  injektiv für alle  $(t, \varphi) \in \tilde{U}_i$ . Man zeigt leicht, dass  $\psi_i: \tilde{U}_i \rightarrow R_M \cap \tilde{V}_i$  ein Homöomorphismus ist. Damit sind alle  $\psi_i$  lokale Parametrisierungen für  $R_M$  und die Mengen  $\tilde{V}_i$  bilden eine offene Überdeckung von  $R_M \setminus A$ . Analog kann man auch lokale Parametrisierungen von  $R_M$  in allen Punkten  $R_M \cap A$  konstruieren. Damit ist  $R_M$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ . Es ist leicht zu sehen, dass die Menge  $R_M \cap A$  eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist und daher eine 2-dimensionale

Nullmenge in  $R_M$ . Nach Bemerkung 3.15 gilt  $\text{vol}_2(R_M) = \text{vol}_2(R_M \setminus A)$ , und letzteres werden wir jetzt ausrechnen.

Es sei  $\gamma_j: \tilde{V} \rightarrow [0, 1]$  durch  $\gamma_j(x, y, z) := \eta_j(x, \sqrt{y^2 + z^2})$  gegeben. Dann ist  $\{\gamma_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine der Familie  $\{\tilde{V}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Für  $j \in \mathbb{N}$  und  $i := \kappa(j)$  haben wir

$$\int_{R_M \cap \tilde{V}_i} \gamma_j \, d\sigma = \int_{\tilde{U}_i} (\gamma_j \circ \psi_i) \sqrt{g_{\psi_i}} \stackrel{(3.8)}{=} 2\pi \int_{U_i} (\eta_j \circ \rho_i) \rho_{i,2} \sqrt{g_{\rho_i}} = 2\pi \int_{M \cap V_i} r \eta_j \, d\sigma.$$

Dies liefert

$$\text{vol}_2(R_M \setminus A) = \int_{R_M \setminus A} d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{R_M \cap \tilde{V}_{\kappa(j)}} \gamma_j \, d\sigma = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M \cap V_{\kappa(j)}} r \eta_j \, d\sigma = 2\pi \int_M r \, d\sigma.$$

Man beachte: wir haben hier nicht die Endlichkeit der Integrale vorausgesetzt. Da wir aber nur nichtnegative Funktionen integrieren, ergibt das trotzdem Sinn. Ist aber z.B.  $M$  kompakt, so sind alle auftretenden Integrale endlich.  $\square$

**Beispiel 3.21.** Sei  $0 < r_1 < r_2$  und  $M := \{(x, r) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \mid x^2 + (r - r_2)^2 = r_1^2\}$ . Die Menge  $R_M$  nennt man dann *Torus*. Nach Satz und Definition 3.20 gilt dann:

$$\frac{\text{vol}_2(R_M)}{2\pi} = \int_M r \, d\sigma(x, r).$$

Setzt man für  $t \in (-r_1, r_1)$  die Funktion  $r_{\pm}(t) := r_2 \pm \sqrt{r_1^2 - t^2}$ , dann gilt

$$M = \text{Graph } r_+ \cup \text{Graph } r_- \cup \{(r_1, r_2), (-r_1, r_2)\}.$$

Folglich gilt analog zu Beispiel 3.19

$$\begin{aligned} & \int_M r \, d\sigma(x, r) \\ &= \int_{-r_1}^{r_1} r_+(t) \sqrt{1 + \dot{r}_+(t)^2} \, dt + \int_{-r_1}^{r_1} r_-(t) \sqrt{1 + \dot{r}_-(t)^2} \, dt \\ &= \int_{-r_1}^{r_1} (r_2 + \sqrt{r_1^2 - t^2}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{r_1^2 - t^2}} \, dt + \int_{-r_1}^{r_1} (r_2 - \sqrt{r_1^2 - t^2}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{r_1^2 - t^2}} \, dt \\ &= 2r_1 r_2 \int_{-r_1}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - t^2}} \, dt = \left| \begin{array}{l} t = r_1 \cos \varphi \\ dt = -r_1 \sin \varphi \, d\varphi \end{array} \right| \\ &= 2r_1 r_2 \int_{\pi}^0 \frac{-r_1 \sin(\varphi)}{\sqrt{r_1^2 - r_1^2 \cos^2(\varphi)}} \, dt = 2r_1 r_2 \int_0^{\pi} 1 \, dt = 2\pi r_1 r_2. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also  $\text{vol}_2(R_M) = 4\pi^2 r_1 r_2$ .

**Definition 3.22.** Eine stetige Funktion  $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt *Einheitsnormalenfeld* (kurz: *ENF*) auf  $M$ , wenn gilt:

- (i)  $\nu(p) \in N_p(M)$  für alle  $p \in M$ .
- (ii)  $|\nu(p)|_2 = 1$  für alle  $p \in M$ .

**Bemerkung und Beispiel 3.23.**

- (a) Ist  $\nu$  ein ENF auf  $M$ , so auch  $-\nu$ .
- (b) Sei  $M = S^{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Dann ist ein ENF von  $M$  gegeben durch  $\nu(x) = x$ .
- (c) Sei allgemeiner  $M := h^{-1}(c)$  für einen regulären Wert  $c$  einer  $C^1$ -Abbildung  $h: V \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ , welche auf einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^N$  definiert ist. Dann sind  $\frac{\nabla h_1}{|\nabla h_1|_2}, \dots, \frac{\nabla h_{N-k}}{|\nabla h_{N-k}|_2}$  Einheitsnormalenfelder auf  $M$  nach Satz 7.41 in Mathe 2.
- (d) Sei  $M := \text{Graph } f$  für eine  $C^1$ -Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$  definiert auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ . Dann sind für  $i = 1, \dots, N-k$  die Abbildungen

$$\nu_i: M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \nu_i(x, f(x)) = \frac{(-\nabla f_i(x), e_i)}{\sqrt{1 + |\nabla f_i(x)|_2^2}} \quad \text{für } x \in U$$

Einheitsnormalenfelder von  $M$ , wobei hier  $e_i \in \mathbb{R}^{N-k}$  der  $i$ -te Koordinatenvektor sei.

*Spezialfall:*  $k = N - 1$ : Dann ist ein Einheitsnormalenfeld gegeben durch

$$\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \nu(x, f(x)) = \frac{(-\nabla f(x), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|_2^2}}$$

- (e) (*Lokale Einheitsnormalenfelder*) Sei  $\psi: U \rightarrow M \cap V$  eine lokale Parametrisierung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  und sei

$$\mu = \frac{\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi}{|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi|_2}: U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Dann ist durch

$$\nu: M \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(p) = \mu(\psi^{-1}(p))$$

ein ENF auf  $M \cap V$  gegeben.

**Satz und Definition 3.24.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  beschränkt und offen. Wir sagen  $\Omega$  habe einen  $C^1$ -Rand, wenn zu jedem  $p \in \partial\Omega$  eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^N$  von  $p$  und eine  $C^1$ -Funktion  $h: V \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

- $\Omega \cap V = \{x \in V \mid h(x) < 0\}$ ,
- $0$  ist ein regulärer Wert von  $h$ .

Man nennt  $\overline{\Omega}$  dann auch ein  $C^1$ -berandetes Kompaktum. Ist dies erfüllt, so gilt:

- (a)  $\partial\Omega \cap V = \{x \in V \mid h(x) = 0\}$  und  $V \setminus \overline{\Omega} = \{x \in V \mid h(x) > 0\}$ .



(b)  $\partial\Omega$  ist eine  $N - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$ .

(c) Es existiert genau ein ENF  $\nu$  auf  $\partial\Omega$  derart, dass für alle  $p \in \partial\Omega$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$(3.9) \quad p + t\nu(p) \notin \Omega \quad \text{für } 0 < t < \varepsilon.$$

$\nu$  heißt äußeres Einheitsnormalenfeld von  $\Omega$ .

*Beweis.* Zu (a): Sei  $h(x) = 0$ . Weil 0 ein regulärer Wert von  $h$  ist, folgt  $v := \nabla h(x) \neq 0$ . Für kleines  $\varepsilon > 0$  liefert dies  $h(x + \varepsilon v) = h(x) + \varepsilon|v|_2^2 + o(\varepsilon) > 0$  und  $h(x - \varepsilon v) = h(x) - \varepsilon|v|_2^2 + o(\varepsilon) < 0$ , also  $x \in V \cap \bar{\Omega} \cap (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \partial\Omega \cap V$ . Es folgt

$$(3.10) \quad \{x \in V \mid h(x) = 0\} \subseteq \partial\Omega \cap V.$$

Es ist klar, dass in (3.10) die umgekehrte Inklusion gilt. Damit ist die erste Aussage gezeigt. Die zweite Aussage ergibt sich aus  $\bar{\Omega} \cap V = (\Omega \cup \partial\Omega) \cap V = \{x \in V \mid h(x) \leq 0\}$  durch Negation.

Zu (b) und (c): Sei  $M := \partial\Omega$ . Da  $M \cap V = h^{-1}(0)$  nach (a), ist  $M \cap V$  eine  $(N - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  nach Satz 7.41 in Mathe 2. Durch Variation von  $p$  erhält man die Aussage für ganz  $M$ . Ferner ist  $N_p M = \text{Spann}\{\nu(p)\}$  mit  $\nu(p) = \frac{\nabla h(p)}{|\nabla h(p)|_2}$ , wieder nach Satz 7.41 in Mathe 2. Wie im Beweis von (a) erhält man  $\varepsilon > 0$  mit

$$p - t\nu(p) \in \Omega \quad \text{und} \quad p + t\nu(p) \notin \Omega \quad \text{für } t \in (0, \varepsilon).$$

Der normierte Vektor  $\nu(p) \in N_p M$  ist also durch (3.9) eindeutig festgelegt und hängt in  $V \cap M$  stetig von  $p$  ab. Es folgt, dass auf ganz  $M$  ein Einheitsnormalenfeld existiert, welches (3.9) in jedem Punkt  $p \in M$  erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 3.25.** Man nennt  $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$  auch ein Kompaktum mit  $C^k$ -Rand für  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , wenn die Funktion  $h$  in Satz und Definition 3.24 eine  $C^k$ -Funktion ist. Im Fall  $k = \infty$  spricht man von einem *glatten Rand*.

**Beispiel 3.26.** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $h \in C^1(V)$  und  $c \in \mathbb{R}$  ein regulärer Wert von  $h$  derart, dass die Menge  $\{x \in V \mid h(x) \leq c\} \subseteq V$  kompakt ist. Dann ist  $\Omega := \{x \in V \mid h(x) < c\} \subseteq V$  beschränkt mit  $C^1$ -Rand, denn für jeden Punkt  $x \in \partial\Omega$  sind die Voraussetzungen in Satz und Definition 3.24 mit der Funktion  $h - c: V \rightarrow \mathbb{R}$  anstelle von  $h$  erfüllt. Ferner ist das äußere Einheitsnormalenfeld von  $\Omega$  global gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{1}{|\nabla h(x)|_2} \nabla h(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Spezielles Beispiel: Seien  $r, a_1, \dots, a_N > 0$ ,  $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_N x_N^2$  und  $\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid h(x) < r^2\}$ . Das so beschriebene Ellipsoid  $\mathcal{E}$  hat einen glatten Rand.

Noch Spezieller: Für  $a_1 = \dots = a_N = r = 1$  ist  $\mathcal{E} := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^N$  und  $\partial\mathcal{E} = S^{N-1}$ . Das äußere Normalenfeld von  $B_1(0)$  ist gegeben durch  $\nu: S^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\nu(x) = x$ .

**Satz 3.27** (Gauß'scher Integralsatz). Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^N$  offen,  $\bar{\Omega} \subseteq V$  ein Kompaktum mit glattem Rand und  $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  das äußere Einheitsnormalenfeld von  $\Omega$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma \quad \text{für alle } F \in C^1(V, \mathbb{R}^N).$$

(Erinnerung:  $\operatorname{div}(F) = \sum_{k=1}^N \partial_k F_k$ .)

**Bemerkung und Beispiel 3.28.** (a) In der Situation von Satz 3.27 nennt man das Integral

$$(3.11) \quad \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma$$

den aus  $\Omega$  austretenden Fluss des Vektorfelds  $F$ .

Betrachtet man z.B. eine Flüssigkeitsströmung entlang eines durch  $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  gegebenen Geschwindigkeitsfeldes, so kann man die lokale Größe  $\langle F, \nu \rangle d\sigma$  als die Flüssigkeitsmenge interpretieren, welche das infinitesimal kleine Flächenstück  $d\sigma$  pro Zeiteinheit nach außen durchfließt. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so muss für jedes Kompaktum  $\bar{\Omega}$  mit  $C^1$ -Rand der Gesamtfluss durch  $\partial\Omega$  in der Summe Null ergeben: Mit dem Gauß'schen Integralsatz also

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = 0 \quad \text{für jedes solche } \Omega,$$

und dies liefert  $\operatorname{div} F \equiv 0$ .

Im Umkehrschluss liegen im Fall  $\operatorname{div} F \neq 0$  sogenannte „Quellen“ oder „Senken“ vor (oder Bereich, in denen die Flüssigkeit komprimiert oder expandiert werden kann (vgl. Mathe II)).

(b) Sei  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  gegeben durch  $F(x) = x$ . Dann ist  $\operatorname{div} F(x) = N$  für alle  $x$ . Somit gilt für jedes Kompaktum  $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$  mit  $C^1$ -Rand:

$$N \operatorname{vol}_N(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu(x) \rangle d\sigma(x).$$

Im Fall  $\Omega := B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^N$  ergibt sich mit dem äußeren ENF  $\nu: S^{N-1} = \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\nu(x) = x$  der Zusammenhang:

$$\operatorname{vol}_{N-1}(\partial B_1(0)) = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma(x) = \int_{\partial B_1(0)} \langle x, x \rangle d\sigma(x) = N \operatorname{vol}_N(B_1(0)) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}.$$

*Randbemerkung:* Für jedes Kompaktum  $\bar{\Omega}$  mit  $C^1$ -Rand und  $\operatorname{vol}_N(\Omega) = \operatorname{vol}_N(B_1(0))$  gilt

$$\frac{\operatorname{vol}_{N-1}(\partial\Omega)}{\operatorname{vol}_N(\Omega)} \geq N \quad (\text{isoperimetrische Ungleichung})$$

Bei vorgegebenem Volumen minimiert die Kugel also die Oberfläche unter allen Kompakta mit  $C^1$ -Rand.

- (c) Ein Körper  $\bar{\Omega}$  — mathematisch modelliert als ein Kompaktum mit  $C^1$ -Rand — befinde sich in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte  $c$ , welche die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq 0\}$  ausfüllt. Sei  $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  das äußere ENF. Im Punkt  $x \in \partial\Omega$  übt dann (in geeigneten Einheiten) die Flüssigkeit auf  $\Omega$  den Druck  $c|x_3|$  in Richtung des „inneren“ ENF  $-\nu(x)$  aus. Die Gesamtkraft, die auf den Körper wirkt, ist nun gegeben durch (Vektorschreibweise)

$$K = (K_1, K_2, K_3) = \int_{\partial\Omega} cx_3\nu(x) d\sigma(x),$$

also für festes  $i$  mit  $F(x) = x_3e_i$ :

$$K_i = \int_{\partial\Omega} cx_3\nu_i(x) d\sigma(x) = c \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma \stackrel{\text{Satz 3.27}}{=} c \int_{\Omega} \operatorname{div} F.$$

Es folgt  $K_i = 0$  für  $i = 1, 2$  und  $K_3 = c \int_{\Omega} 1 = c \operatorname{vol}_N(\Omega)$ . Auf den Körper wirkt also eine Auftriebskraft in  $x_3$ -Richtung, die der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit entspricht.

**Definition 3.29.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen. Wir definieren für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  die Funktionenräume

$$C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) := \left\{ f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^M) \left| \begin{array}{l} \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur Ord-} \\ \text{nung } k \text{ haben jeweils eine stetige Fortsetzung} \\ \text{auf } \bar{\Omega}. \end{array} \right. \right\}$$

**Korollar 3.30** (Partielle Integration und Greensche Formeln). *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und derart, dass  $\bar{\Omega}$  ein Kompaktum mit  $C^1$ -Rand ist. Sei  $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  das äußere ENF von  $\Omega$ .*

- (a) Für  $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  und  $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt

$$\int_{\Omega} \langle \nabla g, F \rangle = \int_{\partial\Omega} \langle gF, \nu \rangle d\sigma - \int_{\Omega} g \operatorname{div} F.$$

Inbesondere gilt für alle  $i = 1, \dots, N$

$$\int_{\Omega} f \partial_i g = \int_{\partial\Omega} fg\nu_i d\sigma - \int_{\Omega} g \partial_i f.$$

- (b) Für  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$  gilt

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle d\sigma$$

(Wir schreiben auch kurz  $\partial_\nu u := \langle \nabla u, \nu \rangle$  für die  $x$ -abhängige Richtungsableitung in Richtung  $\nu$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \nu \rangle d\sigma - \int_{\Omega} v \Delta u \\ \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) &= \int_{\partial\Omega} \langle v \nabla u - u \nabla v, \nu \rangle d\sigma \end{aligned}$$

*Beweis.* Übung, falls  $F \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$ ,  $f, g \in C^1(V)$  und  $u, v \in C^2(V)$  gelten, für eine offene Umgebung  $V$  von  $\overline{\Omega}$ .

Im allgemeinen Fall betrachtet man für  $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/n\},$$

eine Ausschöpfung von  $\Omega$  durch offene Mengen mit kompaktem Abschluss. Dann hat  $\Omega_n$  einen  $C_1$ -Rand wenn  $n$  groß genug ist und die Aussagen gelten jeweils mit  $\Omega_n$  statt  $\Omega$ . Man kann zeigen, dass dann alle Integrale über  $\Omega_n$  und  $\partial\Omega_n$  für  $n \rightarrow \infty$  jeweils gegen die entsprechenden Integrale über  $\Omega$  und  $\partial\Omega$  konvergieren.  $\square$

**Bemerkung 3.31.** Ist  $v \in C_c^2(\Omega)$ , so ist auch  $\partial_i v, \partial_i \partial_j v \in C_c(\Omega)$  für alle  $i, j = 1, \dots, N$ . Folglich gilt speziell für  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $v \in C_c^2(\Omega)$  nach Korollar 3.30 (siehe auch Lemma 3.32 unten):

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = - \int_{\Omega} v \Delta u$$

Nun zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes.

**Lemma 3.32.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Dann gilt:

- (a)  $\int_{\Omega} \partial_i f = 0$  für alle  $f \in C_c^1(\Omega)$ .
- (b)  $\int_{\Omega} g \partial_i f = - \int_{\Omega} f \partial_i g$  für alle  $f \in C_c^1(\Omega)$  und  $g \in C^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Offensichtlich folgt (b) aus (a) durch Anwendung auf  $fg \in C_c^1(\Omega)$ .

Zu (a): O.E. sei  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , denn wir können  $f$  als  $C^1$ -Funktion trivial auf  $\mathbb{R}^N \setminus U$  fortsetzen. Ferner sei o.E.  $i = 1$  und  $R > 0$  so groß gewählt, dass  $\text{supp}(f) \subseteq (-R, R)^N$  gilt. Für festes  $x' = (x_2, \dots, x_N)$  ist dann

$$\int_{-R}^R \partial_1 f(x_1, x') dx_1 = f(x_1, x') \Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0,$$

mit dem Satz von Fubini also

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f = \int_{(-R, R)^N} \partial_i f = \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \partial_1 f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = 0. \quad \square$$

**Korollar 3.33.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  offen und  $F \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Dann gilt  $\int_{\Omega} \text{div} F = 0$ .

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 3.32.  $\square$

**Satz 3.34** (Gauß'scher Integralsatz (1. Teil)). Sei  $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$  ein Kompaktum mit  $C^1$ -Rand. Dann existiert zu jedem  $p \in \overline{\Omega}$  eine offene Umgebung  $U = U(p) \subseteq \mathbb{R}^N$  derart, dass für alle  $F \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N)$  gilt:

$$\int_{U \cap \Omega} \text{div} F = \int_{U \cap \partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma.$$

*Beweis.* 1. Fall:  $p \in \Omega$ . Mit  $U := \Omega$  gilt dann

$$\int_{\Omega \cap U} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \stackrel{\text{Korollar 3.33}}{=} 0 = \int_{U \cap \partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma,$$

da  $\operatorname{supp}(F) \cap \partial\Omega = \emptyset$ .

2. Fall:  $p \in \partial\Omega$ . Nach dem Satz von der impliziten Funktion (vgl. Mathe II) existiert (nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Umgebung  $U' \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$  von  $p' = (p_1, \dots, p_{N-1})$ , eine Intervallumgebung  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  von  $p_N$  und  $g \in C^1(U', I)$  mit

$$\partial\Omega \cap U = \operatorname{Graph} g = \{(y, g(y)) \mid y \in U'\} \quad \text{für } U := U' \times I.$$

O.E. gelte ferner  $U \cap \Omega = \{(y, t) \mid y \in U', a < t < g(y)\}$ . Sei nun zunächst  $f \in C_c^1(U, \mathbb{R})$  gegeben. Dann gilt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{U \cap \Omega} \partial_N f = \int_{U'} \int_a^{g(y)} \partial_t f(y, t) dt dy = \int_{U'} f(y, g(y)) dy,$$

weil  $f(y, a) = 0$  gilt. Ist ferner  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  und  $k \in C_c^1(U', \mathbb{R})$  definiert durch  $k(y) = \int_a^{g(y)} f(y, t) dt$ , so gilt

$$\partial_i k(y) = f(y, g(y)) \partial_i g(y) + \int_a^{g(y)} \partial_i f(y, t) dt \quad (\text{Siehe Übung Mathe II}).$$

Da nach Lemma 3.32 ferner  $\int_{U'} \partial_i k(y) dy = 0$  gilt, folgt

$$\int_{\Omega \cap U} \partial_i f = \int_{U'} \int_a^{g(y)} \partial_i f(y, t) dt dy = - \int_{U'} f(y, g(y)) \partial_i g(y) dy.$$

Für  $F \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N)$  folgt somit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap U} \operatorname{div} F &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega \cap U} \partial_i F_i \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} \int_{U'} F_i(y, g(y)) \partial_i g(y) dy + \int_{U'} F_N(y, g(y)) dy \\ &= \int_{U'} \left\langle F(y, g(y)), \begin{pmatrix} -\nabla g(y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dy \\ &\stackrel{\text{Bemerkung und Beispiel 3.23(d)}}{=} \int_{U'} \langle F(y, g(y)), \nu(y, g(y)) \rangle \sqrt{1 + |\nabla g(y)|_2^2} dy \\ &= \int_{U \cap \partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma, \end{aligned}$$

wie behauptet. Hier haben wir verwendet, dass die Gramsche Determinante zu Parametrisierung  $\psi: U' \rightarrow U \cap \partial\Omega$ ,  $y \mapsto (y, g(y))$  gegeben ist durch  $y \mapsto 1 + |\nabla g(y)|_2^2$  (vgl. Beispiel 3.19).  $\square$

*Beweis von Satz 3.27.* Sei  $\bar{\Omega}$  ein Kompaktum mit  $C^1$ -Rand. Nach Satz 3.34 und aufgrund der Kompaktheit von  $\bar{\Omega}$  existieren offene Mengen  $U_1, \dots, U_k$  mit  $\bar{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \subseteq V$  und derart, dass für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  und alle  $f \in C_c^1(U_i, \mathbb{R}^N)$  gilt:

$$(3.12) \quad \int_{\Omega \cap U_i} \operatorname{div} f = \int_{U_i \cap \partial\Omega} \langle f, \nu \rangle d\sigma.$$

Sei  $\{\eta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  eine den Mengen  $U_1, \dots, U_k$  untergeordnete Zerlegung der Eins, so dass  $\eta_j \in C_c^\infty(U_{\kappa(j)})$  gilt. Sei ferner  $F \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$  und sei  $F^j \in C_c^1(U_{\kappa(j)}, \mathbb{R}^N)$  definiert durch  $F^j = \eta_j F$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $F$  über  $\bar{\Omega}$  integrierbar und  $\langle F, \nu \rangle$  über die Untermannigfaltigkeit  $\partial\Omega$  integrierbar, da diese Funktionen dort stetig sind und die Mengen kompakt sind. Es gilt wegen (3.12):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F^j = \int_{\Omega \cap U_{\kappa(j)}} \operatorname{div} F^j = \int_{U_{\kappa(j)} \cap \partial\Omega} \langle F^j, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle F^j, \nu \rangle d\sigma.$$

Da  $F$  auf  $\bigcup_{i=1}^k U_i$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} F^j$  übereinstimmt, folgt nun mit dem Satz von Lebesgue auf  $\Omega$  und auf  $\partial\Omega$  (Übung!)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} \operatorname{div} F^j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega} \langle F^j, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma. \quad \square$$

### 3.1 Der klassische Integralsatz von Stokes

Im Folgenden betrachten wir spezielle Mengen in  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung 3.35.** Ist  $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , so gilt  $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$  und folglich gilt für jedes  $C^1$ -berandete Kompaktum  $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$  nach Satz 3.27

$$\int_{\partial\Omega} \langle \operatorname{rot} f, \nu \rangle d\sigma = 0.$$

Zu beachten ist hierbei, dass  $\partial\Omega$  zwar eine lokal 2-dimensionale Fläche ist, aber keinen „Rand“ besitzt. Im Folgenden wollen wir Flächen untersuchen, die einen solchen „Rand“ besitzen.

**Definition 3.36** (Spezialfall einer berandeten Fläche). Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $\psi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$  eine Parametrisierung und  $\bar{G} \subseteq U$  ein  $C^1$ -berandetes Kompaktum, so dass  $\partial G$  das Bild einer Kurve  $\gamma \in C^1([a, b], U)$  mit folgenden Eigenschaften ist:

- (i)  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ ,
- (ii)  $\gamma|_{[a,b]}$  ist injektiv und  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,
- (iii)  $\gamma$  durchläuft den Rand von  $G$  gegen den Uhrzeigersinn, d.h.  $\frac{(\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t))}{|\dot{\gamma}(t)|_2}$  entspricht dem äußeren Einheitsnormalenvektor an  $G$  im Punkt  $\gamma(t) \in \partial G$ .

Dann ist offensichtlich  $\gamma|_{(a,b)}$  eine Parametrisierung von  $\partial G \setminus \{\gamma(a)\}$ . Das Bild  $M := \psi(\overline{G})$  heißt *Fläche in  $\mathbb{R}^3$  mit orientiertem Rand*, und man bezeichnet mit  $\partial M := \psi(\partial G)$  den *Rand von  $M$* , eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (weil  $\partial G$  eine solche ist). Die Kurve  $\psi \circ \gamma|_{(a,b)}$  ist eine Parametrisierung von  $\partial M \setminus \{\psi(\gamma(a))\}$ . Man beachte, dass hier  $\partial M$  nicht topologisch zu verstehen ist (dann wäre  $\partial M = \overline{M}$ ) sondern im Sinne der Theorie der Untermannigfaltigkeiten.

**Satz 3.37.** *Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.36 sei  $M$  eine Fläche mit orientiertem Rand. Ferner betrachten wir auf  $M$  das Einheitsnormalenfeld*

$$\nu: M \rightarrow S^2, \quad \nu(p) := \frac{\partial_1 \psi(x) \times \partial_2 \psi(x)}{|\partial_1 \psi(x) \times \partial_2 \psi(x)|_2} \quad \text{für } x = \psi^{-1}(p).$$

Dann gilt für jede offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $M \subseteq V$  und jedes Vektorfeld  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$

$$(3.13) \quad \int_M \langle \text{rot } f, \nu \rangle d\sigma = \int_{\psi \circ \gamma} f =: \int_{\partial M} \langle f, \tau \rangle ds,$$

wobei  $\tau$  den Tangentenvektor der Randkurve  $\psi \circ \gamma$  bezeichne.

**Bemerkung 3.38.**

- (a) Der Ausdruck  $\int_{\psi \circ \gamma} f$  ist das Kurvenintegral des Feldes  $f$  längs  $\psi \circ \gamma$ .
- (b) Nach Wahl von  $\gamma$ , liegt die Menge  $G$  stets links von einem Betrachter, der sich entlang  $\gamma$  auf dem Rand von  $G$  bewegt.
- (c) Satz 3.37 gilt allgemeiner für  $C^1$ -berandete *orientierbare* zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten  $M$  des  $\mathbb{R}^3$ , d.h. falls auf  $M$  ein ENF existiert. Dies ist nicht immer gegeben; z.B. besitzt das *Möbiusband* kein ENF.
- (d) In der Theorie der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten wird der *allgemeine Satz von Stokes* bewiesen, welcher keine Einschränkung der Raumdimensionen, weniger Differenzierbarkeit (statt  $\psi \in C^2$ ) und schwächere Eigenschaften von  $\partial M$  voraussetzt.

Wir benötigen für den Beweis folgendes Lemma

**Lemma 3.39.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $\psi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $\psi(U) \subseteq V$  und  $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt*

$$\langle (\text{rot } f) \circ \psi, \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi \rangle = \partial_1 \langle f \circ \psi, \partial_2 \psi \rangle - \partial_2 \langle f \circ \psi, \partial_1 \psi \rangle \quad \text{auf } U.$$

*Beweis.* Nachrechnen. □

*Beweis von Satz 3.37.* Unter den Voraussetzungen und der Wahl der Parametrisierung  $\psi$  gilt

$$g_\psi = |\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi|_2^2.$$

Ferner ist das äußere ENF von  $G$  gegeben durch

$$\mu = \mu(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|_2} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $g_\gamma(t) = |\dot{\gamma}(t)|_2^2$ . Wir setzen  $\alpha := \psi \circ \gamma$ . Es folgt mit dem Satz von Gauß (Satz 3.27) und Lemma 3.39

$$\begin{aligned} \int_M \langle \operatorname{rot} f, \nu \rangle d\sigma &= \int_G \left\langle (\operatorname{rot} f) \circ \psi, \frac{\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi}{|\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi|_2} \right\rangle |\partial_1 \psi \times \partial_2 \psi| \\ &= \int_G \langle (\operatorname{rot} f) \circ \psi, \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi \rangle = \int_G (\partial_1 \langle f \circ \psi, \partial_2 \psi \rangle - \partial_2 \langle f \circ \psi, \partial_1 \psi \rangle) \\ &= \int_G \operatorname{div} \begin{pmatrix} \langle f \circ \psi, \partial_2 \psi \rangle \\ -\langle f \circ \psi, \partial_1 \psi \rangle \end{pmatrix} = \int_{\partial G} \left\langle \begin{pmatrix} \langle f \circ \psi, \partial_2 \psi \rangle \\ -\langle f \circ \psi, \partial_1 \psi \rangle \end{pmatrix}, \mu \right\rangle d\sigma \\ &= \int_a^b \left( \langle f \circ \alpha, \partial_2 \psi \circ \gamma \rangle \frac{\dot{\gamma}_2}{|\dot{\gamma}|_2} + \langle f \circ \alpha, \partial_1 \psi \circ \gamma \rangle \frac{\dot{\gamma}_1}{|\dot{\gamma}|_2} \right) |\dot{\gamma}|_2 \\ &= \int_a^b \langle f \circ \alpha, \dot{\alpha} \rangle = \int_\alpha f, \end{aligned}$$

wie behauptet. □



# 4 Funktionentheorie

## 4.1 Erinnerung an die komplexen Zahlen

**Definition 4.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  mit der Addition und Multiplikation:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

für  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\mathbb{R}^2$  ein kommutativer Körper mit Nullelement  $0 := (0, 0)$  und Einselement  $1 := (1, 0)$  (Nachrechnen!). Wir nennen ihn den *Körper der komplexen Zahlen* (oder auch die *komplexe Zahlenebene*) und bezeichnen ihn mit  $\mathbb{C}$ . Das Einselement ist der erste kanonische Basisvektor von  $\mathbb{R}^2$ . Den zweiten kanonischen Basisvektor bezeichnen wir mit  $i := (0, 1)$  und nennen ihn die *imaginäre Einheit*. Mit obigen Multiplikationsregeln folgt sofort  $i^2 = i \cdot i = -1$  (nachrechnen!). Wir schreiben die Elemente von  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  in der Regel als reelle Linearkombinationen der kanonischen Basisvektoren, also  $a + bi = a + ib = (a, b)$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann folgt  $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ .

Der reelle Körper  $\mathbb{R}$  ist als der Untervektorraum  $\mathbb{R} \times \{0\}$  in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  eingebettet. Wir werden später zeigen, dass  $\mathbb{C}$  der kleinste **algebraisch** vollständige Körper ist, der  $\mathbb{R}$  als Unterkörper enthält. Diese Tatsache ist einer der Gründe, die komplexen Zahlen einzuführen.

**Definition 4.2.** Für  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  sei

- (a)  $\operatorname{Re}(z) := a$  der *Realteil* von  $z$ ,  $\operatorname{Im}(z) := b$  der *Imaginärteil* von  $z$ ,
- (b)  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  der *Betrag* von  $z$  (ist dasselbe wie die Euklidische Norm  $|(a, b)|_2$ ),
- (c)  $\bar{z} := a - ib$  die zu  $z$  *konjugiert komplexe Zahl*. Die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  heißt *komplexe Konjugation*.

Außerdem verwenden wir den Begriff

- (d)  $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , die *punktierte komplexe Zahlenebene*.

**Bemerkung 4.3.** Der Körper  $\mathbb{C}$  ist **nicht** angeordnet, denn in jedem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  ist  $x^2 + y^2 > 0$  für  $x, y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , während in  $\mathbb{C}$  z.B.  $1^2 + i^2 = 0$  gilt. Das Symbol „ $<$ “ ergibt also nur für reelle Zahlen Sinn.

**Satz 4.4.** Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

- (a)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- (b)  $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ ,  $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$
- (c)  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,  $\overline{\bar{z}} = z$
- (d)  $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$
- (e)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- (f)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- (g)  $|z+w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)
- (h)  $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Außerdem sind die Körperverknüpfungen  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und die Abbildungen  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ ,  $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  und  $z \mapsto |z|$  stetig.

*Beweis.* (a)–(h) folgen unmittelbar aus den Definitionen und wurden in Mathe I bewiesen. Wir verwenden die Norm  $\|(z, w)\| := |z| + |w|$  (Erinnerung: alle Normen in  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$  sind äquivalent). Es folgt für  $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ :

$$|(z_1 + w_1) - (z_2 + w_2)| \leq |z_1 - z_2| + |w_1 - w_2| = \|(z_1, w_1) - (z_2, w_2)\|$$

und

$$|z_1 w_1 - z_2 w_2| \leq |z_1| |w_1 - w_2| + |w_2| |z_1 - z_2| \leq \max\{|z_1|, |w_2|\} \|(z_1, w_1) - (z_2, w_2)\|.$$

Das zeigt die lokale Lipschitz-Stetigkeit der Körperverknüpfungen.  $\operatorname{Re}$  und  $\operatorname{Im}$  sind die reell linearen Koordinatenprojektionen in  $\mathbb{R}^2$  und somit stetig.  $\bar{z} = z - 2i \operatorname{Im}(z)$  zeigt, dass  $z \mapsto \bar{z}$  stetig ist. Die Stetigkeit von  $z \mapsto |z|$  folgt aus (h).  $\square$

**Bemerkung 4.5.** (a) Aus Satz 4.4 folgt

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{und} \quad \overline{\left( \frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0.$$

(b) Für  $z \in \dot{\mathbb{C}}$  gilt  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

(c) Aus Satz 4.4(g) und (h) folgt  $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$  für  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Definition 4.6.** (a) Für  $z \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$  sei

$$\begin{aligned} B_r(z) &:= \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\} && \text{(offene } r\text{-Kreisscheibe um } z) \\ \bar{B}_r(z) &:= \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\} && \text{(abgeschlossene } r\text{-Kreisscheibe um } z). \end{aligned}$$

(b) Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{C}$  heißt *beschränkt*, falls  $R > 0$  existiert mit  $M \subseteq B_R(0)$ .

**Satz 4.7.** Sind  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq w$ , so ist  $B_\varepsilon(z) \cap B_\varepsilon(w) = \emptyset$  für  $\varepsilon \in (0, \frac{|z-w|}{2}]$ .

*Beweis.* Siehe Mathe I. □

**Definition 4.8.** Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$  eine Folge. Für  $z, z_0 \in \mathbb{C}$  bezeichnen wir eine Reihe der Gestalt

$$(4.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Potenzreihe und nennen  $z_0$  *Entwicklungspunkt*. Wir definieren den *Konvergenzradius* der Potenzreihe:

$$(4.3) \quad \rho := \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Hierbei verwenden wir die Konvention  $\frac{1}{\infty} := 0$  und  $\frac{1}{0} := \infty$ .

**Satz 4.9.** Seien  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$  eine Folge,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $\rho$  der Konvergenzradius der formalen Reihe  $p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ . Dann gilt:

- (a) Für alle  $r \in [0, \rho)$  konvergiert  $p(z)$  absolut gleichmäßig auf  $\overline{B_r(z_0)}$  und die Abbildung  $p: \overline{B_r(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$  ist gleichmäßig stetig.
- (b) Für alle  $z \in B_\rho(z_0)$  konvergiert  $p(z)$  absolut und die Abbildung  $p: B_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.
- (c) Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\rho(z_0)}$  divergiert  $p(z)$ .
- (d) Für  $z \in \partial B_\rho(z_0)$  kann keine allgemeingültige Aussage über die Konvergenz der Reihe  $p(z)$  gemacht werden.

*Beweis.* Siehe Mathe I. □

**Definition 4.10.** (a) Wir definieren die komplexe Exponentialfunktion als

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

denn diese Reihe hat den Konvergenzradius  $\infty$ . Wir schreiben auch  $e^z$  anstelle von  $\exp(z)$ .

(b) Wir definieren die Sinus- und Kosinusfunktion auf  $\mathbb{C}$  als

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin(z) &:= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos(z) &:= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

**Satz 4.11.** (a) Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ .

(b) Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Im Spezialfall  $z = \varphi \in \mathbb{R}$  nennt man diese Beziehung die Eulersche Formel. Insbesondere ist  $|e^{i\varphi}| = 1$  für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

(c) Aus (a) und (b) folgt für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^z,$$

d.h. die Funktion  $\exp$  ist  $2\pi i$ -periodisch.

*Beweis.* Siehe Mathe I. □

**Bemerkung 4.12** (Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen). Für jedes  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  existiert **genau ein**  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  und  $r > 0$  mit  $z = re^{i\varphi}$ . Dabei ist  $|z| = r$  und

$$\varphi = \text{Arg}(z) := \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{|z|}\right), & \text{für } b \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{a}{|z|}\right), & \text{für } b < 0, \end{cases}$$

heißt der *Hauptwert des Arguments*. Insbesondere folgt, dass für jedes  $r > 0$  die Abbildung

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\} \rightarrow (-\pi, \pi], \quad z \mapsto \text{Arg}(z)$$

bijektiv ist.

## 4.2 Holomorphe Funktionen und Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

**Definition 4.13.** Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $z_0 \in G$ , so heißt  $f$  (*komplex*) *differenzierbar in  $z_0$* , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet und heißt *komplexe Ableitung von  $f$  in  $z_0$* .

**Bemerkung 4.14.** Aufgrund der Identifikation von  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  können wir eine Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auch als Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  interpretieren. Ist die Abbildung  $f = (u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  **total** differenzierbar in einem Punkt  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , so gilt

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}.$$

Hier schreiben wir  $u_x$  anstelle von  $\partial_1 u$  und  $u_y$  anstelle von  $\partial_2 u$  und entsprechend für  $v$ . Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen „ $f$  ist komplex differenzierbar“ und „ $f$  ist total differenzierbar“ untersuchen.

**Definition 4.15.** Eine Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *komplex linear*, wenn  $T$  bezüglich des Skalkörpers  $\mathbb{C}$  linear auf dem komplexen Vektorraum  $\mathbb{C}$  ist, d.h. wenn  $T[z + \lambda w] = Tz + \lambda Tw$  für alle  $z, w, \lambda \in \mathbb{C}$  gilt. Insbesondere ist dann  $T$  auch *reell linear*, d.h. linear bezüglich des Skalkörpers  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 4.16.**

(a) Ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so ist die Ableitung  $df(a)$  reell linear für alle  $a \in \mathbb{R}^2$ .

(b) Die komplexe Konjugation ist reell linear, denn für alle  $r \in \mathbb{R}$  und  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\overline{z + r \cdot w} = \bar{z} + \overline{r \cdot w} = \bar{z} + \bar{r} \cdot \bar{w} = \bar{z} + r\bar{w}.$$

Es gilt aber für  $z \in \mathbb{C}$ :  $\overline{\bar{z}} = z \neq -i\bar{z} = i\bar{z}$ , d.h. die komplexe Konjugation ist nicht komplex linear.

Beachten Sie bitte die nachträgliche Ergänzung (Periodizität von  $\exp$ ) in Satz 4.11(c).

**Lemma 4.17.** *Es sei  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reell lineare Abbildung. Dann sind äquivalent*

- (i)  $T$  ist komplex linear;
- (ii)  $Ti = iT1$ ;
- (iii) Es existiert ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $Tw = zw$  für alle  $w \in \mathbb{C}$ .

*Insbesondere ist  $T$  als lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Drehstreckung, d.h.  $T = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  mit  $r \in [0, \infty)$  und  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ .*

*Beweis.* Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) sind offensichtlich. Wir zeigen (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei  $z := T1$ . Es folgt für  $w = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$zw = az + ibz = aT1 + iT1 = aT1 + bTi = T[a + ib] = Tw.$$

Schließlich sei  $z = re^{i\varphi}$  mit  $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi]$  gemäß Bemerkung 4.12. Es folgt

$$zw = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)(a + ib) = r((a \cos \varphi - b \sin \varphi) + i(a \sin \varphi + b \cos \varphi)),$$

also die letzte Behauptung. □

**Satz 4.18.** *Es seien  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ . Sei ferner  $u := \operatorname{Re}(f)$  und  $v := \operatorname{Im}(f)$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.
- (ii)  $f$  ist in  $z_0$  total differenzierbar **und** das totale Differential  $df(z_0): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathbb{C}$ -linear.

(iii)  $f$  ist in  $z_0$  total differenzierbar **und** es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0), \\ v_x(z_0) &= -u_y(z_0). \end{aligned}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt

$$df(z_0)z = f'(z_0)z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0) \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Durch  $Th = f'(z_0)h$  für  $h \in \mathbb{C}$  wird eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung definiert und es gilt:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Th|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| = 0.$$

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: Da  $T := df(z_0)$   $\mathbb{C}$ -linear ist, existiert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $Th = \lambda h$  für alle  $h \in \mathbb{C}$ . Nach Voraussetzung gilt dabei

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Th|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \lambda \right|.$$

Es folgt also, dass  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar ist mit  $f'(z_0) = \lambda$ .

„(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)“  $T := df(z_0)$  wird dargestellt durch die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die  $1 \in \mathbb{C}$  mit der Darstellung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $i \in \mathbb{C}$  mit der Darstellung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$T1 = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) \\ v_x(z_0) \end{pmatrix} = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$$

und somit  $iT1 = -v_x(z_0) + iu_x(z_0)$  und

$$Ti = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y(z_0) \\ v_y(z_0) \end{pmatrix} = u_y(z_0) + iv_y(z_0).$$

Folglich gilt:

$$(4.4) \quad \Leftrightarrow \quad Ti = iT1 \quad \stackrel{\text{Lemma 4.17}}{\Leftrightarrow} \quad T \text{ ist komplex linear.} \quad \square$$

**Beispiel 4.19.** (a) Die komplexe Konjugation ist in keinem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar: Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$ . Dann gilt  $f(x + iy) = x - iy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ , also  $u(x, y) = \text{Re}(f)(x, y) = x$  und  $v(x, y) = \text{Im}(f)(x, y) = -y$ . Es ist dann  $u_x = 1 \neq -1 = v_y(x, y)$ . Folglich sind die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für kein  $z \in \mathbb{C}$  erfüllt und somit ist  $f$  nirgendwo komplex differenzierbar.

- (b) Die Abbildung  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$  und  $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$  sind nirgendwo in  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar (Übung).

**Lemma 4.20.** *Es seien  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$  Abbildungen, welche komplex differenzierbar in  $z_0 \in G$  sind. Dann gilt:*

- (a)  $f$  und  $g$  sind stetig in  $z_0$ .  
 (b)  $f + g$  ist komplex differenzierbar in  $z_0$  mit  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$ .  
 (c) Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist  $\lambda f$  komplex differenzierbar in  $z_0$  mit  $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$ .  
 (d)  $f \cdot g$  ist komplex differenzierbar in  $z_0$  mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

- (e) Ist  $g(z_0) \neq 0$ , so ist die Abbildung  $\frac{f}{g}: \{z \in G \mid g(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

- (f) Ist  $H \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge mit  $f(G) \subseteq H$ ,  $h: H \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung so dass  $h$  komplex differenzierbar in  $h(f(z_0))$  ist, dann ist  $h \circ f: G \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und es gilt

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0).$$

*Beweis.* Wie in Mathe I. □

**Definition 4.21.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer. Eine Abbildung  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph*, wenn sie in jedem Punkt  $z \in G$  komplex differenzierbar ist. Eine in ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion heißt *ganze Funktion*.

**Satz 4.22.** *Seien  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$  und  $\rho > 0$  der zugehörige Konvergenzradius. Sei ferner  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $f: B_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ . Dann gilt:*

- (a)  $f$  ist holomorph in  $B_\rho(z_0)$  und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \quad \text{für } z \in B_\rho(z_0).$$

- (b)  $f$  ist auf  $B_\rho(z_0)$  beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ .

*Beweis.* Zu (a): Ohne Einschränkungen sei  $z_0 = 0$ . Nach Mathe I besitzt die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  ebenfalls den Konvergenzradius  $\rho$ . Sei nun  $B := B_\rho(0)$  und  $p \in B$  und

$$h_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{definiert durch} \quad h_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2}p + \dots + zp^{n-2} + p^{n-1}.$$

Für  $s \in (|p|, \rho)$  und  $z \in \overline{B_s(0)}$  gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n h_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n s^{n-1} < \infty.$$

Somit konvergiert die Funktionenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n$  gemäß Satz 4.9 gleichmäßig auf  $\overline{B_s(0)}$  gegen eine stetige Funktion  $h: \overline{B_s(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ . Es folgt also für  $z \in \overline{B_s(0)}$ :

$$f(z) - f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (z^k - p^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (z - p) h_k(z) = (z - p) h(z).$$

Somit existiert

$$f'(p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = \lim_{z \rightarrow p} h(z) = h(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n p^{n-1}$$

wie behauptet.

(b) folgt nun durch wiederholte Anwendung von (a). □

**Bemerkung 4.23.** Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  wird auch *analytisch* genannt, wenn es zu jedem  $z_0 \in U$  ein  $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial U)]$  gibt, so dass  $f$  in  $B_r(z_0)$  durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  dargestellt werden kann (und somit beliebig oft differenzierbar ist). Die Aussage von Satz 4.22 liefert, dass analytische Funktionen auch holomorph sind. Die folgenden Abschnitte werden sich damit beschäftigen, zu zeigen, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist, also lokal als Reihe geschrieben werden kann und somit beliebig oft differenzierbar ist.

**Beispiel 4.24.** (a) Alle komplexen Polynome sind in  $\mathbb{C}$  holomorph. Eine rationale Funktion  $f = \frac{P}{Q}$  für zwei komplexe Polynome  $P, Q$  ist holomorph in  $\mathbb{C} \setminus N_Q$ , wobei  $N_Q = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$  die Nullstellenmenge von  $Q$  ist.

(b)  $\exp, \sin, \cos, \sinh$  und  $\cosh$  sind nach Satz 4.22 holomorph in  $\mathbb{C}$ . Die Ableitungen haben dieselbe Form wie aus der reellen Analysis bekannt.

(c) Die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$  für  $z \neq 0$  und  $f(0) = 0$  ist holomorph in  $\dot{\mathbb{C}}$ , aber sie ist **nicht** komplex differenzierbar in 0. Es gilt jedoch:  $f|_{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})!$  (Übung).

**Definition und Satz 4.25.** Seien  $a < b$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann sind  $\text{Re } f$  und  $\text{Im } f$  auch stetig. Wir definieren das Riemann-Integral von  $f$  über  $I$  als

$$\int_a^b f := \int_a^b \text{Re } f + i \int_a^b \text{Im } f.$$

Es hat die folgenden Eigenschaften:



(a) Die Abbildung  $C([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto \int_a^b f$ , ist komplex linear.

(b) 
$$\overline{\int_a^b f} = \int_a^b \bar{f}.$$

(c) Es gelten die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, genauso wie für reellwertige Funktionen.

(d) Ist  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig differenzierbar (per definitionem impliziert dies Stetigkeit), so gilt für eine stetige Funktion  $g: \psi([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\int_a^b (g \circ \psi)\psi' = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g.$$

(e) 
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Beweis.* Die Paragraphen (a)–(d) beweist man mit den entsprechenden Resultaten für reellwertige Funktionen, angewendet auf Real- und Imaginärteil. Wir zeigen (e): Der Fall  $\int_a^b f = 0$  ist trivial. Für  $\int_a^b f \neq 0$  sei  $\varphi := -\text{Arg}\left(\int_a^b f\right)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= e^{i\varphi} \left| \int_a^b f \right| e^{-i\varphi} = e^{i\varphi} \int_a^b f = \text{Re} \left( e^{i\varphi} \int_a^b f \right) \\ &= \int_a^b \text{Re} (e^{i\varphi} f) \leq \int_a^b |e^{i\varphi} f| = \int_a^b |f|. \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 4.26.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer und  $\gamma: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$  eine stetige Abbildung, auch *Weg* genannt.

(a) Wir definieren  $|\gamma| := \gamma([a, b])$  als die *Spur von  $\gamma$* .

(b)  $\gamma$  heißt *Integrationsweg*, wenn  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar ist, d.h. wenn eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  von  $[a, b]$  existiert derart, dass  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  stetig differenzierbar ist für  $k = 1, \dots, m$ .

(c) Ist  $\gamma$  ein Integrationsweg wie in (b), so setzen wir

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (\text{Länge von } \gamma)$$

Ist ferner  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so definieren wir das (*komplexe*) *Wegintegral von  $f$  längs  $\gamma$*  durch

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Man kann nachweisen, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zerlegung.

(d) Wir nennen einen Weg  $\gamma$  *geschlossen*, falls  $\gamma(b) = \gamma(a)$  gilt.

**Beispiel 4.27.**

(a) Die *Verbindungsstrecke*  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := (1 - t)z + tw$  zwischen zwei Punkten  $z, w \in \mathbb{C}$  ist ein Integrationsweg. Man schreibt auch  $[z, w]$  anstelle von  $\gamma$  bzw.  $|\gamma|$  für den Weg  $\gamma$ . Es gilt  $\dot{\gamma}(t) = w - z$  für  $t \in [0, 1]$  und

$$\int_{[z,w]} dx = \int_0^1 (w - z) dt = w - z \quad \text{und} \quad L([z, w]) = \int_0^1 |w - z| dt = |w - z|.$$

(b) Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  und  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\gamma(t) = a + re^{it}$ . Dann ist  $\gamma$  ein geschlossener Integrationsweg und es gilt  $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$ , also  $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$ . Ferner gilt für  $n \in \mathbb{Z}$  wegen Satz 4.11(c):

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq -1, \\ i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Im Falle dieses speziellen Kreisweges schreiben wir anstatt  $\int_{\gamma}$  im Folgenden auch  $\int_{\partial B_r(a)}$ . Also insbesondere  $\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ .

(c) Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Integrationsweg in  $\mathbb{C}$ , so dass  $|\gamma| = \partial U$  gilt, dann sagen wir auch,  $\gamma$  *durchläuft  $\partial U$  in positivem Sinne* oder  $\gamma$  ist ein *positiv orientierter Randweg*, wenn  $U$  im Sinne der Laufrichtung von  $\gamma$  immer nur links von  $\gamma$  liegt, d.h. dass bis auf endlich viele  $t \in [a, b]$  jeweils  $\gamma(t) + \varepsilon i \dot{\gamma}(t) \in U$  und  $\gamma(t) - \varepsilon i \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{C} \setminus U$  für hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  gilt. Dies trifft insbesondere auf  $\gamma$  aus (b) als Randweg von  $B_r(a)$  zu.

**Satz 4.28** (Zusammenhang zwischen dem reellen und dem komplexen Kurvenintegral). *Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetig differenzierbarer Weg und sei  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Seien ferner  $u := \operatorname{Re}(f)$  und  $v := \operatorname{Im}(f)$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix},$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite reelle Kurvenintegrale im Sinne der Mathe II sind. Dabei fassen wir  $\gamma$  als Kurve in  $\mathbb{R}^2$  auf.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((f \circ \gamma)\dot{\gamma}) &= (u \circ \gamma) \operatorname{Re} \dot{\gamma} - (v \circ \gamma) \operatorname{Im} \dot{\gamma}, \\ \operatorname{Im}((f \circ \gamma)\dot{\gamma}) &= (u \circ \gamma) \operatorname{Im} \dot{\gamma} + (v \circ \gamma) \operatorname{Re} \dot{\gamma} \end{aligned}$$

und  $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \dot{\gamma} \\ \operatorname{Im} \dot{\gamma} \end{pmatrix}$ . □

**Satz und Definition 4.29.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg. Dann gilt:

- (a) Die Abbildung  $C(|\gamma|, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto \int_{\gamma} f$ , ist komplex linear.
- (b) Für  $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$ ,  $t \in [a, b]$ , und  $f \in C(|\gamma|, \mathbb{C})$  gilt  $\int_{\gamma^{-1}} f = -\int_{\gamma} f$  und  $L(\gamma^{-1}) = L(\gamma)$ .
- (c) Ist  $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  ein weiterer Integrationsweg, so dass  $\eta(c) = \gamma(b)$  gilt, so ist  $\gamma \cdot \eta: [a, b + |d - c|] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Integrationsweg, definiert durch  $\gamma \cdot \eta(t) := \gamma(t)$  für  $t \in [a, b]$  und  $\gamma \cdot \eta(t) := \eta(t - b + c)$  für  $t \in (b, b + |d - c|]$ . Es gilt

$$\int_{\gamma \cdot \eta} h = \int_{\gamma} h + \int_{\eta} h,$$

für stetige Funktionen  $h: |\gamma| \cup |\eta| \rightarrow \mathbb{C}$ . Ferner gilt  $L(\gamma \cdot \eta) = L(\gamma) + L(\eta)$ .

- (d) Ist  $\Delta$  ein abgeschlossenes Dreieck in  $\mathbb{C}$ , d.h. die konvexe Hülle dreier Punkte  $z_0, z_1, z_2$ , so bezeichnen wir mit  $\partial\Delta$  den geschlossenen Dreiecksweg  $[z_0, z_1] \cdot [z_1, z_2] \cdot [z_2, z_0]$ , welcher den Rand von  $\Delta$  durchläuft.

*Beweis.* Leichte Übung. □

**Satz 4.30.** Sei  $\gamma$  ein Integrationsweg.

- (a) Für eine stetige Funktion  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  gilt

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \max_{|\gamma|} |f| \quad (\text{Standardabschätzung}).$$

- (b) Seien  $f_n: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  stetige Funktionen derart, dass die Folge  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann ist

$$\int_{\gamma} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n.$$

*Beweis.* Ähnlich zu den analogen Aussage in Mathe I bzw. Mathe II., unter Verwendung von Definition 4.26. □

**Definition 4.31.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Eine holomorphe Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  in  $U$ , falls  $F' = f$  ist.

**Definition 4.32.** Eine offene, nichtleere Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten  $z, w \in U$  ein Integrationsweg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  existiert mit  $\gamma(0) = z$  und  $\gamma(1) = w$ . In diesem Fall nennen wir  $U$  ein *Gebiet*.

**Satz 4.33.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt:

(a) Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein Integrationsweg, so gilt

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere gilt dann  $\int_{\gamma} f = 0$ , falls  $\gamma$  geschlossen ist.

(b) Ist  $U$  ein Gebiet, so unterscheidet sich jede weitere Stammfunktion von  $f$  nur um eine Konstante von  $F$ .

*Beweis.* Zu (a): Ohne Einschränkungen sei  $\gamma$  stetig differenzierbar (durch stückweises betrachten von  $\gamma$ ). Ist  $h := F \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , so gilt  $\dot{h} = (f \circ \gamma)\dot{\gamma}$ , also

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b (f \circ \gamma)\dot{\gamma} = h(b) - h(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Zu (b): Sei  $G: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Stammfunktion von  $f$  und sei  $z_0 \in U$  fest gewählt. Dann gilt für beliebiges  $z \in U$  mit einem Integrationsweg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  von  $z_0$  nach  $z$ :

$$F(z) - F(z_0) \stackrel{(a)}{=} \int_{\gamma} f = G(z) - G(z_0).$$

Es folgt (b). □

**Korollar 4.34.** Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f' \equiv 0$  auf  $G$ , so ist  $f$  konstant in  $G$ .

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 4.33(b), da 0 eine Stammfunktion von  $f'$  ist. □

**Definition 4.35.** Eine offene Menge  $G \subseteq \mathbb{C}$  heißt *Sterngebiet*, wenn es  $z_0 \in G$  gibt mit  $[z_0, z] \subseteq G$  für alle  $z \in G$ . In diesem Fall nennt man  $z_0$  auch ein *Sternzentrum* von  $G$  (vgl. Mathe II).

**Bemerkung und Beispiel 4.36.** (a) Jeder offene Ball  $B_r(a)$ ,  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  ist ein Sterngebiet und jeder Punkt  $z \in B_r(a)$  ist ein Sternzentrum.

(b) Jedes Sterngebiet in  $\mathbb{C}$  ist ein Gebiet.

(c) Die geschlitzte Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  ist ein Sterngebiet und jeder Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(z) = 0$  und  $\text{Re}(z) > 0$  ist ein Sternzentrum.

(d)  $\dot{\mathbb{C}}$  ist kein Sterngebiet, denn für jedes  $z_0 \in \dot{\mathbb{C}}$  ist  $[z_0, -z_0] \not\subseteq \dot{\mathbb{C}}$ .

Beachten Sie bitte die Ergänzung Beispiel 4.27(c), in der der Begriff *im positiven Sinne durchlaufener Rand* bzw. *positiv orientierter Randweg* erklärt wird.

**Satz und Definition 4.37.** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

(a) Äquivalent sind

(i)  $f$  besitzt eine Stammfunktion.

(ii)  $\int_{\gamma} f = 0$  für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\gamma$  in  $G$ .

Gilt dies, so nennen wir  $f$  integrabel (in  $G$ ).

(b) Ist  $G$  ein Sterngebiet, so ist  $f$  genau dann integrabel, wenn gilt:

$$(4.5) \quad \int_{\partial\Delta} f = 0 \quad \text{für alle } \Delta \subseteq G.$$

(c) *Erweitertes Lemma von Goursat: Ist  $G$  ein Sterngebiet und  $f$  holomorph, bis auf möglicherweise einen Punkt, dann gilt (4.5). Insbesondere ist  $f$  integrabel.*

### Beispiel 4.38.

(a) Ist  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ , so besitzt die Funktion  $\dot{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$  die Stammfunktion  $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$  auf  $\dot{\mathbb{C}}$ . Mit Satz 4.33 folgt nun  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$  für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\gamma$  in  $\dot{\mathbb{C}}$ . Insbesondere ist also  $\int_{\partial B_r(0)} z^n dz = 0$  für  $r > 0$ , wie bereits in Beispiel 4.27(b) berechnet.

(b) Die Funktion  $\dot{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist nicht integrabel in  $\dot{\mathbb{C}}$ , da  $\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$  für  $r > 0$  nach Beispiel 4.27(b).

*Beweis von Satz und Definition 4.37. (a): „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ folgt aus Satz 4.33.*

*„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei  $z_0 \in G$  beliebig. Zu  $z \in G$  existiert dann ein Integrationsweg  $\gamma$  von  $z_0$  nach  $z$ . Ist ferner  $\eta$  ein weiterer Integrationsweg von  $z_0$  nach  $z$ , so ist  $\gamma \cdot \eta^{-1}$  geschlossen und daher*

$$(4.6) \quad \int_{\gamma} f - \int_{\eta} f = \int_{\gamma \cdot \eta^{-1}} f = 0$$

nach Voraussetzung. Wir definieren nun  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $F(z) = \int_{\gamma} f$ , wobei  $\gamma$  ein beliebiger Integrationsweg von  $z_0$  nach  $z$  ist. Dann ist  $F$  aufgrund der durch (4.6) Unabhängigkeit der Wahl des Weges von  $z_0$  nach  $z$  wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Seien dazu  $z \in G$  fest und  $\delta > 0$  mit  $B_{\delta}(z) \subseteq G$  und  $\gamma$  ein Integrationsweg von  $z_0$  nach  $z$ . Für  $w \in B_{\delta}(z)$  ist dann  $\gamma \cdot [z, w]$  ein Integrationsweg von  $z_0$  nach  $w$ , also ist

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma \cdot [z, w]} f - \int_{\gamma} f = \int_{[z, w]} f = \int_{[z, w]} (f - f(z)) + f(z)(w - z)$$

und somit

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = |w - z|^{-1} \left| \int_{[z, w]} (f - f(z)) \right| \stackrel{\text{Satz 4.30(a)}}{\leq} \max_{[z, w]} |f - f(z)| \rightarrow 0$$

für  $w \rightarrow z$  aufgrund der Stetigkeit von  $f$  in  $z$ . Es folgt  $F'(z) = f(z)$  wie behauptet.

(b): Da jeder Dreiecksweg  $\partial\Delta$  in  $G$  geschlossen ist, folgt (4.5) aus der Integrabilität von  $f$ . Gelte umgekehrt (4.5) und sei  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $F(z) := \int_{[z_0, z]} f$ . Dann folgt ähnlich wie zuvor  $F' = f$  auf  $G$ .

(c): Wir präsentieren eine Beweisskizze. Für einen ausführlichen Beweis, siehe [14, Kap. III, Sätze 1.1 und 1.2]. Alle folgenden Dreieckswegen werden als Randwegen im positiven Sinn durchlaufen.

Sei zunächst  $f$  in  $G$  holomorph. Wir zerteilen  $\Delta_0 := \Delta$  in vier Teildreiecke  $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$  indem wir die Seitenmitten verbinden. Da die im Innern von  $\Delta_0$  liegenden neuen Seiten jeweils als Ränder zweier angrenzender Dreiecke in gegenläufigem Sinne durchlaufen werden, folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f \right| \leq 4 \max_k \left| \int_{\partial\Delta_1^k} f \right| = 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f \right|,$$

wo wir  $\Delta_1 \in \{\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4\}$  so ausgewählt haben, dass dort der maximale Absolutwert des Integrals angenommen wird. Nun verwenden wir  $\Delta_1$  als Ausgangsdreieck und wiederholen die Zerteilung. Sukzessive finden wir eine Folge  $\Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$  mit

$$(4.7) \quad \left| \int_{\partial\Delta} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f \right|$$

$$(4.8) \quad L(\partial\Delta_n) = 2^{-n} L(\partial\Delta).$$

Da  $\Delta$  kompakt ist und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \Delta_n = 0$  gilt, folgt  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}$  für ein  $z_0 \in \Delta$ . Die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z_0$  liefert eine stetige Funktion  $h: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h(z_0) = 0$  und  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0)$  für alle  $z \in G$ . In dieser Summe sind die ersten beiden Terme integrabel. Zusammen mit der Standardabschätzung folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta} f \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} h(z)(z - z_0) dz \right| && \text{wegen (4.7)} \\ &\leq 4^n L(\partial\Delta_n)^2 \max_{\Delta_n} |h| && \text{Standardabschätzung} \\ &= \max_{\Delta_n} |h| && \text{wegen (4.8)}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\Delta_n} |h| = 0$  folgt  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .

Nun erlauben wir, dass  $f$  in **einem**  $z_0 \in G$  nicht komplex differenzierbar, sondern lediglich stetig ist. Falls  $z_0$  ein Eckpunkt von  $\Delta$  ist, dann Zerteilen wir  $\Delta$  wie in Abb. 4.1. Es gilt dann nach dem ersten Teil  $\int_{\partial\Delta_2} f = \int_{\partial\Delta_3} f = 0$ , also  $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f$ . Da wir  $z_1$  und  $z_1'$  beliebig nahe an  $z_0$  wählen können, folgt aus der Standardabschätzung  $\int_{\partial\Delta} f = 0$ .

Falls  $z_0$  auf einer Seite von  $\Delta$  liegt, dann zerteilen wir  $\Delta$  wie in Abb. 4.2 angedeutet und wenden das vorige Ergebnis auf die entstandenen Dreiecke an. Und falls  $z_0$  im Innern von  $\Delta$  liegt, dann zerteilen wir  $\Delta$  wie in Abb. 4.3 angedeutet und wenden den vorangehenden Fall an.  $\square$

### 4.3 Der komplexe Logarithmus

Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge, so dass  $\exp|_U$  injektiv ist. Da die Exponentialfunktion  $2\pi i$ -periodisch ist, muss notwendigerweise  $U \neq \mathbb{C}$  gelten. Dann existiert die Umkehrfunktion  $g := \exp^{-1}$  auf  $V := \exp(U)$ . Falls  $V$  offen,  $g$  stetig und  $z_0 \in V$  ist, dann folgt

$$(4.9) \quad \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{\exp(g(z)) - \exp(g(z_0))} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\exp'(g(z_0))} = \frac{1}{\exp(g(z_0))} = \frac{1}{z_0}.$$

Es folgt  $g'(z) = 1/z$  in  $V$ . Dies liefert die Motivation, Umkehrungen der Exponentialfunktion als Stammfunktionen von  $1/z$  zu erhalten.

**Definition 4.39.** Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, so heißt eine holomorphe Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  *Zweig des Logarithmus (auf  $G$ )*, wenn  $\exp(g(z)) = z$  für alle  $z \in G$  gilt.

**Satz 4.40.** Seien  $G \subseteq \mathring{\mathbb{C}}$  und  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.

- (a) Ist  $g$  ein Zweig des Logarithmus auf  $G$ , so ist für  $k \in \mathbb{Z}$  auch  $z \mapsto g(z) + 2\pi i k$  ein Zweig des Logarithmus auf  $G$  und jeder Zweig des Logarithmus ist von dieser Form.
- (b)  $g$  ist genau dann ein Zweig des Logarithmus, wenn  $g$  auf  $G$  holomorph ist mit  $g'(z) = \frac{1}{z}$  für alle  $z \in G$  und  $\exp(g(a)) = a$  für mindestens ein  $a \in G$  gilt.
- (c) Auf  $G$  existiert genau dann ein Zweig des Logarithmus, wenn  $z \mapsto \frac{1}{z}$  in  $G$  integrierbar ist. Insbesondere existiert auf jedem in  $\mathring{\mathbb{C}}$  enthaltenen Sterngebiet ein Zweig des Logarithmus (nach Satz und Definition 4.37(c)). Auf  $\mathring{\mathbb{C}}$  existiert jedoch kein Zweig des Logarithmus (siehe Beispiel 4.38(b)).

*Beweis.* Zu (a): Für  $z \in G$  und  $k \in \mathbb{Z}$  ist

$$e^{g(z)+2\pi i k} = e^{g(z)} e^{2\pi i k} = e^{g(z)}.$$

Ist umgekehrt  $f$  ein weiterer Zweig des Logarithmus auf  $G$  und  $h := f - g$ , so ist  $\exp(h(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1$  für  $z \in G$ . Da  $G$  ein Gebiet und  $h$  stetig ist, folgt  $h(z) = 2\pi i k$  für ein festes  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $z \in G$ , d.h.  $f = g + 2\pi i k$  auf  $G$  (Übung!).

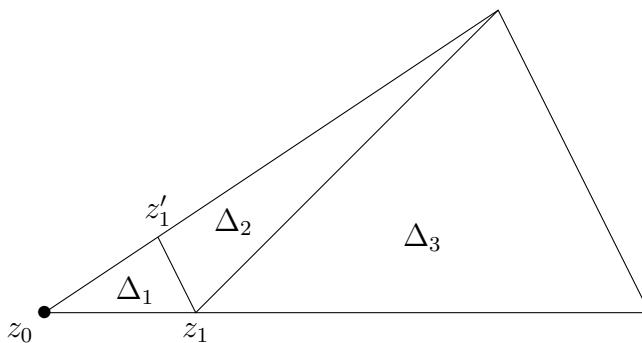


Abbildung 4.1: Zum Beweis von Satz und Definition 4.37(c)

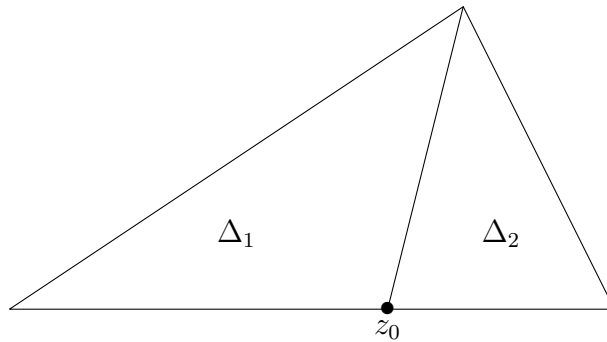


Abbildung 4.2: Zum Beweis von Satz und Definition 4.37(c)

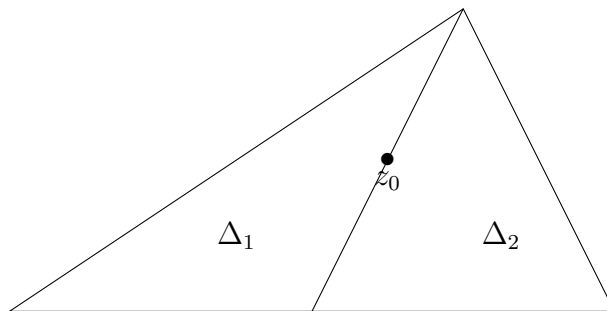


Abbildung 4.3: Zum Beweis von Satz und Definition 4.37(c)

Zu (b): „ $\Rightarrow$ “: Wegen  $\exp \circ g = \text{id}$  auf  $G$  ist  $g$  injektiv und die Aussage folgt aus (4.9).

„ $\Leftarrow$ “: Für  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := \frac{\exp(g(z))}{z}$ , gilt

$$f'(z) = \frac{\exp(g(z)) \overbrace{g'(z)z}^{=1} - \exp(g(z))}{z^2} = 0 \quad \text{für alle } z \in G,$$

also ist  $f$  konstant auf  $G$  nach Korollar 4.34. Ferner ist  $f(a) = 1$  für mindestens ein  $a \in G$  nach Voraussetzung. Also ist  $f \equiv 1$  auf  $G$  und somit  $\exp \circ g = \text{id}$  auf  $G$ .

Zu (c): „ $\Rightarrow$ “: Dies folgt aus (b).

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $f$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{z}$  auf  $G$ ,  $a \in G \setminus \{0\}$  beliebig und  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = \frac{a}{e^{f(a)}}$  gewählt — dies geht, weil  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$  surjektiv ist (Übung!). Für  $h = f + w: G \rightarrow \mathbb{C}$  gilt dann  $h'(z) = \frac{1}{z}$  für alle  $z \in G$  und  $\exp(h(a)) = a$ . Mit (b) folgt dann  $\exp \circ h = \text{id}$  auf  $G$ .  $\square$

**Definition 4.41.** Die Funktion  $\text{Log}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\text{Log}(z) := \log|z| + i \text{Arg}(z)$  heißt *Hauptwert des Logarithmus* (siehe Bemerkung 4.12 zur Definition der Argumentfunktion  $\text{Arg}$ ). Die Einschränkung von  $\text{Log}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  heißt *Hauptzweig des Logarithmus*.

**Beispiel 4.42.** Gesucht sind die Werte  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = 1 + i$ . Mit Satz 4.40(a) und der Definition des Hauptzweig des Logarithmus folgt  $z = \text{Log}(1 + i) + 2\pi ik$  für  $k \in \mathbb{Z}$  also ist die Lösungsmenge für diese Gleichung gegeben durch

$$\{\text{Log}(1 + i) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\log|1 + i| + i(2\pi k + \text{Arg}(1 + i)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



$$= \left\{ \log \sqrt{2} + i\pi \left( 2k + \frac{1}{4} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

denn  $|1 + i| = \sqrt{2}$  und  $\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ .

**Definition 4.43.** Wir definieren für  $z \in \dot{\mathbb{C}}$  und  $w \in \mathbb{C}$ :  $z^w := \{ \exp(w(\text{Log}(z) + 2\pi ik)) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ . Dabei heißt  $e^{w \text{Log}(z)}$  **Hauptwert** von  $z^w$ , und die Einschränkung des Hauptwertes auf  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  heißt *Hauptzweig* von  $z^w$ .

**Beispiel 4.44.** Es gilt  $i^i = \{ \exp(i(\text{Log}(i) + 2\pi ik)) \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ \exp(i(\log(1) + i\frac{\pi}{2}) - 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k} \mid k \in \mathbb{Z} \}$  und der Hauptwert von  $i^i$  ist  $e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

## 4.4 Der Cauchysche Integralsatz

**Satz 4.45** (Integralformeln von Cauchy). *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\overline{B}_r(z_0) \subseteq U$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.*

(a) Für jedes  $z \in B := B_r(z_0)$  gilt:

$$(4.10) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(b)  $f$  ist beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt für alle  $z \in B$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(4.11) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

*Beweis.* **(a):** Sei  $z \in B$  fest gewählt. Wir betrachten in  $U$  die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z. \end{cases}$$

Dann ist  $g$  in  $U$  stetig (da  $f$  in  $U$  komplex differenzierbar ist) und holomorph in  $U \setminus \{z\}$ . Aus Satz und Definition 4.37, angewendet in  $B_\rho(z_0)$  mit  $\overline{B}_r(z_0) \subseteq B_\rho(z_0) \subseteq U$ , folgt

$$0 = \int_{\partial B} g = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Es reicht also,

$$(4.12) \quad \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

zu zeigen. Dazu definieren wir für  $z \in B$

$$h(z) := \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Gemäß den Sätzen 2.16 und 4.18 ist  $h$  in  $B$  holomorph und es gilt

$$h'(z) = \int_{\partial B} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Da der Integrand im letzten Integral eine Stammfunktion besitzt, liefert Satz und Definition 4.37(a)  $h' \equiv 0$  in  $B$ . Wegen Korollar 4.34 ist  $h \equiv h(z_0)$ , und (4.12) folgt nun aus Beispiel 4.27(b).

**(b):** Wie oben dürfen wir in (4.10) unter dem Integral beliebig oft komplex differenzieren und erhalten die Formel (4.11).  $\square$

**Beispiel 4.46.** Manche komplexe Wegintegrale können mit der Formel von Cauchy direkt berechnet werden. Als Beispiel betrachten wir für  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ :

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z(1+z)} dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z} dz - \int_{\partial B_r(0)} \frac{\cos(\pi z)}{1+z} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } r \in (0, 1) \\ 4\pi i & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Dies folgt, da nach Satz 4.45(a) das erste Integral immer den Wert  $2\pi i \cos(\pi \cdot 0) = 2\pi i$  hat, und das zweite den Wert 0 für  $r < 1$  da der Integrand in  $B_1(0)$  holomorph ist, und den Wert  $2\pi i \cos(\pi \cdot (-1)) = -2\pi i$  für  $r > 1$ .

**Satz 4.47** (Satz von Morera). *Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann sind äquivalent:*

- (i)  $f$  ist holomorph.
- (ii)  $f$  ist lokal integrierbar, d.h. jeder Punkt  $z \in G$  besitzt eine offene Umgebung  $U \subseteq G$ , sodass  $f|_U$  integrierbar ist.

*Beweis.* „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Sei  $z \in G$  und  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(z) \subseteq G$ . Da  $U := B_\delta(z)$  ein Sterngebiet ist, ist  $f|_U$  integrierbar nach Satz und Definition 4.37(c).

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: Sei  $z \in G$  beliebig und  $U$  wie in (ii) gefordert, d.h. es existiert eine Stammfunktion  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f|_U$ . Nach Satz 4.45(b) ist  $F$  insbesondere zweimal komplex differenzierbar in  $U$ , also ist  $f$  komplex differenzierbar in  $U$ . Da  $z \in G$  beliebig war, ist  $f$  holomorph.  $\square$

**Korollar 4.48.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ferner sei  $f$  in  $U \setminus \{z_0\}$  holomorph. Dann ist  $f$  sogar in  $U$  holomorph.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz und Definition 4.37(c) und Satz 4.47.  $\square$

Korollar 4.48 kann durch mehrmalige Anwendung wie folgt verschärft werden:

**Satz 4.49** (Hebbarkeitssatz von Riemann). *Seien  $z_0$  ein Punkt in der offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Falls  $f$  in  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  für ein  $r > 0$  beschränkt ist, dann existiert eine holomorphe Fortsetzung von  $f$  auf ganz  $U$ .*

*Beweis.* Die Funktion

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z), & z \in U \setminus \{z_0\}, \\ 0, & z = z_0, \end{cases}$$

ist in  $U \setminus \{z_0\}$  holomorph. Außerdem ist  $F$  in  $z_0$  stetig, da  $f$  nahe bei  $z_0$  beschränkt ist. Nach Korollar 4.48 ist  $F$  in  $z_0$  komplex differenzierbar. Die Funktion

$$h(z) := \begin{cases} \frac{F(z)}{z - z_0}, & z \in U \setminus \{z_0\}, \\ F'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

ist also auch holomorph in  $U \setminus \{z_0\}$  und stetig in  $U$ . Wiederum liefert Korollar 4.48, dass  $h$  in  $U$  holomorph ist. Wegen  $h = f$  in  $U \setminus \{z_0\}$  ist  $h$  die gesuchte holomorphe Fortsetzung von  $f$  auf  $U$ .  $\square$

**Satz 4.50.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist  $f$  analytisch. Ist*

$$(4.13) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für ein  $z_0 \in U$  die Entwicklung von  $f$  in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$ , dann konvergiert diese mindestens in der größten offenen Kreisscheibe  $B_R(z_0) \subseteq U$ . Die Koeffizienten  $a_k$  sind eindeutig bestimmt durch die Formel

$$(4.14) \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

für beliebiges  $r \in (0, R)$ .

*Beweis.* Sei  $z_0 \in U$  fest gewählt. Seien  $R := \text{dist}(z_0, \partial U)$ ,  $r \in (0, R)$  fest gewählt und  $\kappa$  der positiv orientierte Randweg von  $B_r(z_0)$ . Für  $z \in B_r(z_0)$  liefert die Integralformel von Cauchy

$$(4.15) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir entwickeln  $1/(\zeta - z)$ , den *Integralkern von Cauchy*, für  $z \in B_r(z_0)$  und  $\zeta \in \partial B_r(z_0)$  in eine Reihe aus Potenzen von  $(z - z_0)/(\zeta - z_0)$ :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \frac{1}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Wegen

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

konvergiert diese für festes  $z$  gleichmäßig in  $\zeta$ . Mit (4.15) und Satz 4.30(b) folgt

$$(4.16) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

wobei die Koeffizienten durch (4.14) gegeben sind. Andererseits sind die  $a_k$  durch Satz 4.22(b) unabhängig von  $r$  eindeutig festgelegt. Da  $r \in (0, R)$  beliebig war, folgt, dass die Reihe (4.16) in  $B_R(z_0)$  lokal absolut gleichmäßig konvergiert.  $\square$

**Bemerkung und Beispiel 4.51.** Die Taylorreihe einer rationalen Funktion berechnet man für einen Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  am einfachsten, indem man nach Partialbruchzerlegung Terme der Form  $1/(z - a)$  als geometrische Reihe schreibt:

$$(4.17) \quad \frac{1}{z - a} = -\frac{1}{a - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\ell}{(a - z_0)^{\ell+1}}.$$

Die Reihe für Terme der Form  $1/(z - a)^k$  ergibt sich dann durch Ableiten von (4.17). Ein Beispiel für eine Entwicklung um den Nullpunkt:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(z-1)^2(z-2)} &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( k + \frac{1}{2^{k+1}} \right) z^k. \end{aligned}$$

**Satz 4.52** (Cauchy-Ungleichung). *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a \in U$  und  $0 < r < \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus U)$ . Dann ist  $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\partial B_r(a)} |f|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Dies folgt aus (4.11) und der Standardabschätzung.  $\square$

**Satz 4.53** (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant auf  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Sei  $L := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ . Die Cauchy-Ungleichung (Satz 4.52) liefert  $|f'(a)| \leq \frac{L}{r}$  für alle  $a \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ . Es folgt also  $f'(a) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{C}$ . Also ist  $f$  konstant nach Korollar 4.34.  $\square$

**Satz 4.54** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vom Grad  $n \geq 1$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ . Dann gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = |a_n| > 0, \quad \text{also} \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

Angenommen,  $f$  habe keine Nullstelle. Dann ist  $g = 1/f$  eine ganze Funktion mit  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$ . Also ist  $g$  auch beschränkt und somit konstant nach Satz 4.53. Dies erzwingt  $g \equiv 0$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Bemerkung 4.55.** Aus Satz 4.54 kann per Induktion gezeigt werden, dass jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Diese Eigenschaft haben wir in früheren Ergebnissen bereits mehrmals verwendet.

## 4.5 Windungszahlen

**Definition und Satz 4.56.** Seien  $w \in \mathbb{C}$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{w\}$  ein geschlossener Integrationsweg. Dann definieren wir die *Windungszahl (Umlaufzahl)*  $\text{ind}(\gamma, w)$  von  $\gamma$  um  $w$  durch

$$\text{ind}(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz.$$

Es gilt dann  $\text{ind}(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wir zeigen den Fall  $w = 0$ ,  $a = 0$  und  $b = 1$ . Der allgemeine Fall folgt dann aus  $\text{ind}(\gamma, w) = \text{ind}(\gamma - w, 0)$  und einer Umparametrisierung. Sei  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_a^t \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}$$

definiert. Für  $h := e^{-2\pi i g}$  folgt  $\dot{h} = e^{-2\pi i g}(-2\pi i \dot{g} \gamma + \dot{\gamma}) \equiv 0$ , nach Definition von  $g$ . Demnach ist  $h \equiv c$  für ein  $c \in \mathbb{C}$  und es gilt  $c \neq 0$ , denn  $\gamma(0) \neq 0$ . Es folgt  $e^{2\pi i g(1)} = \gamma(1)/c = \gamma(0)/c = e^{2\pi i g(0)} = e^0 = 1$ . Die Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern  $\text{ind}(\gamma, 0) = g(1) \in \mathbb{Z}$  (Übung!).  $\square$

**Bemerkung 4.57.** Wir zeigen, dass die Windungszahl geometrisch die Anzahl der Windungen eines geschlossenen Integrationsweges  $\gamma$  um  $w$  zählt, wobei Windungen gegen den Uhrzeigersinn positiv und im Uhrzeigersinn negativ gezählt werden. Wir betrachten den Fall  $w = 0$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$ : Es gibt eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  von  $[0, 1]$ , so dass für jedes  $k$  die Spur von  $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  in einer offenen Kreisscheibe  $D_k \subseteq \dot{\mathbb{C}}$  liegt. Gemäß Satz 4.40(c) existiert auf jedem  $D_k$  ein Zweig des Logarithmus. Wir setzen  $z_k := \gamma(t_k)$ . Induktiv wählen wir wie folgt Zweige des Logarithmus  $g_k$  auf  $D_k$ : Der Zweig  $g_1$  sei willkürlich gewählt. Wenn  $g_k$  festgelegt ist, dann wird der Zweig  $g_{k+1}$  durch die Bedingung  $g_k(z_k) = g_{k+1}(z_k)$  eindeutig festgelegt. Mit der Definition  $\varphi_k := \text{Im}(g_k \circ \gamma_k)$  folgt  $\gamma_k(t) = |\gamma_k(t)|e^{i\varphi_k(t)}$  für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ , d.h.  $\varphi_k$  ist ein Argument von  $\gamma_k$ . Da  $g_k$  in  $D_k$  eine Stammfunktion von  $1/z$  ist, folgt

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz = g_k(z_k) - g_k(z_{k-1}) = \log|z_k| - \log|z_{k-1}| + i(\varphi_k(t_k) - \varphi_k(t_{k-1})),$$

d.h. der Imaginärteil dieses Integrals misst die Winkeländerung bezüglich 0, welche  $\gamma$  im Abschnitt  $[t_{k-1}, t_k]$  erfährt. Summation ergibt

$$\begin{aligned} \text{ind}(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\log|z_0| - \log|z_0| + i(\varphi_n(1) - \varphi_1(0))) = \frac{\varphi_n(1) - \varphi_1(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

also die Anzahl der Windungen von  $\gamma$  um 0.

# 5 Laurentreihen und der Residuenkalkül

**Definition und Bemerkung 5.1.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. In diesem Fall nennt man  $z_0$  eine *isolierte Singularität von  $f$* .

- (i) Ist  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt, so können wir  $f$  nach Satz 4.49 holomorph in  $U$  fortsetzen. In diesem Fall nennt man  $z_0$  eine *hebbare Singularität von  $f$* .
- (ii) Existiert  $m \in \mathbb{N}$  derart, dass  $a_{-m} := \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$  existiert und von Null verschieden ist, so nennen wir  $z_0$  einen *Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f$* . In diesem Fall gilt  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ . Die Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  hat eine hebbare Singularität in  $z_0$  und wird durch den Wert  $a_{-m}$  in  $z_0$  zu einer holomorphen Funktion  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt. Für  $r \in (0, \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U))$  lässt sich  $g$  also in  $B_r(z_0)$  in eine Taylorreihe folgender Form entwickeln:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{g(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Für  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  ergibt sich also

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n = b_{n+m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

- (iii) Trifft weder (i) noch (ii) zu, so nennt man  $z_0$  eine *wesentliche Singularität von  $f$* . Dies ist zum Beispiel für die Funktion  $f: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  und  $z_0 = 0$  der Fall. Diese Funktion besitzt die Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!} \quad z \in \dot{\mathbb{C}}.$$

**Bemerkung 5.2.** Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so nennt man  $f$  auch *meromorph*, wenn es eine in  $U$  diskrete Menge  $M$  gibt, so dass  $f|_{U \setminus M}$  holomorph ist und so, dass alle Punkte in  $M$  Pole von  $f$  sind.  $M$  *diskret in  $U$*  bedeutet hier, dass  $M$  keinen Häufungspunkt in  $U$  besitzt.

**Definition 5.3.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\sum_n f_n$  eine Reihe von Funktionen  $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei hier  $n$  entweder  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{Z}$  durchläuft. Wir nennen die Funktionenreihe  $\sum_n f_n$  dann *kompakt konvergent*, wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von  $U$  gleichmäßig konvergiert.

**Satz 5.4.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in U$ ,  $r = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann lässt sich  $f$  um  $z_0$  in eine Laurentreihe entwickeln, d.h. es gilt

$$(5.1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

wobei die Koeffizienten  $a_n$  unabhängig von  $s \in (0, r)$  gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Reihe (5.1) ist ferner kompakt konvergent in  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Genauer: Die Funktionen

$$f_+: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$f_-: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

sind holomorph und die Reihenentwicklungen sind kompakt konvergent im jeweiligen Definitionsbereich. Ferner gilt  $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$  für  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ .

*Beweis.* Siehe [14, Kap. 6, Satz 1.2] □

**Definition 5.5.** In der Situation von Satz 5.4 nennt man die Funktion  $f_+$  den *Nebenteil* und die Funktion  $f_-$  den *Hauptteil* der Laurentreihe von  $f$  in  $z_0$ . Ferner nennt man  $a_{-1}$  das *Residuum von  $f$*  und schreibt:

$$\text{res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

**Bemerkung 5.6.** (a) Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $z_0$  ein  $m$ -facher Pol einer holomorphen Funktion  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei ferner  $g$  die holomorphe Fortsetzung der Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  auf  $U$ . Dann gilt

$$\text{res}_{z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Im Fall  $m = 1$  gilt speziell:

$$\text{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ist nämlich  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  die Taylorentwicklung von  $g$  um  $z_0$ , dann folgt  $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n$  für die Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$  und daher

$$\text{res}_{z_0} f = b_{m-1} \stackrel{\text{Satz 4.22}}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

- (b) Seien  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $z_0$  und  $g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen mit  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$  und  $h'(z_0) \neq 0$ . Dann hat  $f = \frac{g}{h}: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  einen einfachen Pol mit  $\text{res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ . Es gilt nämlich

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0.$$

Demnach hat  $f$  einen einfachen Pol in  $z_0$  und die Behauptung folgt aus (a).

**Satz 5.7** (Residuensatz). *Seien  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Sterngebiet,  $\gamma$  ein Integrationsweg in  $G$ ,  $M \subseteq G$  endlich mit  $|\gamma| \cap M = \emptyset$  und  $f: G \setminus M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{w \in M} \text{ind}(\gamma, w) \text{res}_w f.$$

*Beweis.* Für  $w \in M$  sei  $h_w: \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$  der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von  $f$  in  $w$ . Dann lässt sich die Funktion  $g := f - \sum_{w \in M} h_w$  holomorph auf  $G$  fortsetzen. Nach Satz und Definition 4.37 gilt also  $0 = \int_{\gamma} g$  und damit ist

$$(5.2) \quad \int_{\gamma} f = \sum_{w \in M} \int_{\gamma} h_w.$$

Für festes  $w \in M$  hat man dabei eine nach Satz 5.4 auf  $|\gamma|$  gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung  $h_w(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-w)^n$ , also gilt

$$\int_{\gamma} h_w = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \int_{\gamma} (z-w)^n dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz = 2\pi i \text{ind}(\gamma, w) \text{res}_w f,$$

da für  $n < -1$  die Funktion  $z \mapsto (z-w)^n$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$  eine Stammfunktion besitzt. Einsetzen in (5.2) liefert also

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{w \in M} \text{ind}(\gamma, w) \text{res}_w f. \quad \square$$

**Bemerkung 5.8.** Der Residuensatz kann unter wesentlich allgemeineren Bedingungen bewiesen werden. So muss  $G$  kein Sterngebiet sein, die Anzahl der nicht hebbaren Singularitäten von  $f$  kann unendlich sein, und der Integrationsweg  $\gamma$  kann unter gewissen Bedingungen durch einen *Zyklus* ersetzt werden, eine endliche Anzahl geschlossener Integrationswege; siehe z.B. [14, Kap. VI, Satz 4.1].

**Satz 5.9.** *Sei  $G$  ein Sterngebiet, welches eine Umgebung des Abschlusses der oberen Halbebene  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  darstellt. Sei ferner  $f$  holomorph in  $G \setminus M$ , wo  $M$  die endliche Menge von Polen und wesentlichen Singularitäten von  $f$  ist. Außerdem gelte  $M \cap \mathbb{R} = \emptyset$  und*

$$(5.3) \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \overline{H}}} z f(z) = 0.$$



Dann folgt

$$(5.4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f = 2\pi i \sum_{w \in M \cap H} \operatorname{res}_w f.$$

*Beweis.* Wir betrachten  $\gamma_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma_r(t) := re^{it}$ . Für hinreichend großes  $r$  gilt  $M \cap H \subseteq B_r(0)$ . Ferner gilt offensichtlich  $\operatorname{ind}([-r, r] \cdot \gamma_r, w) = 1$  für  $w \in M \cap H$  und  $\operatorname{ind}([-r, r] \cdot \gamma_r, w) = 0$  für  $w \in M \setminus \overline{H}$ . Es folgt aus dem Residuensatz, Satz 5.7:

$$(5.5) \quad \int_{[-r, r]} f + \int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum_{w \in M \cap H} \operatorname{res}_w f.$$

Ferner gilt

$$\left| \int_{\gamma_r} f \right| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| L(\gamma_r) = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow \infty$ , wegen (5.3). Demnach folgt (5.4) aus  $r \rightarrow \infty$  in (5.5).  $\square$

**Bemerkung 5.10.** Der Grenzwert auf der linken Seite in (5.4) heißt *Cauchyscher Hauptwert im Unendlichen*. Insbesondere trifft Satz 5.9 zu, falls  $f$  eine rationale Funktion ist, deren Nenner einen um zwei größeren Grad als ihr Zähler hat. In diesem Fall ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  wegen Aufgabe 21(b) und dem Majorantenkriterium sogar Lebesgue-Integrierbar, und in (5.4) steht links das Lebesgue-Integral über  $\mathbb{R}$  (kann auch als das uneigentliche Riemann-Integral aufgefasst werden).

**Satz 5.11.** Sei  $f$  wie in Satz 5.9 gegeben, wobei wir aber statt (5.3) lediglich die schwächere Voraussetzung

$$(5.6) \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \overline{H}}} f(z) = 0$$

machen. Dann folgt

$$(5.7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w \in M \cap H} \operatorname{res}_w (f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals ist dabei Teil der Aussage.

*Beweis.* Für hinreichend großes  $r_0$  gilt  $M \cap H \subseteq B_{r_0}(0)$ . Sei  $\gamma_0$  ein injektiver Integrationsweg von 0 nach  $ir_0$ , so dass  $|\gamma_0| \subseteq (B \cup \{0, ir_0\}) \setminus M$  gilt und so, dass  $B \setminus |\gamma_0|$  die disjunkte Vereinigung zweier Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  ist. Hier sollen  $G_1$  rechts und  $G_2$  links von  $\gamma_0$  liegen. Für  $r > r_0$  definieren wir Integrationswege

$$\begin{aligned} \gamma_{r,1}(t) &:= re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ \gamma_{r,2}(t) &:= re^{it}, & t &\in [\pi/2, \pi]. \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $\Gamma_{r,1} := [0, r] \cdot \gamma_{r,1} \cdot [ir, ir_0] \cdot \gamma_0^{-1}$  und  $\Gamma_{r,2} := [-r, 0] \cdot \gamma_0 \cdot [ir_0, ir] \cdot \gamma_{r,2}$  geschlossene Integrationswege in  $G$  sind. Ferner gilt offensichtlich  $\operatorname{ind}(\Gamma_{r,j}, w) = \delta_{jk}$  für  $w \in M \cap G_k$ ,

$j, k = 1, 2$  und  $\text{ind}(\Gamma_{r,j}, w) = 0$  für  $w \in M \setminus H$ . Aus dem Residuensatz, Satz 5.7, folgt also

$$(5.8) \quad \int_{\Gamma_{r,1}} f(z)e^{iz} dz = \left( \int_{[0,r]} + \int_{\gamma_{r,1}} - \int_{[ir_0,ir]} - \int_{\gamma_0} \right) f(z)e^{iz} dz \\ = 2\pi i \sum_{z \in M \cap G_1} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta})$$

und

$$(5.9) \quad \int_{\Gamma_{r,2}} f(z)e^{iz} dz = \left( \int_{[-r,0]} + \int_{\gamma_0} + \int_{[ir_0,ir]} + \int_{\gamma_{r,2}} \right) f(z)e^{iz} dz \\ = 2\pi i \sum_{z \in M \cap G_2} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Aufgabe 35(b) von Blatt 9 liefert

$$(5.10) \quad \left| \int_{\gamma_{r,1}} f(z)e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/2} f(re^{it}) \exp(ire^{it}) ire^{it} dt \right| \\ \leq \max_{\substack{|z|=r \\ \text{Im } z \geq 0}} |f(z)| r \int_0^{\pi/2} |\exp(ire^{it})| dt \leq \max_{\substack{|z|=r \\ \text{Im } z \geq 0}} |f(z)| \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow \infty$ , wegen (5.6). Die Funktion  $t \mapsto f(it)$  ist in  $[r_0, \infty)$  beschränkt, nach Definition von  $r_0$  und wegen (5.6). Daher ist  $t \mapsto f(it)e^{-t}$  Lebesgue-integrierbar in  $[r_0, \infty)$  und es existiert

$$C := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[ir_0,ir]} f(z)e^{iz} dz = i \int_{r_0}^{+\infty} f(it)e^{-t} dt.$$

Aus diesen Tatsachen folgt für  $r \rightarrow \infty$  in (5.8) die Existenz von

$$(5.11) \quad \int_0^\infty f(x)e^{ix} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[0,r]} f(z)e^{iz} dz \\ = 2\pi i \sum_{z \in M \cap G_1} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) + C + \int_{\gamma_0} f(z)e^{iz} dz.$$

Analog zeigt man

$$(5.12) \quad \int_{-\infty}^0 f(x)e^{ix} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r,0]} f(z)e^{iz} dz \\ = 2\pi i \sum_{z \in M \cap G_2} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) - C - \int_{\gamma_0} f(z)e^{iz} dz.$$

Aus der Summe von (5.11) und (5.12) folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.12.** Es existieren viele Anwendungen dieser und ähnlicher Sätze in der reellen Analysis. Insbesondere kann man auch einfache Pole auf der reellen Achse zulassen oder Integrale über  $[0, \infty)$  betrachten. Einige Beispiele werden als Übung gestellt.

# 6 Die Fouriertransformation

In diesem Kapitel bezeichne  $L^p(B) := L^p(B, \mathbb{C})$  für eine messbare Teilmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^N$  und  $p \in [1, \infty)$  den komplexen Vektorraum der Funktionen  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  in  $L^p(B, \mathbb{R}^N)$  liegen, siehe Bemerkung 2.14. Wir setzen wieder

$$\|f\|_p := \left( \int_B |f|^p \right)^{1/p}.$$

Für eine  $L^2$ -Funktion  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man die Fourierreihenentwicklung von  $f$  durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

mit

$$(6.1) \quad \begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, & k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, & k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

In Mathe 2 wurde gezeigt, dass die Fourierreihe in  $L^2([-\pi, \pi])$  gegen  $f$  konvergiert. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen an  $f$  konvergiert die Reihe sogar punktweise oder gleichmäßig. Die Fourierreihe kann auch mit Potenzen von  $e^{ix}$  geschrieben werden:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx.$$

Die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k \mapsto c_k$ , heißt dann *Fouriertransformierte* von  $f$ . Wir wollen hier eine analoge Transformation von komplexwertigen Funktionen betrachten, die auf  $\mathbb{R}$  (statt auf  $[-\pi, \pi]$ ) bzw. auf  $\mathbb{R}^N$  definiert sind. Es zeigt sich, dass die Fouriertransformierten dann auch komplexwertige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  (statt auf  $\mathbb{Z}$ ) bzw.  $\mathbb{R}^N$  sind.

**Definition 6.1.** Wir setzen im Folgenden  $\mathcal{D} := L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$  und betrachten das komplexe Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} g(x) \, dx \quad \text{für } f, g \in \mathcal{D},$$

welches auf dem Raum  $L^2(\mathbb{R}^N)$  definiert ist und ihn mit der induzierten Norm  $\|\cdot\|_2$  zu einem Hilbertraum macht. Allerdings ist der Unterraum  $\mathcal{D}$  bezügl. dieser Norm nicht vollständig.

**Definition 6.2.** Für  $f \in \mathcal{D}$  definieren wir die *Fouriertransformierte*  $\mathcal{F}(f): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  durch

$$\mathcal{F}(f)(y) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^N, f \in \mathcal{D}.$$

Der lineare Operator  $\mathcal{F}$  heißt *Fouriertransformation*. Oft wird auch  $\widehat{f}$  anstelle von  $\mathcal{F}(f)$  geschrieben.

**Bemerkung 6.3.** Sei  $f \in \mathcal{D}$ . Wegen

$$|\mathcal{F}(f)(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^N$$

gilt  $\sup_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)| < \infty$ . Insbesondere ist  $\mathcal{F}(f)$  wohldefiniert. Außerdem ist  $\mathcal{F}(f)$  nach Satz 2.15 stetig.

**Bemerkung 6.4.** Für  $N = 1$ ,  $f \in \mathcal{D}$ , ist die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Erfüllen die komplexe Polynome  $P$  und  $Q$  die Bedingung  $\text{grad } Q - \text{grad } P \geq 2$  und hat  $Q$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$ , so folgt aus Satz 5.9 für den speziellen Fall  $f := \frac{P}{Q} \in \mathcal{D}$ :

$$(6.2) \quad \mathcal{F}(f)(y) = \sqrt{2\pi} i \sum_{w \in M} \text{res}_w f_y.$$

Hier setzen wir  $f_y(z) := e^{-iyz} f(z)$ , so dass  $f_y|_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$  gilt, und verwenden  $M := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\}$ .

**Satz 6.5.** Sei  $f \in \mathcal{D}$ .

- (a) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^N$  gilt  $\mathcal{F}(f(\cdot + x))(y) = e^{i\langle y, x \rangle} \mathcal{F}(f)(y)$ .
- (b) Für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $y \in \mathbb{R}^N$  gilt  $\mathcal{F}(f(a \cdot))(y) = |a|^{-N} \mathcal{F}(f)\left(\frac{y}{a}\right)$ .
- (c) Ist zusätzlich  $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$  sowie  $\partial_1 f, \dots, \partial_N f \in \mathcal{D}$ , dann ist  $\mathcal{F}(\partial_j f)(y) = iy_j \mathcal{F}(f)(y)$  für  $j = 1, \dots, N$ .

*Beweis.* (a) und (b) folgen direkt aus dem Transformationsatz, Satz 2.18.

(c): Sei zunächst  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ . Mit Hilfe der partiellen Integration, Lemma 3.32(b), folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(y) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= iy_j (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx = iy_j \mathcal{F}(f)(y). \end{aligned}$$

Ist  $f \in \mathcal{D} \cap C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ , dann kann man zeigen, dass eine Folge  $(f_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$  mit  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  und  $\partial_j f_k \rightarrow \partial_j f$  in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  für  $j = 1, 2, \dots, N$  existiert. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(y) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f_k(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= iy_j (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx = iy_j (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= iy_j \mathcal{F}(f)(y). \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 6.6.** Sei  $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$  so, dass alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  in  $\mathcal{D}$  liegen. Dann lässt sich aus Satz 6.5(c) induktiv für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$  mit  $|\alpha| \leq k$  folgern:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(y) = (iy)^\alpha \mathcal{F}(f)(y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^N.$$

Speziell folgt für  $k = 2$  hieraus:

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(y) = |y|_2^2 \mathcal{F}(f)(y).$$

**Beispiel 6.7.** Wir berechnen die Fouriertransformierte der Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-|x|_2^2/2}$ . Zunächst gilt für  $N = 1$  und  $y \in \mathbb{R}$  wegen  $\left| \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) \right| = \exp\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)$  mit Satz 2.16:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) dx \\ &= i \int_{\mathbb{R}} \left( -(x+iy) \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) \right) dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) dx \\ &= i \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \end{aligned}$$

d.h. dieses Integral ist unabhängig von  $y$ . Mit Beispiel 2.21 erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} (6.3) \quad \mathcal{F}(f)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ixy} dx \\ &= e^{-y^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right) dx = e^{-y^2/2}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall erhalten wir mit dem Satz von Fubini aus (6.3) für  $y \in \mathbb{R}^N$ :

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|_2^2/2} e^{-i\langle x, y \rangle} dx = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j y_j} dx$$

$$= \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j y_j} dx_j = \prod_{j=1}^N e^{-y_j^2/2} = e^{-|y|_2^2/2}.$$

Es folgt also  $\mathcal{F}(f)(y) = f(y)$ , d.h.  $f$  ist ein Fixpunkt der Fouriertransformation.

**Definition 6.8.** Es seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen. Wir definieren formal für  $x \in \mathbb{R}^N$

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy.$$

$f * g$  wird auch als die *Faltung von  $f$  und  $g$*  bezeichnet.

**Lemma 6.9.** Für  $f, g \in \mathcal{D}$  ist  $f * g$  wohldefiniert und es gilt  $f * g \in \mathcal{D}$ .

*Beweis.* Sind  $f, g \in \mathcal{D}$ , so ist  $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$  messbar (Übung!) und

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_{L^1} g(y) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Nach dem Satz von Tonelli liegt also  $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$  in  $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ . Der Satz von Fubini liefert nun, dass  $(f * g)(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^N$  wohldefiniert ist und dass  $f * g$  in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  liegt, mit  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ . Für Funktionen  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$  gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$(6.4) \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Es folgt mit  $u = |f(x - y)|^{1/2}$  und  $v = |f(x - y)|^{1/2} |g(y)|$  als Funktionen in  $y$  mit festem  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f * g|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| dy \right)^2 dx && \text{Standardabsch.} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)|^{1/2} |f(x - y)|^{1/2} |g(y)| dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| |g(y)|^2 dy dx && (6.4) \text{ und Trafosatz} \\ &= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| |g(y)|^2 dx dy && \text{Fubini} \\ &= \|f\|_{L^1}^2 \|g\|_{L^2}^2 && \text{Trafosatz} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

also  $f * g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Insgesamt folgt  $f * g \in \mathcal{D}$ . □

Wir schreiben ab jetzt meistens  $\widehat{f}$  statt  $\mathcal{F}(f)$ .

**Proposition 6.10** (Faltungssatz). Für  $f, g \in \mathcal{D}$  gilt

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f} \widehat{g}.$$

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{R}^N$ . Dann liefert der Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y - z) g(z) e^{-i\langle x, y \rangle} dz dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y - z) g(z) e^{-i\langle x, y \rangle} dy dz \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(v) g(z) e^{-i\langle x, v+z \rangle} dv dz \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(v) e^{-i\langle x, v \rangle} dv \int_{\mathbb{R}^N} g(z) e^{-i\langle x, z \rangle} dz \\ &= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}(x) \widehat{g}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir die Fouriertransformation auf ganz  $L^2(\mathbb{R}^N)$  ausweiten und dazu zeigen, dass die  $L^2$ -Norm unter  $\mathcal{F}$  erhalten bleibt. Dies kann nicht direkt aus der Definition gefolgert werden, sondern wird mit einer Approximationsmethode gezeigt. Dafür benötigen wir

**Definition und Satz 6.11.** Für  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\varepsilon > 0$  sei  $\rho_\varepsilon: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\rho_\varepsilon(x) := (2\pi\varepsilon^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2}\right).$$

Dies ist der *Gaußsche Glättungskern*: Es gelten  $\rho_\varepsilon \in C^\infty$ ,  $\rho_\varepsilon \geq 0$ ,  $\rho_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^N)$  für alle  $p \geq 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon = 1$  und  $\rho_\varepsilon$  ist eine gerade Funktion. Für  $p \geq 1$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  gilt dann:

$$(6.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon * f = f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Ferner gilt

$$\widehat{\rho_\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 |x|^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{\rho_\varepsilon}} = \rho_\varepsilon.$$

*Beweis.* Für den Beweis von (6.5) siehe [28, Theorem 2.16]. Die anderen Aussagen folgen aus Satz 6.5(b).  $\square$

**Satz 6.12.** Für  $f \in \mathcal{D}$  ist  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$  und es gilt die Gleichung von Plancherel:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

*Beweis.* Wegen Bemerkung 6.3 ist  $\widehat{f}$  eine beschränkte stetige Funktion. Somit ist  $\widehat{f}$  messbar und das Integral

$$k_\varepsilon := (2\pi)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(z)|^2 \widehat{\rho}_\varepsilon(z) dz$$

ist für jedes  $\varepsilon > 0$  endlich. Wegen  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  ist die Funktion  $(x, y, z) \mapsto \overline{f}(x)f(y)\widehat{\rho}_\varepsilon(z)$  messbar, und der Satz von Tonelli zeigt, dass sie in  $L^1(\mathbb{R}^{3N})$  liegt. Mit dem Satz von Fubini, Beispiel 6.7 und Satz 6.5(b) rechnen wir:

$$\begin{aligned} k_\varepsilon &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^{3N}} \overline{f}(x)f(y)e^{i(x-y,z)}\widehat{\rho}_\varepsilon(z) d(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \overline{f}(x)f(y)\rho_\varepsilon(y-x) d(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \overline{f}(x)f(y)\rho_\varepsilon(x-y) d(x, y) = \langle f, \rho_\varepsilon * f \rangle. \end{aligned}$$

Wegen Definition und Satz 6.11 gilt  $\rho_\varepsilon * f \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Es folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \rho_\varepsilon * f \rangle = \langle f, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon * f \rangle = \|f\|_{L^2}$ . Insbesondere bleibt  $k_\varepsilon$  beschränkt für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wir haben andererseits

$$(6.6) \quad 0 \leq (2\pi)^{N/2} \widehat{\rho}_\varepsilon \nearrow 1 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nach dem Satz über die monotone Konvergenz liefert die Definition von  $k_\varepsilon$  also  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon = \|\widehat{f}\|_{L^2}$  und somit die Behauptung.  $\square$

Satz 6.12 zeigt, dass  $\mathcal{F}: \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  ein stetiger linearer Operator ist. Wegen  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{D}$  und weil  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  dicht liegt (Maßtheorie!), liegt auch  $\mathcal{D}$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  dicht, d.h. jede Funktion in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  kann bezüglich der  $L^2$ -Norm beliebig gut durch eine Funktion in  $\mathcal{D}$  approximiert werden. Zusammen mit der Gleichung von Plancherel ermöglicht uns dies jetzt,  $\mathcal{F}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^N)$  fortzusetzen.

**Satz 6.13.** *Es gibt einen eindeutig bestimmten stetigen linearen Operator  $L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ , der eine Fortsetzung von  $\mathcal{F}: \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  ist. Wir bezeichnen ihn weiter mit  $\mathcal{F}$  und schreiben  $\widehat{f} := \mathcal{F}(f)$ .*

(a)  $\mathcal{F}$  ist eine Isometrie, d.h.  $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ .

(b) Es gilt die Gleichung von Parseval:  $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$  für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ .

*Beweis.* Seien  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$  und  $(f_j) \subseteq \mathcal{D}$  eine Folge mit  $f_j \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  für  $j \rightarrow \infty$ . Mit Satz 6.12 ergibt sich  $\|\widehat{f}_j - \widehat{f}_k\|_{L^2} = \|f_j - f_k\|_{L^2} \rightarrow 0$  für  $j, k \rightarrow \infty$ , weil  $(f_j)$  als konvergente Folge eine Cauchyfolge in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  ist. Demnach ist also auch  $\widehat{f}_j$  eine Cauchyfolge in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , welche gegen eine Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$  konvergiert. Jede andere Folge in  $\mathcal{D}$ , welche in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  gegen  $f$  konvergiert, lässt sich mit  $(f_j)$  zusammenlegen und ergibt wieder eine konvergente Folge. Das obige Argument lässt sich auch auf diese Folge anwenden und liefert eine konvergente Folge von Fouriertransformierten, deren Grenzwert unverändert  $g$  ist. Demnach hängt  $g$  nicht von der approximierenden Folge  $(f_j)$  ab und



wir setzen  $\mathcal{F}(f) := \widehat{f} := g$ . Es ist eine leichte Übung, die Linearität von  $\mathcal{F}$  und den Unterpunkt (a) zu zeigen. Die Stetigkeit von  $\mathcal{F}$  folgt direkt aus diesen Tatsachen. Der Unterpunkt (b) folgt aus (a) und der *Polarisierungsgleichung*, welche das Skalarprodukt durch die induzierte Norm ausdrückt, siehe Mathe 2, Parallelogrammgleichung.  $\square$

**Bemerkung 6.14.** Um die Fouriertransformierte einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{D}$  zu berechnen, können wir  $f$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  beliebig durch Funktionen aus  $\mathcal{D}$  approximieren. Zum Beispiel gilt für  $R > 0$ , dass  $f_R := 1_{B_R(0)}f$  in  $\mathcal{D}$  liegt und dass  $f_R \rightarrow f$  (Übung!) und somit auch  $\widehat{f}_R \rightarrow \widehat{f}$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  gilt für  $R \rightarrow \infty$ .

**Satz 6.15** (Inverse der Fouriertransformation in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ ). *Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  ist bijektiv. Für  $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$  setzen wir  $g^\vee(x) := \widehat{g}(-x)$ . Dann gilt*

$$(6.7) \quad \mathcal{F}^{-1}(g) = g^\vee$$

für alle  $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Demnach ist  $\mathcal{F}$  ein unitärer Operator.

*Beweis.* Zunächst ist  $\mathcal{F}$  als Isometrie automatisch injektiv. Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , und sei  $(f_j) \subseteq \mathcal{D}$  mit  $f_j \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$  für  $j \rightarrow \infty$  gegeben. Dann gilt  $\widehat{f}_j \rightarrow \widehat{f}$  nach Satz 6.13. Es folgt für  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}_\varepsilon(z) \widehat{f}_j(z) e^{i(x,z)} dz &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \widehat{\rho}_\varepsilon(z) f_j(y) e^{i(x-y,z)} d(y,z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y-x) f_j(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) f_j(y) dy \end{aligned}$$

und daher

$$(6.8) \quad (2\pi)^{N/2} \widehat{(\widehat{\rho}_\varepsilon \widehat{f})}(-x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}_\varepsilon(z) \widehat{f}(z) e^{i(x,z)} dz = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) f(y) dy = (\rho_\varepsilon * f)(x)$$

nach dem Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$ . Ferner folgt aus (6.6) und dem Satz über die dominierte Konvergenz  $(2\pi)^{N/2} \widehat{\rho}_\varepsilon \widehat{f} \rightarrow \widehat{f}$  in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , nach Satz 6.13 also auch

$$(6.9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{N/2} \widehat{(\widehat{\rho}_\varepsilon \widehat{f})} = \widehat{f} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Zusammen mit Definition und Satz 6.11 ergeben (6.8) und (6.9)

$$(6.10) \quad \widehat{f}(-x) = f(x) \quad \text{f.ü.}$$

und somit  $(\widehat{f})^\vee = f$  im Sinne von  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Damit haben wir (6.7) für alle  $g \in \text{Bild}(\mathcal{F})$  gezeigt. Für beliebiges  $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$  sei  $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$  durch  $h(x) := g(-x)$  definiert. Dann liefert (6.10)

$$\widehat{h}(x) = h(-x) = g(x) \quad \text{f.ü.,}$$

also  $g = \widehat{h} = \mathcal{F}(\widehat{h})$  im Sinne von  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Dies zeigt, dass  $\mathcal{F}$  surjektiv ist.  $\square$

**Bemerkung 6.16.** Für  $g \in \mathcal{D}$  gilt

$$g^\vee(x) = \widehat{g}(-x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(y) e^{i(x,y)} dy.$$

## 6.1 Distributionen und Fundamentallösungen

In diesem Abschnitt werden wir am Beispiel der Laplacegleichung grob die Idee darstellen, wie mit Hilfe von Distributionentheorie und Fourieranalysis partielle Differentialgleichungen gelöst werden können.

Wir verwenden die Notation  $\mathcal{T} := C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ . Eine *Distribution* ist ein stetiger linearer Operator  $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Den Vektorraum der Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}^*$ .

Eine Schwierigkeit, auf die wir hier nicht eingehen werden, liegt darin, eine geeignete Vektorraumtopologie für  $\mathcal{T}$  zu wählen, um hier von Stetigkeit sprechen zu können (man wählt keine von einer Norm erzeugte Topologie!).

**Beispiel 6.17.** (a) Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  so, dass  $1_K f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  für alle kompakten Mengen  $K \subseteq \mathbb{R}^N$  gilt. Man nennt  $f$  dann *lokal integrierbar*. Wir definieren

$$\tau_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}.$$

Dann gilt  $\tau_f \in \mathcal{T}^*$ .

(b) Für  $x \in \mathbb{R}^N$  definieren wir

$$\delta_x(\varphi) := \varphi(x).$$

Dann gilt  $\delta_x \in \mathcal{T}^*$ . Um diese Distribution ähnlich wie in (a) als Integral schreiben zu können, definiert man das Maß

$$\delta_x(M) := \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$

auf  $\mathcal{M}^N$ . Man nennt  $\delta := \delta_0$  das *Dirac-Maß*. Mit der Definition des Integrals einer Funktion bezüglich eines Maßes aus der Maßtheorie folgt dann

$$(6.11) \quad \int \varphi d\delta_x = \varphi(x).$$

(c) Für  $\varphi \in \mathcal{T}$  und  $x \in \mathbb{R}^N$  gilt  $\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho_\varepsilon * \varphi)(x)$ . Dies motiviert die in der Physik übliche rein formale Schreibweise

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) d\delta_x(y) = \text{„} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \delta_x(y) dy \text{“} \\ &= \text{„} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \delta(x - y) dy \text{“} = \text{„}(\delta * \varphi)(x)\text{“}. \end{aligned}$$

Man rechnet also so, als ob  $\delta$  eine Funktion wäre und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon = \delta$  gelten würde. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der *Delta-Funktion*.

(d) Im Fall  $N = 1$  definiert man die „Stammfunktion“ von  $\delta$  durch

$$\Theta(x) := \int_{-\infty}^x \delta(x) dx = \int_{(-\infty, x]} d\delta = \delta((-\infty, x]) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$\Theta$  wird auch als *Heaviside-Funktion* bezeichnet und ist wegen (a) auch eine Distribution.

Für ein Element  $\tau$  eines gewissen Unterraumes von  $\mathcal{T}^*$  (den *temperierten Distributionen*) definiert man die Fouriertransformation  $\hat{\tau}$  wieder als Distribution durch

$$\hat{\tau}(\varphi) := \tau(\hat{\varphi}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{T}.$$

**Beispiel 6.18.** Es gilt für beliebiges  $\varphi \in \mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) &= \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) e^{-i\langle 0, y \rangle} dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) dy = (2\pi)^{-N/2} \tau_1(\varphi) \end{aligned}$$

und analog

$$\hat{\tau}_1(\varphi) = \tau_1(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(y) e^{i\langle 0, y \rangle} dy = (2\pi)^{N/2} \varphi(0) = (2\pi)^{N/2} \delta(\varphi),$$

also

$$(6.12) \quad \hat{\delta} = (2\pi)^{-N/2} \tau_1 \quad \text{und} \quad \hat{\tau}_1 = (2\pi)^{N/2} \delta.$$

Motiviert durch die Formel für partielle Integration in Lemma 3.32(b) definiert man für einen Multiindex  $\alpha$  die entsprechende *Ableitung* einer Distribution  $\tau$  wiederum als Distribution durch

$$\partial^\alpha \tau(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \tau(\partial^\alpha \varphi).$$

Auch für Distributionen gilt dann die Beziehung aus Bemerkung 6.6 für die Fouriertransformation der Ableitungen.

**Beispiel 6.19.** Als Anwendung lösen wir formal eine lineare partielle Differentialgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation: Gegeben sei eine Funktion  $f \in \mathcal{T}$  und gesucht sei eine Funktion  $u \in \mathcal{T}$  mit

$$(6.13) \quad -\Delta u = f.$$

Durch Fouriertransformation geht diese Gleichung über in  $|\cdot|^2 \hat{u} = \hat{f}$ , d.h. es gilt

$$u = \left( \frac{\hat{f}}{|\cdot|^2} \right)^\vee = \underbrace{(2\pi)^{-N/2} \left( \frac{1}{|\cdot|^2} \right)^\vee}_\Lambda * f.$$

Die letzte Umformung ist durch den Faltungssatz, Proposition 6.10, inspiriert, indem man dort die inverse Fouriertransformation anwendet. Diese Überlegungen nimmt man als Ausgangspunkt und gelangt (mit einigen trickreichen Rechnungen) zu dem Ergebnis

$$\Lambda(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{2} & N = 1 \\ -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & N = 2 \\ \frac{1}{N(N-2)\omega_{N-1}} |x|^{2-N} & N \geq 3. \end{cases}$$

Man nennt  $\Lambda$  auch *Fundamentallösung* oder *Greenfunktion* des Problems (6.13). Unter geeigneten Bedingungen an  $f$  (allgemeiner als  $f \in \mathcal{T}$ ) ist nämlich  $u = \Lambda * f$  die Lösung von (6.13). Formal gilt, wenn man hier  $f = \delta$  einsetzt,  $u = \Lambda * \delta = \Lambda$  und somit

$$-\Delta\Lambda = \delta.$$

Die Fundamentallösung ist also die Lösung der Differentialgleichung im Distributionensinne mit dem Dirac-Maß als Inhomogenität. Dieses Verfahren kann man generell für lineare partielle Differentialgleichungen einsetzen, um Fundamentallösungen zu erhalten.

# 7 Differentialgleichungen

In diesem Kapitel seien alle Funktionenräume wieder reell. Wir bezeichnen mit  $|\cdot| := |\cdot|_2$  die Euklidische Norm in  $\mathbb{R}^N$ , für  $N \in \mathbb{N}$ . In Mathe 2 wurde für eine stetige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $I$  ein Intervall, das Integral

$$\int_I f := \begin{pmatrix} \int_I f_1 \\ \vdots \\ \int_I f_N \end{pmatrix}$$

eingeführt und die Standardabschätzung  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$  gezeigt.

**Definition 7.1.** Es sei  $N \in \mathbb{N}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetige Abbildung. Ferner sei  $(t_0, u_0) \in U$ . Eine differenzierbare Kurve  $u: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt *Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung*

$$(7.1) \quad \dot{u} = f(t, u),$$

wenn

$$(t, u(t)) \in U \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Ist ferner  $t_0 \in I$  und gilt  $u(t_0) = u_0$ , so nennt man die Kurve  $u$  auch *Lösung des Anfangswertproblems (AWP)*

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) & \text{in } I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

**Bemerkung 7.2.**

- (a) Den Ausdruck (7.1) nennt man auch *System von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen erster Ordnung*. Hierbei bezieht sich die Ordnung auf die höchste vorkommende Ableitung. Eine Gleichung z.B. der Form  $\ddot{u} + \alpha\dot{u} + \beta u = 0$  heißt auch *(gewöhnliche) Differentialgleichung zweiter Ordnung*. Im Fall  $N = 1$  spricht man von einer *skalaren (gewöhnlichen) Differentialgleichung*.
- (b) Ist  $U = \mathbb{R} \times U_0$  mit  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^N$  und  $f(t, x) = F(x)$  mit einer Abbildung  $F: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so nennt man die aus (7.1) hervorgehende Differentialgleichung

$$(7.2) \quad \dot{u} = F(u)$$

*autonom*. Diese Gleichung kann man geometrisch interpretieren: *Finde die in  $U_0$  verlaufende Kurve  $t \mapsto u(t)$ , deren Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{u}(t)$  jeweils durch die*

Werte  $F(u(t))$  vorgegeben sind. Ein spezielles Beispiel sind die linearen Differentialgleichungen der Form  $\dot{u} = Au$  für  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  (siehe Mathe II).

Gibt es  $u_0 \in U_0$  mit  $F(u_0) = 0$ , so ist die konstante Abbildung  $u(t) \equiv u_0$  eine Lösung von (7.2). Wir nennen  $u$  dann auch *stationäre Lösung*, *Gleichgewichtslösung* oder auch *Equilibrium*. Ist speziell  $F(0) = 0$ , so nennen wir die stationäre Lösung  $u(t) \equiv 0$  auch *triviale Lösung*.

- (c) Zu einem Anfangswertproblem der Form (AWP) ist das folgende Integralproblem nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung äquivalent: Suche eine stetige Funktion  $u: T \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds.$$

**Definition 7.3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  eine stetige Abbildung. Wir nennen  $f$  *lokal Lipschitz stetig in  $x$* , falls für jeden Punkt  $(t, x) \in U$  eine Umgebung  $V \subseteq U$  und ein  $L > 0$  existiert mit

$$|f(s, x_1) - f(s, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } (s, x_1), (s, x_2) \in V.$$

**Satz 7.4.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine stetige Abbildung derart, dass gilt:

- (a) Für alle  $(t, x) \in U$  ist die Funktion  $y \mapsto f(t, y)$  in  $y$  differenzierbar mit Ableitung  $\partial_y f(t, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ .
- (b) Die Abbildung  $\partial_y f: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ,  $(t, y) \mapsto \partial_y f(t, y)$  ist stetig.

Dann ist  $f$  lokal Lipschitz stetig in  $x$  für alle  $(t, x) \in U$ .

*Beweis. Übung!* □

**Bemerkung 7.5.** Die Bedingungen (a) und (b) von Satz 7.4 sind insbesondere dann erfüllt, wenn  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$  ist.

## 7.1 Existenz und Eindeutigkeit

Ein wichtiges technisches Hilfsmittel ist das

**Lemma 7.6** (Lemma von Gronwall). Sei  $J$  ein Intervall mit  $t_0 \in J$ , und seien  $\alpha, \beta \geq 0$  und  $u \in C(J, [0, \infty))$ . Falls gilt

$$(7.3) \quad u(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t u(s) \, ds \right| \quad \text{für alle } t \in J,$$

dann folgt

$$(7.4) \quad u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in J.$$

*Beweis.* Zunächst seien  $t_0 = 0$  und  $t \geq 0$ . Wir definieren  $\varphi(t) := \beta \int_0^t u(s) ds$ . Die Ungleichung (7.3) liefert

$$(7.5) \quad \dot{\varphi}(t) = \beta u(t) \leq \alpha\beta + \beta\varphi(t).$$

Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit  $e^{-\beta t}$  erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}\varphi(t)) = e^{-\beta t}\dot{\varphi}(t) - \beta e^{-\beta t}\varphi(t) \leq e^{-\beta t}\alpha\beta.$$

Integrieren über  $[0, t]$  liefert wegen  $\varphi(0) = 0$ :

$$e^{-\beta t}\varphi(t) \leq \alpha(1 - e^{-\beta t}),$$

und daher mit (7.3)

$$u(t) \leq \alpha + \varphi(t) \leq \alpha(1 + e^{\beta t} - 1) = \alpha e^{\beta t},$$

also (7.4). Der Beweis für  $t < 0$  geht analog.

Der allgemeine Fall folgt mit der Substitution  $v(t) := u(t_0 + t)$  für  $t \in J - t_0$  aus dem Spezialfall.  $\square$

Seien nun  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  offen sowie  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig, und lokal Lipschitzstetig im zweiten Argument. Ferner sei  $(t_0, u_0) \in U$ . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(7.6) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

**Lemma 7.7** (Eindeutigkeit). *Seien  $J_1$  und  $J_2$  offene Intervalle mit  $t_0 \in J_1 \cap J_2$ . Falls  $u_i$  jeweils eine Lösung von (7.6) in  $J_i$  ist,  $i = 1, 2$ , dann folgt  $u_1 \equiv u_2$  in  $J_1 \cap J_2$ .*

*Beweis.* Sei  $I \subseteq J_1 \cap J_2$  ein kompaktes Intervall mit  $t_0 \in I$ . Die Stetigkeit von  $u_i$  zeigt, dass die Vereinigung  $K$  der Graphen von  $u_1$  und  $u_2$  mit jeweils dem Definitionsbereich  $I$  kompakt ist. Daher existiert  $M \geq 0$ , so dass  $|f(t, y) - f(t, z)| \leq M|y - z|$  für  $(t, y), (t, z) \in K$  gilt. Es folgt für  $t \geq t_0$ :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \leq M \int_{t_0}^t |u_1(s) - u_2(s)| ds.$$

Das Lemma von Gronwall, Lemma 7.6, liefert nun  $|u_1(t) - u_2(t)| = 0$  für alle  $t \in I$ ,  $t \geq t_0$ . Der Fall  $t \leq t_0$  wird analog behandelt. Da  $I \subseteq J_1 \cap J_2$  beliebig war, gilt  $u_1 \equiv u_2$  in ganz  $J_1 \cap J_2$ .  $\square$

**Lemma 7.8** (Lokale Existenz). *Es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass (7.6) in  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  eine Lösung besitzt.*

*Beweis.* Wir wählen  $R, \varepsilon_1 > 0$  so, dass  $f$  in  $K := [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1] \times \overline{B}_R(u_0) \subseteq U$  im zweiten Argument Lipschitzstetig ist, mit einer Lipschitzkonstante  $L$ . Seien  $M := \max_K |f|$  und  $\varepsilon := \min\{R/M, 1/(2L), \varepsilon_1\}$ . Für  $J := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  betrachten wir den Banachraum  $F := C(J, \mathbb{R}^N)$  mit  $\|u\|_F := \max_{t \in J} |u(t)|$ . Wir betrachten  $u_0$  als die konstante Abbildung  $t \mapsto u_0$ , ein Element von  $F$ , und setzen  $B := \overline{B}_R(u_0)$ . Für  $u \in B$  und  $t \in J$  gilt dann mit der Standardabschätzung

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq \varepsilon M \leq R.$$

Wir können also eine Abbildung  $\Lambda: B \rightarrow B$  durch

$$\Lambda(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds$$

definieren. Wir zeigen, dass  $\Lambda$  einen Fixpunkt, also wegen Bemerkung 7.2(c) eine Lösung von (7.6) besitzt.

Für  $u_1, u_2 \in B$  gilt

$$\begin{aligned} |\Lambda(u_1)(t) - \Lambda(u_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) \, ds \right| \\ &\leq \varepsilon L \|u_1 - u_2\|_F \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_F, \end{aligned}$$

also  $\|\Lambda(u_1) - \Lambda(u_2)\|_F \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_F$ . Demnach ist  $\Lambda$  eine Kontraktion und der Fixpunktsatz von Banach liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 7.9.** Für die Fortsetzung von Lösungen benötigen wir eine Konsequenz des Mittelwertsatzes: Seien  $a < b < c$ ,  $g \in C([a, b])$  differenzierbar in  $[a, b)$  und  $h \in C([b, c])$  differenzierbar in  $(b, c]$ . Ferner gelte, dass die Grenzwerte  $\alpha := \lim_{t \rightarrow b^-} g'(t)$  und  $\beta := \lim_{t \rightarrow b^+} h'(t)$  existieren. Dann sind  $g$  und  $h$  in  $b$  (einseitig) differenzierbar mit  $g'(b) = \alpha$  und  $h'(b) = \beta$ . Gilt zusätzlich  $g(b) = h(b)$  und  $\alpha = \beta$ , dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} g(t), & t \in [a, b], \\ h(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

in  $[a, c]$  differenzierbar, mit Ableitung  $\alpha = \beta$  in  $b$ . Dieses Resultat kann auch auf die Koordinaten von Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^N$  angewendet werden.

Das nächste Resultat nennt man den globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf:

**Satz 7.10.** *Es gibt  $T^+ = T^+(t_0, u_0) \in (t_0, \infty]$  und  $T^- = T^-(t_0, u_0) \in [-\infty, t_0)$ , so dass das maximale Existenzintervall  $(T^-, T^+)$  das größte Intervall ist, auf dem eine Lösung  $u$  von (7.6) existiert, die maximale Lösung. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt, und alle Lösungen von (7.6) in Teilintervallen, die  $t_0$  enthalten, sind Einschränkungen von  $u$ .*



*Beweis.* Wegen Lemma 7.8 ist

$$T^+ := \sup\{T > t_0 \mid \text{es gibt eine Lösung von (7.6) in } [t_0, T]\}$$

größer als  $t_0$  ( $\infty$  ist möglich).  $T^-$  wird analog definiert. Wir konstruieren eine eindeutige Lösung  $u$  auf  $(T^-, T^+)$ : Sei  $t \in (T^-, T^+)$ . Dann existieren  $T^- < a < t_0 < b < T^+$  mit  $t \in (a, b)$ . Aus der Definition von  $T^-$  und  $T^+$  folgt (mit Hilfe von Bemerkung 7.9 für den Punkt  $t_0$ ), dass eine Lösung  $u_{a,b}$  von (7.6) in  $(a, b)$  existiert. Wir können  $u(t) := u_{a,b}(t)$  setzen, weil dieser Wert wegen Lemma 7.7 nicht von der Wahl geeigneter  $a$  und  $b$  abhängt. Es ist klar, dass  $u$  die verlangten Eigenschaften hat.

Es fehlt nur noch zu zeigen, dass  $(T^-, T^+)$  das maximale Intervall ist, auf dem eine Lösung existiert. Im Fall  $T^+ = \infty$  und  $T^- = -\infty$  ist dies klar. Wir untersuchen nur den weiteren Fall  $T^- = -\infty$  und  $T^+ < \infty$ , die anderen Fälle behandelt man analog. Angenommen, es gäbe eine Lösung  $u$  auf einem Intervall, das echt größer ist als  $(T^-, T^+)$ . Nach Definition von  $T^+$  kann das nur das Intervall  $(T^-, T^+]$  sein. Dann ist  $u$  also stetig differenzierbar nach  $T^+$  fortsetzbar und es gilt  $(T^+, u(T^+)) \in U$ . Dann gibt es nach Lemma 7.8 eine Lösung  $v$  der Differentialgleichung mit dem Anfangswert  $(T^+, u(T^+))$  in einem Intervall  $(T^+ - \varepsilon, T^+ + \varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$ . Mit Bemerkung 7.9 folgt, dass die Funktion

$$w(t) := \begin{cases} u(t) & t \in [t_0, T^+] \\ v(t) & t \in (T^+, T^+ + \varepsilon) \end{cases}$$

eine Lösung von (7.6) in  $[t_0, T^+ + \varepsilon)$  darstellt, im Widerspruch zur Definition von  $T^+$ . Dies zeigt, dass keine Lösung auf  $(T^-, T^+]$  existiert.  $\square$

**Korollar 7.11.** *Sei  $G^+$  der Graph der Einschränkung der eindeutigen maximalen Lösung  $u$  von (7.6) auf  $[t_0, T^+)$ . Dann ist  $\overline{G^+}$  keine kompakte Teilmenge von  $U$ . Es tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein:*

- (i)  $T^+ = \infty$ ;
- (ii)  $T^+ < \infty$  und  $\lim_{t \rightarrow T^+} |u(t)| = \infty$ ;
- (iii)  $T^+ < \infty$  und  $\liminf_{t \rightarrow T^+} \text{dist}((t, u(t)), \partial U) = 0$ .

*Analoge Aussagen gelten auf  $(T^-, t_0]$ . Man sagt auch: „ $u$  verläuft von Rand zu Rand“.*

*Beweis.* Angenommen,  $\overline{G^+}$  wäre eine kompakte Teilmenge von  $U$ . Dann ist  $M := \max_{\overline{G^+}} |f| < \infty$  und daher  $|u'| \leq M$  für  $t \in [t_0, T^+)$ . Demnach ist  $u$  dort Lipschitzstetig und besitzt eine stetige Fortsetzung nach  $T^+$  (Übung!) mit  $(T^+, u(T^+)) \in U$ . Wegen Bemerkung 7.2(c) ist  $u$  dann eine Lösung auf  $[t_0, T^+]$ . Widerspruch zur Maximalität! Das beweist die erste Aussage.

Ist  $\overline{G^+}$  nicht kompakt und  $T^+ < \infty$ , dann muss (ii) gelten. Ist  $\overline{G^+}$  kompakt aber keine Teilmenge von  $U$ , dann folgt  $T^+ < \infty$ ,  $\overline{G^+} \cap \partial U \neq \emptyset$  und daher (iii).  $\square$

**Proposition 7.12.** *Unter den Bedingungen für Satz 7.10 und im Fall  $U := I \times \mathbb{R}^N$  für ein offenes Intervall  $I$  mit  $t_0 \in I$  nehmen wir zusätzlich an, dass  $f$  im zweiten Argument linear beschränkt ist, d.h. dass gilt*

$$(7.7) \quad C := \sup_{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^N} \frac{|f(t,x)|}{1+|x|} < \infty.$$

Dann ist  $I$  das maximale Existenzintervall für (7.6).

*Beweis.* Sei  $I = (a, b)$  mit  $a \in [-\infty, \infty)$  und  $b \in (-\infty, \infty]$ . Unter der Annahme  $T^+ < b$  erhalten wir  $|f(t,x)| \leq C + C|x|$  für  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $t \in [t_0, T^+)$  und daher für die Maximale Lösung  $u$ :

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \leq |u_0| + C(T^+ - t_0) + C \int_{t_0}^t |u(s)| ds.$$

Das Lemma von Gronwall, Lemma 7.6, liefert, dass  $|u(t)|$  in  $[t_0, T^+)$  beschränkt ist. Nach Korollar 7.11 muss also  $\liminf_{t \rightarrow T^+} \text{dist}((t, u(t)), \partial U) = 0$  gelten. Andererseits gilt aber  $\text{dist}((t, u(t)), \partial U) \geq \min\{b - T^+, t_0 - a\} > 0$  für  $t \in [t_0, T^+)$ . Widerspruch! Es muss also  $T^+ = b$  gelten. Analog zeigt man  $T^- = a$ .  $\square$

## 7.2 Explizite Lösungen spezieller Differentialgleichungen

Im Folgenden betrachten wir häufig *autonome Differentialgleichungen*, d.h. Gleichungen der Form  $\dot{u} = f(u)$ . Ist  $u$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{u} = f(u)$ ,  $u(t_0) = u_0$ , so ist  $u(t + t_0)$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $\dot{u} = f(u)$ ,  $u(0) = u_0$ . Demnach genügt es für autonome Differentialgleichungen stets den Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  zu betrachten.

### 7.2.1 Getrennte Variablen

Seien  $g: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Abbildungen. Wir suchen einen expliziten Ausdruck für die Lösung des Anfangswertproblems

$$(7.8) \quad \dot{u} = f(u)g(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

für  $(t_0, u_0) \in I_1 \times I_2$ . Ist  $f(u_0) = 0$ , so ist  $u(t) \equiv u_0$  eine Lösung von (7.8). Ist andererseits  $f(u_0) \neq 0$ , dann existiert aufgrund der Stetigkeit von  $f$  eine Lösung  $u: I \subseteq I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  von (7.8) mit  $f(u(t)) \neq 0$  für  $t \in I$ . Durch Umstellen und Integrieren nach  $t$  erhalten wir mit einer Substitution

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{f(v)} dv = \int_{t_0}^t \frac{\dot{u}(s)}{f(u(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Können die Integrationen explizit durchgeführt und danach nach  $u$  aufgelöst werden, dann erhalten wir eine explizite Darstellung für  $u$ .

### Beispiel 7.13.

- (a) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $p: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann hat die (eindimensionale) homogene Differentialgleichung  $\dot{u} + p(t)u = 0$ ,  $u(t_0) = u_0$ , für jedes  $u_0 \in \mathbb{R}$  eine eindeutig bestimmte Lösung in  $I$ , nach Proposition 7.12, siehe auch Abschnitt 7.2.3. Ist  $u_0 = 0$ , dann ist  $u \equiv 0$  die gesuchte Lösung, und ist  $u_0 \neq 0$ , so muss wegen der Eindeutigkeit auch  $u(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gelten. Aus dem Zwischenwertsatz folgt wegen der Stetigkeit von  $u$ , dass  $u(t)$  immer dasselbe Vorzeichen wie  $u_0$  hat. Wir erhalten eine (fast) explizite Darstellung von  $u$  durch Integrieren und Auflösen (für  $u_0 > 0$ ):

$$\log(u) - \log(u_0) = \int_{u_0}^u \frac{1}{v} dv = - \int_{t_0}^t p(s) ds, \quad \text{also} \quad u(t) = u_0 e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Analog gilt  $u(t) = u_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right)$  für  $u_0 < 0$ .

- (b) Betrachte  $\dot{u} = u^2$  mit  $u(0) = u_0$ . Da  $u \equiv 0$  die Gleichung für  $u_0 = 0$  löst, ist eine Lösung mit  $u_0 > 0$  ebenfalls stets positiv und wir erhalten

$$t = \int_0^t 1 ds = \int_{u_0}^u \frac{1}{v^2} dv = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u_0},$$

also  $u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1} = \frac{u_0}{1 - u_0 t}$ . Das maximale Existenzintervall ist also  $(-\infty, \frac{1}{u_0})$ .

## 7.2.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine *exakte Differentialgleichung* ist eine Gleichung der Form

$$(7.9) \quad M(t, u) + N(t, u)\dot{u} = 0,$$

wobei  $M, N: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Abbildungen sind, so dass  $\left(\frac{M}{N}\right)$  ein Gradientenfeld ist. Sei  $(t_0, u_0) \in U$  so, dass  $N(t_0, u_0) \neq 0$  gilt. Dann besitzt das zugehörige AWP nach Satz 7.10 eine Lösung  $u$ . Ist  $\Psi$  ein Potential von  $\left(\frac{M}{N}\right)$ , dann gilt  $\frac{d}{dt}\Psi(t, u(t)) = 0$  wegen (7.9), d.h. es existiert eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  mit  $\Psi(t, u(t)) = K$  für alle  $t$  nahe bei  $t_0$ . Diese berechnet man mit der Anfangsbedingung:  $K = \Psi(t_0, u_0)$ . Die Gleichung  $\Psi(t, u(t)) = K$  liefert eine explizite Darstellung für  $u$ , falls sie sich nach  $u$  auflösen lässt. Falls nicht, dann erhält man zumindest eine implizite Darstellung des Trägers der Lösungskurve  $(t, u(t))$  als die Menge  $\Psi^{-1}(K)$ .

Sind  $M$  und  $N$  stetig differenzierbar und ist  $U$  ein Sterngebiet, dann ist (7.9) nach Mathe 2 (Satz 5.107) genau dann exakt, wenn  $\partial_u M = \partial_t N$  überall in  $U$  gilt. So kann man in der Regel die Exaktheit prüfen.

Im Falle, dass die Differentialgleichung (7.9) exakt ist, erhalten wir  $\Psi$  durch unbestimmte Integration von  $M$  bezüglich  $t$  und von  $N$  bezüglich  $u$  und einem abschließenden Vergleich der jeweils von der anderen Variablen abhängigen Integrationskonstanten.

**Beispiel 7.14.** Betrachte die Gleichung

$$(3u + e^t) + (3t + \cos(u))\dot{u} = 0.$$

Dann ist  $M(t, u) := 3u + e^t$  und  $N(t, u) := 3t + \cos(u)$ . Dabei gilt  $\partial_u M = 3 = \partial_t N$ , d.h. die Differentialgleichung ist exakt.

(i) Integrieren von  $M$  nach  $t$  liefert

$$\Psi(t, u) = \int^t (3u + e^t) dt = 3ut + e^t + g(u).$$

(ii) Integrieren von  $N$  nach  $u$  liefert

$$\Psi(t, u) = \int^u (3t + \cos(u)) du = 3tu + \sin(u) + h(t).$$

(iii) Vergleichen liefert das Potential  $\Psi(t, u) = 3tu + e^t + \sin u$ . Entlang der Lösungskurve gilt  $\Psi(t, u) = K$  für eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$ , die mit Hilfe der Anfangsbedingungen ermittelt werden kann.

Im Falle, dass (7.9) nicht exakt ist, kann die Gleichung häufig „exakt gemacht werden“. Hierfür multiplizieren wir (7.9) mit einem geeigneten Integrationsfaktor  $\mu: U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\mu \neq 0$  in  $U$  gilt und so dass

$$(7.10) \quad \mu(t, u)M(t, u) + \mu(t, u)N(t, u)\dot{u} = 0$$

exakt ist. Diese Gleichung ist wegen  $\mu \neq 0$  äquivalent zu (7.9), d.h. hier, dass die Lösung  $u$  einer Gleichung auch die andere Gleichung löst. Für stetig differenzierbare  $M, N, \mu$  und ein Sterngebiet  $U$  ist (7.10) genau dann exakt, wenn

$$\partial_u(\mu M) = \partial_t(\mu N)$$

gilt, d.h. wenn  $\mu$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$M\partial_u\mu - N\partial_t\mu + (\partial_u M - \partial_t N)\mu = 0$$

ist. Im Allgemeinen ist diese Gleichung nicht einfach zu lösen. Wenn allerdings

$$\frac{1}{M}(\partial_u M - \partial_t N)$$

unabhängig von  $t$  ist, dann ist auch  $\mu$  unabhängig von  $t$ , und somit ist nur noch die gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mu' + \frac{1}{M}(\partial_u M - \partial_t N)\mu = 0$$

zu lösen um  $\mu$  zu bestimmen. Analog bestimmt man unter Umständen einen Multiplikator  $\mu$ , der von  $u$  unabhängig ist.

**Beispiel 7.15.** Wir betrachten die Differentialgleichung  $tu + t^2\dot{u} = 0$ . In diesem Fall ist  $M(t, u) = tu$  und  $N(t, u) = t^2$  und es gilt

$$\partial_u M = t \neq \partial_t N = 2t.$$

Damit ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. Jedoch gilt

$$\frac{1}{M} (\partial_u M - \partial_t N) = \frac{1}{ut} (t - 2t) = -\frac{1}{u}.$$

Die Differentialgleichung für  $\mu$ , die es zu lösen gilt, ist demnach

$$\mu' - \frac{1}{u}\mu = 0,$$

welche die Lösung  $\mu(u) = u$  hat. Durch Multiplizieren der Differentialgleichung für  $u$  mit  $\mu(u) = u$  erhalten wir die exakte Differentialgleichung

$$tu^2 + t^2u\dot{u} = 0.$$

Es gilt:

- (i) Integrieren von  $uM$  nach  $t$  liefert

$$\Psi(t, u) = \int^t tu^2 dt = \frac{1}{2}t^2u^2 + g(u)$$

- (ii) Integrieren von  $uN$  nach  $u$  liefert

$$\Psi(t, u) = \int^u t^2u du = \frac{1}{2}t^2u^2 + h(t)$$

- (iii) Vergleichen liefert das Potential  $\Psi(t, u) = \frac{1}{2}t^2u^2$ . Und somit kann eine explizite Lösung der Gleichung mit Hilfe einer Fallunterscheidung abhängig vom Anfangswert gefunden werden.

### 7.2.3 Lineare Differentialgleichungen

In Mathe 2 hatten wir bereits gesehen, dass es für  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  eine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^N$$

gibt, welche durch  $u(t) = e^{At}u_0$  gegeben ist. Wegen Satz 7.10 ist diese Lösung eindeutig bestimmt. Im Folgenden werden wir *nicht-autonome lineare Differentialgleichungen*, d.h. wo  $A = A(t)$  von  $t$  abhängt und *inhomogene* lineare Differentialgleichungen, d.h. vom Typ  $\dot{u} = A(t)u + q(t)$  mit  $q \neq 0$ , näher untersuchen.

Zunächst betrachten wir den Fall  $N = 1$  und die nicht-autonome inhomogene lineare Differentialgleichung

$$(7.11) \quad \dot{u} + p(t)u = q(t),$$

wo  $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $I$  stetige Funktionen sind, und wir betrachten  $(t_0, u_0) \in U := I \times \mathbb{R}$ . Wir setzen  $f(t, x) := q(t) - p(t)x$ . Sei  $J$  ein beschränktes offenes Intervall mit  $t_0 \in J$  und  $\bar{J} \subseteq I$ . Dann existiert  $C := \max\{\max_{\bar{J}}|p|, \max_{\bar{J}}|q|\}$ . Es folgt

$$|f(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \text{für alle } (t, x) \in J \times \mathbb{R}.$$

Proposition 7.12 liefert also, dass  $u$  in  $J$  existiert. Da  $J$  mit obigen Eigenschaften beliebig gewählt war, existiert  $u$  in ganz  $I$ .

Wir setzen  $r(t) := \int_{t_0}^t p$ . Für  $q \equiv 0$ , also für die homogene Gleichung, liefert Beispiel 7.13(b)  $u(t) = u_0 e^{-r(t)}$ . Um eine Lösung für das inhomogene AWP zu finden, ist die Idee, statt der Konstanten  $u_0$  in der homogenen Lösung einen zeitabhängigen Faktor zu verwenden, also

$$u(t) = C(t)e^{-r(t)}$$

als Ansatz zu nehmen. Man spricht daher von der Methode der *Variation der Konstanten*. Ist dieser Ansatz eine Lösung, so gilt notwendig wegen  $\dot{r} = p$ :

$$q = \dot{u} + pu = e^{-r}(\dot{C} - Cp + Cp) = e^{-r}\dot{C}$$

und  $C(t_0) = u_0$ . Nach Umstellen und Integrieren erhalten wir also

$$C(t) = u_0 + \int_{t_0}^t qe^r$$

und insgesamt

$$u = \left( u_0 + \int_{t_0}^t qe^r \right) e^{-r}.$$

Man prüft leicht nach, dass dies andererseits wirklich eine Lösung des AWP von (7.11) ist. Oft formuliert man diesen Sachverhalt so: Sei

$$u_p = \left( \int_{t_0}^t qe^r \right) e^{-r},$$

eine *partikuläre Lösung* von (7.11) (also einfach irgendeine Lösung), definiert mit einer beliebigen Stammfunktion von  $qe^r$ . Dann erhält man alle Lösungen von (7.11) in der Form

$$u = ae^{-r} + u_p,$$

also als ein **Vielfaches der Lösung der homogenen Gleichung plus der partikulären Lösung**. Die konstante  $a$  wählt man so, dass die vorgegebenen Anfangswerte angenommen werden.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall  $N \in \mathbb{N}$  und nehmen an, dass  $I$  ein offenes Intervall ist und dass  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  und  $q: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig sind. Wie zuvor zeigt man mit Proposition 7.12, dass dann das Anfangswertproblem

$$(7.12) \quad \dot{u} = A(t)u + q(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

für  $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^N$  eine eindeutige Lösung besitzt, die auf ganz  $I$  existiert. Im homogenen Fall  $q \equiv 0$  ist die Abbildung  $\mathbb{R}^N \rightarrow C(I, \mathbb{R}^N)$ , welche für festes  $t_0$  jedem Anfangswert  $u_0$  die eindeutige Lösung von (7.12) zuordnet, offensichtlich linear und injektiv. Daher ist der lineare Raum der Lösungen von

$$(7.13) \quad \dot{u} = A(t)u$$

$N$ -dimensional. Sei  $U: I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  eine Matrixfunktion, deren Spalten aus Lösungen von (7.13) bestehen, also eine Lösung der Matrixgleichung

$$(7.14) \quad \dot{U} = A(t)U.$$

Die Funktion  $W(t) := \det(U(t))$  heißt dann *Wronskideterminante von  $U$* . Man kann zeigen, dass  $W$  die Differentialgleichung  $\dot{W} = \text{Spur}(A(t))W$  erfüllt, dass also wegen der Betrachtungen im Fall  $N = 1$

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) \, ds\right)$$

gilt. Insbesondere ist  $W(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  genau dann, wenn  $W(t_0) \neq 0$  gilt, in anderen Worten:  $U(t)$  ist invertierbar für alle  $t \in I$  genau dann, wenn  $U(t_0)$  invertierbar ist. In diesem Fall nennt man  $U$  ein *Fundamentalsystem von (7.13)*. Wählt man  $U$  so, dass  $U(t_0) = E_N$  (Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^N$ ) gilt (ersetzt man also  $U$  durch  $UU(t_0)^{-1}$ ), dann heißt  $U$  auch *kanonisches Fundamentalsystem*. Die Lösung von (7.13) mit Anfangswert  $(t_0, u_0)$  ist dann durch  $U(t)u_0$  gegeben. Im Allgemeinen ist die Bestimmung eines Fundamentalsystems schwierig. Kennt man allerdings eine Lösung von (7.13), dann kann dieses Problem mit dem *Reduktionsverfahren von d'Alembert* auf  $N - 1$  Dimensionen reduziert werden.

Um das Fundamentalsystem  $e^{tA}$  für konstantes  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  zu berechnen, geht man wie folgt vor: Seien  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $A$  mit (algebraischen) Vielfachheiten  $\ell_k \in \mathbb{N}$ . Dort, wo im Folgenden komplexwertige Lösungen entstehen, sind jeweils Real- und Imaginärteil reellwertige Lösungen, weil mit  $\lambda_k$  immer auch  $\overline{\lambda_k}$  ein Eigenwert ist.

- Existieren  $\ell_k$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_{\ell_k} \in \mathbb{C}^N$  zu  $\lambda_k$ , dann sind  $v_j e^{\lambda_k t}$ ,  $k = 1, 2, \dots, \ell_k$ , linear unabhängige Lösungen.
- Sei andernfalls  $v$  ein Eigenvektor, so dass  $(A - \lambda_k)w = v$  für ein  $w$  gilt. Dann ist  $e^{\lambda_k t}(tv + w)$  eine Lösung. Falls  $(A - \lambda_k)x = w$  für ein  $x$  gilt, dann ist  $e^{\lambda_k t}(\frac{1}{2}t^2v + tw + x)$  eine Lösung, usw. Auf diese Art und Weise erhält man  $\ell_k$  linear unabhängige Lösungen (indem man alle Eigenvektoren so verwendet).

Siehe [16, 21, 36] für eine ausführliche Beschreibung.

Für das inhomogene lineare Anfangswertproblem (7.12) liefert die Idee der Variation der Konstanten die Lösungsformel

$$(7.15) \quad u(t) = U(t) \left( u_0 + \int_{t_0}^t U(s)^{-1} q(s) \, ds \right)$$

wobei  $U$  das kanonische Fundamentalsystem von (7.13) sei. Im Spezialfall, das die Matrixfunktion  $A$  konstant ist, ergibt sich für die Lösung

$$(7.16) \quad u(t) = e^{tA}u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}q(s) \, ds.$$

### 7.3 Skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig die (skalare) Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$(7.17) \quad u^{(n)} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

mit dem Anfangswert

$$(7.18) \quad (u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})(t_0) = u_0 := (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Wir definieren  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

**Satz 7.16** (Reduktionsprinzip). *Eine Funktion  $u$  ist genau dann eine Lösung von (7.17), wenn*

$$(7.19) \quad v := \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(7.20) \quad \dot{v} = \tilde{f}(t, v)$$

ist.

*Beweis.* Dies folgt durch komponentenweise Betrachtung von (7.20). □

**Satz 7.17** (Existenz- und Eindeutigkeit). *Sei  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und lokal Lipschitzstetig in den  $n$  letzten Argumenten. Dann hat das Anfangswertproblem (7.17) und (7.18) eine maximale eindeutige Lösung.*

*Beweis.* Folgt sofort aus den Sätzen 7.16 und 7.10. □



### 7.3.1 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten zunächst die spezielle inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(7.21) \quad Lu := u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{u} + a_0u = Q(t)e^{ct}$$

mit dem Anfangswert (7.18) für  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ , und mit einem Polynom  $Q$  mit reellen Koeffizienten und  $c \in \mathbb{C}$  (dies erlaubt es, Inhomogenitäten mit Faktor  $\cos$  und  $\sin$  als Real- und Imaginärteil der unten konstruierten partikulären Lösung zu behandeln). Wie in Abschnitt 7.2.3 gezeigt existiert dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems in ganz  $\mathbb{R}$ . Die homogene Gleichung hat nach dem Reduktionsprinzip für  $v$  wie in (7.19) die Form  $\dot{v} = Av$ , mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

also  $\text{Spur}(A) = -a_{n-1}$ . Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 & \cdots & \dot{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Wronskideterminante  $W$  erfüllt

$$(7.22) \quad \dot{W} = -a_{n-1}W.$$

Sei  $P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$  das *charakteristische Polynom* von  $L$  mit  $m$  komplexen Nullstellen  $\lambda_k$  der Vielfachheit  $\ell_k$ . Aus dem Reduktionsprinzip, Satz 7.16, und der Lösung von linearen Systemen erster Ordnung ergibt sich als Fundamentalsystem

$$(7.23) \quad \{t^j e^{\lambda_k t} \mid k = 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, \dots, \ell_k - 1\}.$$

Um ein reelles Fundamentalsystem zu erhalten verwendet man wieder jeweils Real- und Imaginärteil.

Um eine partikuläre Lösung von (7.21) zu erhalten macht man den Ansatz

$$u = t^\ell (b_0 + b_1 t + \cdots + b_r t^r) e^{ct},$$

wo  $r \in \mathbb{N}_0$  der Grad von  $Q$  ist und  $b_0, \dots, b_r \in \mathbb{R}$ . Man wählt  $\ell = 0$ , falls  $P(c) \neq 0$  gilt und  $\ell$  die Vielfachheit der Nullstelle, falls  $P(c) = 0$  gilt. Für eine Summe von Inhomogenitäten berechnet man die partikulären Lösungen getrennt und summiert Sie dann auf.

Die allgemeine Lösung von (7.21) ist dann eine Linearkombination der Funktionen in (7.23) (an die Anfangsbedingung angepasst) plus die partikuläre Lösung.

Wir betrachten jetzt noch lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zeitabhängigen Koeffizienten:

$$(7.24) \quad \ddot{u} + a_1(t)\dot{u} + a_0(t)u = q(t).$$

Die Funktionen  $a_0, a_1, q$  seien auf einem offenen Intervall  $I$  stetig. Ist eine Lösung  $v$  der homogenen Gleichung ( $q \equiv 0$ ) bekannt (z.B. erraten oder vorgegeben), so ist der Ansatz von d'Alembert hier  $u = vw$ , um eine weitere, linear unabhängige, homogene Lösung zu finden. Für die zugehörige Wronskideterminante gilt

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} v & vw \\ \dot{v} & \dot{v}w + v\dot{w} \end{pmatrix} = v^2\dot{w},$$

also  $\dot{w} = W/v^2$ . Andererseits können wir  $W$  aus  $\dot{W} = -a_1(t)W$  bestimmen. Dann ist  $w$  eine Stammfunktion von  $W/v^2$  und wir erhalten das Fundamentalsystem  $\{v, vw\} = \{u_1, u_2\}$ . Eine partikuläre Lösung erhält man jetzt wieder mit der Methode der Variation der Konstanten. Konkret macht man den Ansatz

$$u = c_1(t)u_1 + c_2(t)u_2.$$

Dieser führt auf

$$\dot{c}_1 = -\frac{q(t)u_2}{W(t)} \quad \text{und} \quad \dot{c}_2 = \frac{q(t)u_1}{W(t)},$$

so dass man  $c_1$  und  $c_2$  durch Integration erhält.

## 7.4 Qualitative Theorie nichtlinearer Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt meist autonome Differentialgleichungen, d.h. Differentialgleichungen der Form

$$(7.25) \quad \dot{u} = f(u)$$

mit  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  lokal Lipschitzstetig und  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  offen. Sei

$$U := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times D \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}.$$

Wir definieren den *Fluss*  $\varphi: U \rightarrow D$  von (7.25) dadurch, dass für  $x \in D$  die Funktion  $(T^-(x), T^+(x)) \rightarrow D$  mit  $t \mapsto \varphi(t, x)$  nach Satz 7.10 die maximale Lösung des Anfangswertproblems (7.25) mit  $u(0) = x$  sei. Wir schreiben auch  $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ . In diesem Zusammenhang heißt  $\mathbb{R}^N$  auch *Phasenraum*. Gilt  $(T^-(x), T^+(x)) = \mathbb{R}$  für alle  $x \in D$ , dann ist  $U = \mathbb{R} \times D$  und wir sagen,  $\varphi$  sei ein *globaler Fluss*. Dies ist nach Proposition 7.12 zum Beispiel der Fall, wenn  $D = \mathbb{R}^N$  gilt und  $f$  linear beschränkt ist.

**Bemerkung 7.18.** Für den Fluss  $\varphi$  einer Differentialgleichung gilt stets

$$\varphi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^N},$$

da ja  $\varphi(\cdot, x)$  die Lösung mit Anfangswert  $x$  ist, also  $\varphi(0, x) = x$  gilt. Aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und aus Bemerkung 7.9 folgt ferner

$$\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x) \quad \text{falls } (s, x), (s + t, x) \in U.$$

Im Falle der globalen Existenz  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  gilt also  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$ .

**Satz 7.19.** Die Menge  $U$  ist offen und  $\varphi$  ist lokal Lipschitzstetig.

*Beweis.* Wir beweisen dies nur im Fall  $D = \mathbb{R}^N$  und  $f$  Lipschitzstetig, mit Lipschitzkonstante  $M$ . In diesem Fall ist  $f$  linear beschränkt, denn  $|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq M|x - 0| + |f(0)|$ . Wegen Satz 7.10 ist der Fluss also global, d.h.  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

Sei  $R > 0$ . Für  $(t, x_1), (t, x_2) \in [-R, R] \times \overline{B}_R(0)$  folgt aus Bemerkung 7.2(c) im Fall  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)| &\leq |x_1 - x_2| + \int_0^t |f(\varphi(s, x_1)) - f(\varphi(s, x_2))| \, ds \\ &\leq |x_1 - x_2| + M \int_0^t |\varphi(s, x_1) - \varphi(s, x_2)| \, ds. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall liefert in dieser Situation also

$$(7.26) \quad |\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)| \leq e^{Mt} |x_1 - x_2| \leq e^{MR} |x_1 - x_2|.$$

Der Fall  $t < 0$  geht analog und liefert dieselbe Abschätzung.

Wir betrachten die kompakte Menge  $K := \varphi([-R, R], 0)$  und setzen  $L_1 := \max_K |f|$ . Für  $(t, x) \in [-R, R] \times \overline{B}_R(0)$  folgt aus (7.26)

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x)| &\leq |x| + \int_0^t |f(\varphi(s, x))| \, ds \\ &\leq |x| + \int_0^t (|f(\varphi(s, x)) - f(\varphi(s, 0))| + \underbrace{|f(\varphi(s, 0))|}_{\in K}) \, ds \\ &\leq R(1 + L_1) + M \int_0^t |\varphi(s, x) - \varphi(s, 0)| \, ds \\ &\leq R(1 + L_1) + Me^{MR} \int_0^t |x| \, ds \\ &\leq R(1 + L_1) + Me^{MR} R^2 =: L_2. \end{aligned}$$

Jetzt sei  $L_3 := \max\{|f(x)| \mid |x| \leq L_2\}$ . Dann liefert die letzte Ungleichung für  $(t_1, x), (t_2, x) \in [-R, R] \times \overline{B}_R(0)$  unter der Annahme  $t_1 \leq t_2$

$$(7.27) \quad |\varphi(t_1, x) - \varphi(t_2, x)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(\varphi(s, x))| \, ds \leq L_3 |t_2 - t_1|.$$

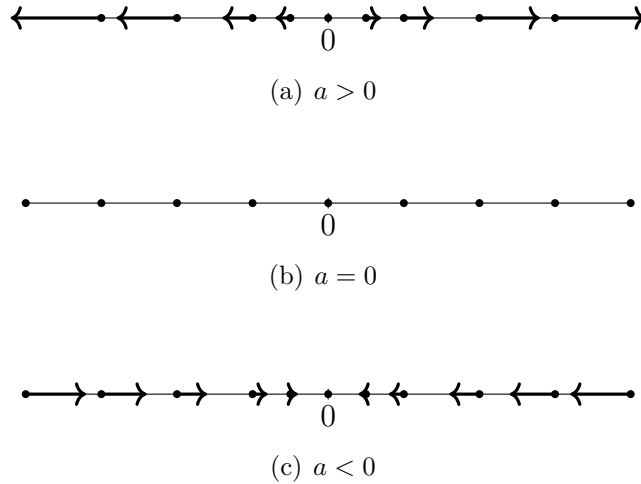


Abbildung 7.1: Richtungsfeld von  $\dot{u} = au$

Zusammen liefern (7.26) und (7.27), dass  $\varphi$  auf  $[-R, R] \times \overline{B}_R(0)$  Lipschitzstetig ist: Für  $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in [-R, R] \times \overline{B}_R(0)$  gilt nämlich jetzt

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_2, x_2)| &\leq |\varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_1, x_2)| + |\varphi(t_1, x_2) - \varphi(t_2, x_2)| \\
 &\leq e^{MR}|x_1 - x_2| + L_3|t_1 - t_2| \leq L_4|(t_1, x_1) - (t_2, x_2)|.
 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Äquivalenz aller Normen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  mit einer geeigneten Konstante  $L_4$ . Da  $R$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, sich die Gleichung (7.25) zu veranschaulichen. Eine Möglichkeit ist es, das Vektorfeld  $f$  im Phasenraum einzuzichnen. Da eine Lösungskurve durch  $x$  stets der Richtung des Vektors  $f(x)$  folgt, spricht man hier vom *Richtungsfeld*. Alternativ kann auch die Kurve  $t \mapsto \varphi_t(x)$  für verschiedene  $x$  im Phasenraum eingezeichnet werden. Diese Veranschaulichung wird auch als *Phasenporträt* des Flusses bezeichnet und für jedes festes  $u_0$  wird die Kurve  $t \mapsto \varphi_t(u_0)$  als *Orbit* oder *Trajektorie* bezeichnet.

### Beispiel 7.20.

- (a) Wir betrachten zunächst den einfachen Fall  $\dot{u} = au$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist der Phasenraum gegeben durch  $\mathbb{R}$ , siehe Abb. 7.1. Ein Phasenportrait ergibt hier wenig Sinn, da die Trajektorien einfach Intervalle darstellen und keine interessante Information enthalten. Sinnvoll wäre hier eher, jeweils den Graphen einer Lösung aufzuzeichnen.
- (b) Wir betrachten die Gleichung  $\dot{u} = f(u) = \frac{1}{2}(u - u^2)$ . Dann ist der Phasenraum gegeben durch  $\mathbb{R}$ , siehe Abb. 7.2.
- (c) Wir betrachten  $\ddot{v} + 2p\dot{v} + \omega^2 v = 0$ ,  $\omega, p \geq 0$ ,  $\omega^2 + p^2 > 0$ . Mit Satz 7.16 führen wir dies auf die Gleichung

$$(7.28) \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

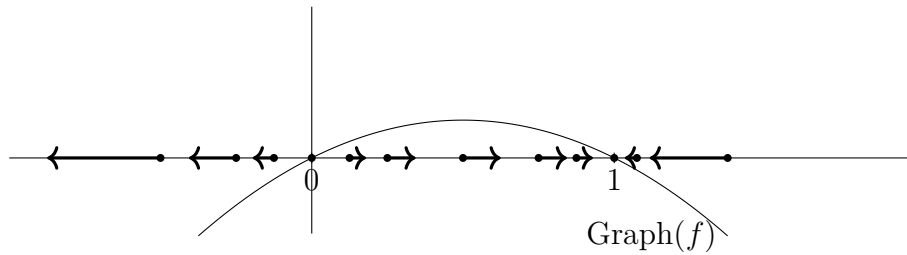


Abbildung 7.2: Richtungsfeld von  $\dot{u} = f(u) := \frac{1}{2}(u - u^2)$

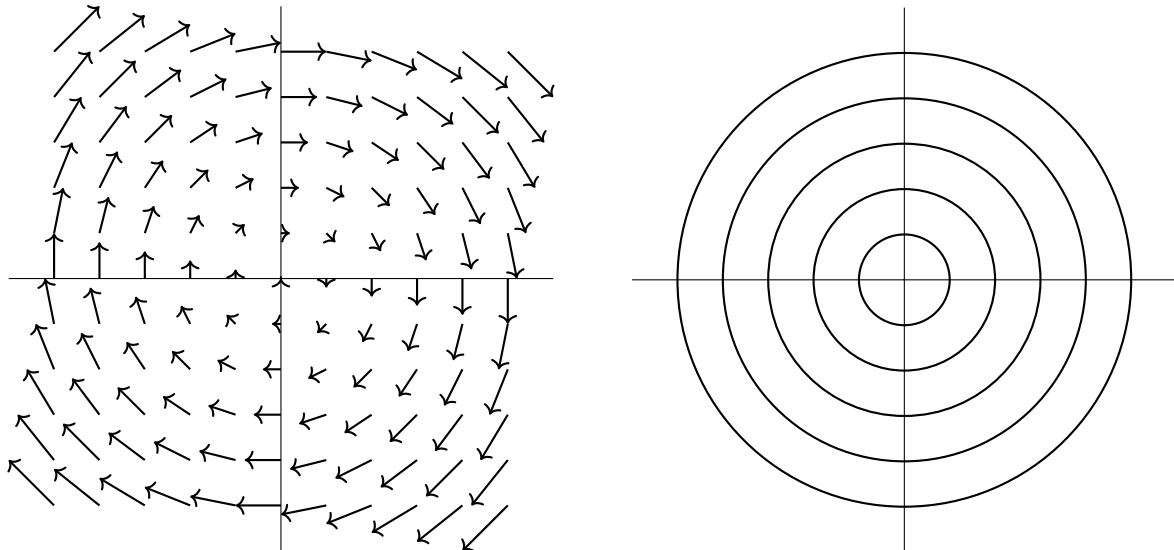


Abbildung 7.3:  $0 = p < \omega$ : Richtungsfeld und Phasenportrait

zurück. Der Phasenraum ist dann durch  $\mathbb{R}^2$  gegeben.

- (a) Fall  $p = 0$ , keine Dämpfung: Siehe Abb. 7.3.
- (b) Fall  $0 < p < \omega$ , gedämpfte Schwingung: Siehe Abb. 7.4.
- (c) Fall  $0 < \omega < p$ , starke Dämpfung: siehe Abb. 7.5.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösungen langfristig auf Änderungen der Anfangsbedingung reagieren. Für beschränkte Zeiten zeigt die lokale Lipschitzstetigkeit des Flusses, dass sich die Trajektorien in stetiger Abhängigkeit von den Anfangswerten verändern. Interessiert man sich jedoch für (positiv) globale Lösungen, das heißt, Lösungen, die für alle positiven Zeiten existieren, dann ist diese Frage nicht so einfach zu beantworten und führt uns auf den Begriff der *Stabilität*:

**Definition 7.21.** Es sei  $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(7.29) \quad \dot{u} = f(t, u).$$

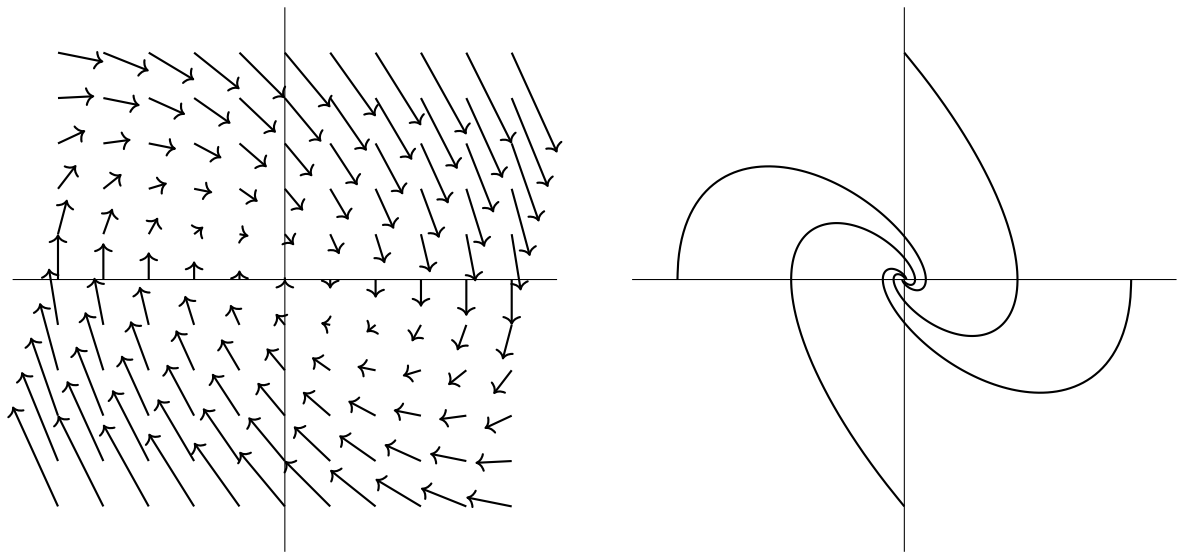


Abbildung 7.4:  $0 < p < \omega$ : Richtungsfeld und Phasenportrait

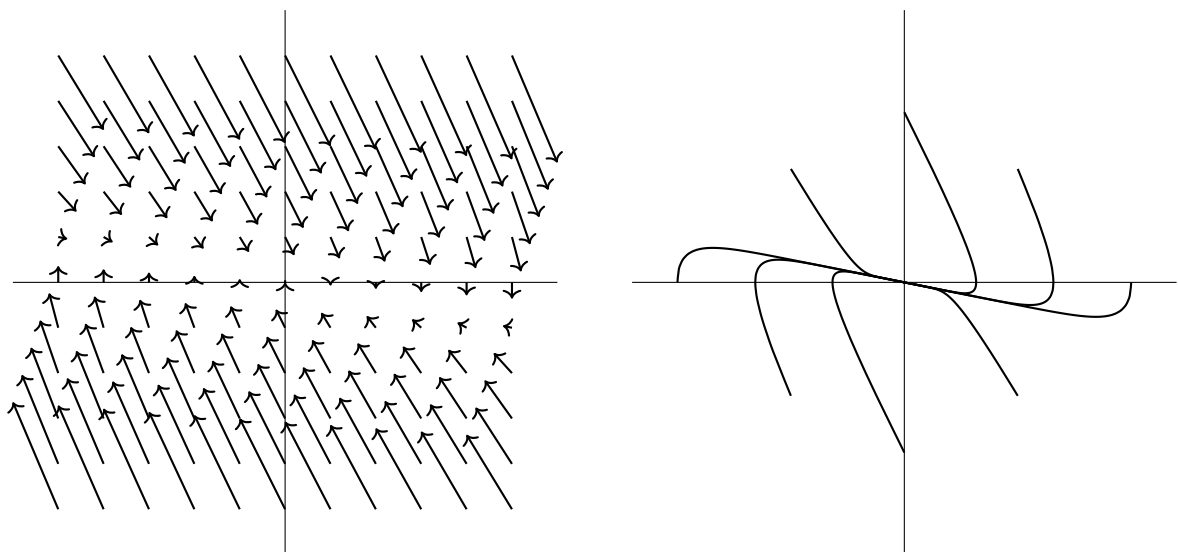


Abbildung 7.5:  $0 < \omega < p$ : Richtungsfeld und Phasenportrait

- (a) Eine Lösung  $u$  von (7.29) auf  $[0, \infty)$  heißt *stabil*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit Folgender Eigenschaft: Zu jedem Startwert  $\tilde{u}(0) \in \mathbb{R}^N$  mit  $|u(0) - \tilde{u}(0)| \leq \delta$  existiert eine Lösung  $\tilde{u}$  von (7.29) auf  $[0, \infty)$ , und es gilt

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

- (b) Eine Lösung  $u$  von (7.29) heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und  $\delta > 0$  existiert, so dass für jeden Startwert  $\tilde{u}(0)$  mit  $|u(0) - \tilde{u}(0)| \leq \delta$  gilt

$$(7.30) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - \tilde{u}(t)| = 0.$$

- (c) Eine Lösung  $u$  heißt *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

Wir werden uns im Folgenden auf die Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichtslösungen autonomer Differentialgleichungen einschränken. Ist  $u_0$  eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung, so nennt man  $u_0$  auch einen (*Punkt-*)*Attraktor*. Durch Betrachtung von  $\dot{u} = f(u - u_0)$  können wir stets  $u_0 = 0$  annehmen. Dementsprechend werden wir im Folgenden stets untersuchen, ob die **triviale Lösung** stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

**Beispiel 7.22.** Wir betrachten nun die Stabilität einiger Gleichgewichtslösungen aus Beispiel 7.20.

- (a) Für die Gleichung  $\dot{u} = au$  ist  $u \equiv 0$  eine Gleichgewichtslösung (die einzige, falls  $a \neq 0$ ). Da  $\varphi_t(u) = ue^{at}$  gilt, folgt

$$u \equiv 0 \text{ ist } \begin{cases} \text{stabil, aber nicht asymptotisch stabil für } a = 0, \\ \text{asymptotisch stabil für } a < 0, \\ \text{instabil für } a > 0. \end{cases}$$

- (b) Für die Gleichung  $\dot{u} = u - u^2$  sind  $u \equiv 0$  und  $u \equiv 1$  die Gleichgewichtslösungen. Dabei ist 0 instabil und 1 asymptotisch stabil.

- (c) Für die lineare autonome Differentialgleichung 2. Ordnung  $\ddot{v} + 2p\dot{v} + \omega^2 v = 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $p \geq 0$  gilt:

- (a) Für  $p = 0$  ist im reduzierten System im  $\mathbb{R}^2$  die Lösung  $(0, 0)$  stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

- (b) Für  $p > 0$  ist der Punkt  $(0, 0)$  asymptotisch stabil.

### 7.4.1 Lineare autonome Systeme

**Lemma 7.23.** *Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , gemäß Vielfachheit mit Mehrfachnennungen. Zu  $\alpha > \gamma := \max_{j=1}^n \operatorname{Re}(\lambda_j)$  existiert  $c > 0$  mit<sup>1</sup>*

$$\|e^{At}\| \leq ce^{\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

<sup>1</sup>Erinnerung: Für eine Matrix  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist  $\|B\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|Bv|}{|v|}$ .

*Beweis.* Nach Abschnitt 7.2.3 hat das kanonische Fundamentalsystem  $e^{tA}$  von  $\dot{u} = Au$  Matrixeinträge (Koordinaten) der Form  $t \mapsto \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} P_j(t)$ , wobei  $P_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jeweils ein Polynom vom Grad  $\leq n - 1$  ist. Es folgt

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \left| \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} P_j(t) \right| \leq \sup_{t \geq 0} e^{(\gamma - \alpha)t} \sum_{j=1}^n |P_j(t)| < \infty,$$

wegen  $\gamma - \alpha < 0$ . Die Äquivalenz aller Normen in  $\mathbb{C}^n$  liefert also mit geeignetem  $C > 0$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \|e^{tA}\| \leq C \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \|e^{tA}\|_\infty < \infty.$$

Hier bedeutet  $\|\cdot\|_\infty$  wie immer das Maximum aller Matrixeinträge. □

**Satz 7.24.** *Seien  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\gamma := \max\{\operatorname{Re} \lambda_j \mid \lambda_j \text{ Eigenwert von } A\}$ . Wir betrachten die Gleichung  $\dot{u} = Au$ . Dann gilt*

- (a) *Genau dann ist  $\gamma < 0$ , wenn die triviale Lösung  $u \equiv 0$  asymptotisch stabil ist.*
- (b) *Wenn  $\gamma > 0$  ist, ist die triviale Lösung  $u \equiv 0$  instabil.*
- (c) *Im Fall  $\gamma = 0$  ist keine allgemeine Aussage möglich.*

*Beweis.* **(a):** „ $\Rightarrow$ “: Falls  $\gamma < 0$  ist, folgt die asymptotische Stabilität aus Lemma 7.23, denn jede Lösung lässt sich als  $u(t) = e^{At}u(0)$  darstellen. Ist nämlich  $\alpha := \frac{\gamma}{2} > \gamma$  und  $c$  wie in Lemma 7.23, so folgt für  $|u(0)| \leq \frac{\varepsilon}{c}$ :

$$|u(t)| \leq \|e^{At}\| |u(0)| \leq c e^{\alpha t} \frac{\varepsilon}{c} \leq e^{\alpha t} \varepsilon \leq \varepsilon \quad \text{für } t \geq 0,$$

da  $\alpha < 0$ . Insbesondere folgt hieraus  $\lim_{t \rightarrow 0} |u(t)| \rightarrow 0$ .

**(b):** Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  und ist  $v_0 \neq 0$  ein zugehöriger Eigenvektor, so folgt für die Lösung  $v(t) := e^{\lambda t} v_0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |v_0| e^{\operatorname{Re} \lambda t} = \infty.$$

Es folgt (b).

**(a):** „ $\Leftarrow$ “: Ist  $\gamma \geq 0$ , so existiert wie im Beweis von (b) eine Lösung  $v(t) = e^{\lambda t} v_0$  mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  und  $v_0 \neq 0$ . Für diese Lösung gilt  $v(t) \not\rightarrow 0$ . Es folgt (a).

**(c):** Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ist die triviale Lösung stabil. Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  existiert die Lösung  $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  und somit ist die triviale Lösung instabil. Es folgt (c). □

## 7.4.2 Nichtlineare autonome Systeme

Wir wollen nun die Resultate des vorherigen Abschnitts anwenden, um die Gleichgewichtspunkte von (7.25) zu untersuchen. Hierfür sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  mit  $f(0) = 0$ . Dann



besitzt die Gleichung  $\dot{u} = f(u)$  die Gleichgewichtslösung  $u \equiv 0$ . Ferner sei  $A := Df(0)$  die Jacobimatrix von  $f$  in 0. Nach Definition der Differenzierbarkeit können wir daher

$$(7.31) \quad f(u) = Au + g(u) \quad \text{mit} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{|g(u)|}{|u|} = 0$$

schreiben. Der nächste Satz zeigt, dass die Eigenwerte der Jacobimatrix von  $f$  in 0 die Dynamik des Systems nahe bei 0 bestimmen:

**Satz 7.25.** *Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  mit  $f(0) = 0$  und  $A := Df(0)$ , so dass (7.31) für eine Funktion  $g$  gilt. Ferner sei  $\gamma := \max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ . Dann gilt für die triviale Lösung  $u \equiv 0$  von  $\dot{u} = f(u)$ :*

- (a) *Ist  $\gamma < 0$ , so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil.*
- (b) *Ist  $\gamma > 0$ , so ist die triviale Lösung instabil.*
- (c) *Ist  $\gamma = 0$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.*

*Beweis.* Siehe [36, §29]. □

**Bemerkung 7.26.** Zu beachten ist, dass im Gegensatz zu Satz 7.24(a) die Aussage von Satz 7.25(a) keine Äquivalenz liefert. Betrachte hierfür speziell  $f(x) = -\frac{x}{|x|}e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$ , dann ist  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , jedoch ist  $u \equiv 0$  asymptotisch stabil für  $\dot{u} = f(u)$  (s.u.).

**Bemerkung 7.27.** Beachte, dass die Stabilitätsaussagen aus Satz 7.25 ebenso für nichttriviale Gleichgewichtslösungen  $u_0$  gelten aufgrund der Translation um  $u_0$ , d.h. die Stabilität der Gleichgewichtslösung  $u_0$  hängt von den Eigenwerten von  $Df(u_0)$ , wie in Satz 7.25 beschrieben, ab.

**Beispiel 7.28.** Als eine Anwendung von Satz 7.25 betrachten wir die folgende Lotka-Volterra Gleichung. Hierbei seien  $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$  und wir untersuchen

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -a_1 u_1 + b_1 u_1 u_2 \\ \dot{u}_2 = a_2 u_2 - b_2 u_1 u_2 \end{cases}$$

Hierbei beschreibt  $u_1$  eine Population von Räubern, die mit Rate  $a_1$  sterben, wenn sie nicht genug zu fressen haben und  $u_2$  beschreibt die Population von einer Beute, die mit der Rate  $a_2$  wächst.  $b_2$  ist die Rate, abhängig von  $u_1$  und  $u_2$ , wie die Räuber die Beute fressen und  $b_1$  ist die Rate, wie dies zum Überleben der Räuber hilft.

Die nichtlineare rechte Seite ist dann

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -a_1 u_1 + b_1 u_1 u_2 \\ a_2 u_2 - b_2 u_1 u_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Df(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -a_1 + b_1 u_2 & b_1 u_1 \\ -b_2 u_2 & a_2 - b_2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt

$$f(u_1, u_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a_2}{b_2} \\ \frac{a_1}{b_1} \end{pmatrix} \right\}.$$

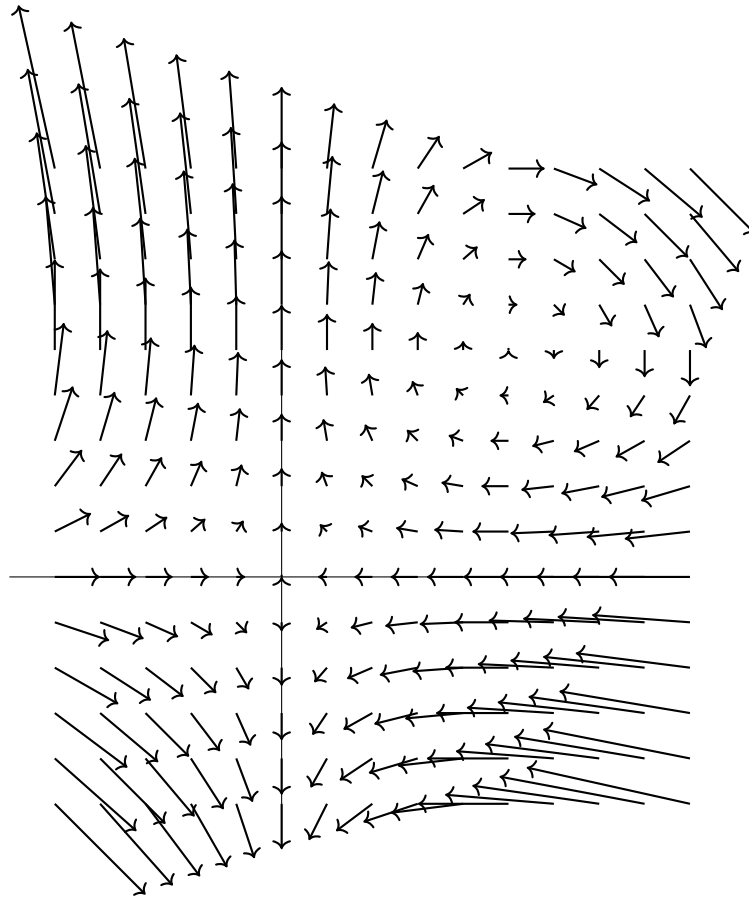


Abbildung 7.6: Beispiel 7.28 mit  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 1$

Also gilt für die triviale Lösung:

$$f(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind die Eigenwerte von  $Df(0,0)$  die Werte  $a_2, -a_1$  und da  $a_2 > 0$  gilt folgt aus Satz 7.25, dass die triviale Lösung instabil ist.

Mit  $u^* = (\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1})$  folgt

$$f(u^*) = 0 \quad \text{und} \quad Df(u^*) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \frac{a_2}{b_2} \\ -b_2 \frac{a_1}{b_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind die Eigenwerte von  $Df(u^*)$  gegeben durch  $\pm i\sqrt{a_1 a_2}$ . Da diese rein imaginär sind, können wir für diesen Fall aus Satz 7.25 keine Aussage über die Stabilität von  $u^*$  machen. Wir können jedoch zur groben Einschätzung das Richtungsfeld heranziehen, siehe Abb. 7.6.

### 7.4.3 Die Lyapunovfunktion

Die in Satz 7.25 enthaltene Methode zur Analyse der Gleichgewichtslösungen wird auch *Linearisierung* genannt. Im Folgenden wollen wir noch eine weitere solche Methode betrachten.

Hierfür seien  $p, \omega > 0$  und wir betrachten die Schwingung

$$\ddot{v} + 2p\dot{v} + \omega^2 v = 0$$

bzw. das äquivalente System

$$(7.32) \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = -2pu_2 - \omega^2 u_1. \end{cases}$$

Aus den Abbildungen 7.4 und 7.5 ist anschaulich klar, dass 0 ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Dies folgt genauer aus Satz 7.25 und daraus, dass die Eigenwerte  $\lambda = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}$  dann negativen Realteil haben. Um die physikalische Stabilität einzusehen, kann man auch die Energie des schwingenden Teilchens berechnen:

$$(7.33) \quad E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\omega^2}{2}u_1^2.$$

Die Energie hat dabei im Gleichgewichtspunkt ein absolutes Minimum und ist längs der Trajektorie wegen der Reibung streng monoton fallend:

$$\frac{d}{dt}E(u_1, u_2) = u_2\dot{u}_2 + \omega^2 u_1\dot{u}_1 \stackrel{(7.32)}{=} u_2(-2pu_2 - \omega^2 u_1) + \omega^2 u_1 u_2 = -2pu_2^2 \leq 0,$$

und  $< 0$  für  $u_2 \neq 0$ . Folglich ist zu erwarten, dass das schwingende Teilchen gegen die Ruhelage strebt.

**Definition 7.29.** Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  und es gelte  $f(u^*) = 0$ . Eine in einer Umgebung  $U$  von  $u^*$  definierte Funktion  $E \in C^1(U)$  heißt *Lyapunovfunktion (für  $f$ )*, falls

- (i)  $E$  bei  $u^*$  ein striktes globales Minimum besitzt und
- (ii) für die Funktion  $\partial E: u \mapsto \langle \nabla E(u), f(u) \rangle \leq 0$  für alle  $u \in U$  gilt.

Gilt statt (ii) sogar die stärkere Bedingung  $\partial E(u) < 0$  für alle  $u \in U \setminus \{u^*\}$ , so heißt  $E$  *strikte Lyapunovfunktion (für  $f$ )*.

**Bemerkung 7.30.** Die Bedeutung der Funktion  $\partial E$  lässt sich wie folgt erklären: Löst  $u$  die Gleichung  $\dot{u} = f(u)$  und existiert eine Lyapunovfunktion für  $f$ , so gilt für die zeitliche Ableitung längs der Trajektorie  $u$  in  $E$ :

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = \langle \nabla E(u(t)), \dot{u}(t) \rangle = \langle \nabla E(u(t)), f(u(t)) \rangle = \partial E(u(t)).$$

Die zweite Bedingung der Lyapunovfunktion besagt also, dass  $E$  längs der Trajektorie abnimmt.

**Satz 7.31.** Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  und es gelte  $f(u^*) = 0$ . Falls es eine Lyapunovfunktion  $E$  gibt, ist  $u^*$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt der Gleichung  $\dot{u} = f(u)$ . Ist  $E$  eine strikte Lyapunovfunktion, so ist  $u^*$  ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

*Beweis.* Siehe z.B. [21, Satz 67.1]. □

**Beispiel 7.32.** (a) Für die Gleichung (7.32) ist  $E(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\omega^2}{2}u_1^2$  eine Lyapunovfunktion.

(b) Bemerkung 7.26 lässt sich zeigen, indem man die Lyapunovfunktion  $x \mapsto x^2$  betrachtet und dann Satz 7.31 anwendet.

(c) Wir betrachten wieder das Räuber-Beute Modell aus Beispiel 7.28. Wir versuchen nun eine Lyapunovfunktion in einer Umgebung von  $u^* = (\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1})$  als

$$E(u_1, u_2) = F_1(u_1) + F_2(u_2)$$

anzusetzen. Man erhält dann

$$\partial E(u_1, u_2) = F_1'(u_1)(-a_1u_1 + b_1u_1u_2) + F_2'(u_2)(a_2u_2 - b_2u_1u_2).$$

Also ist  $\partial E(u_1, u_2) = 0$  genau dann, wenn

$$F_1'(u_1) \frac{u_1}{a_2 - b_2u_1} = -F_2'(u_2) \frac{u_2}{-a_1 + b_1u_2}$$

gilt. Dies ist zum Beispiel durch

$$F_1'(u_1) = b_2 - \frac{a_2}{u_1}, \quad F_2'(u_2) = b_1 - \frac{a_1}{u_2}$$

erfüllt. Wir wählen also

$$\begin{aligned} F_1(u_1) &= b_2u_1 - a_2 \log u_1 \\ F_2(u_2) &= b_1u_2 - a_1 \log u_2 \\ E(u_1, u_2) &= b_2u_1 - a_2 \log u_1 + b_1u_2 - a_1 \log u_2. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat bei  $u^*$  ein lokales Minimum, da  $\nabla E(u^*) = 0$  und für die Hessematrix

$$H_E(u^*) = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{u_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{u_2^2} \end{pmatrix} \Big|_{(u=u^*)} = \begin{pmatrix} \frac{b_2^2}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{b_1^2}{a_1} \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Es folgt mit Satz 7.31, dass  $u^*$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Man kann zeigen, dass die Lösungen des Lotka-Volterra-Systems nahe bei  $u^*$  periodisch sind und auf den Kurven mit  $E(u) = \text{const.}$  verlaufen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197 (80c:30001)
- [2] Daniel Alpay, *A complex analysis problem book*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, Second edition [of MR2848640]. MR 3560222
- [3] Herbert Amann and Joachim Escher, *Analysis. II*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo. MR 2419362
- [4] ———, *Analysis. III*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo. MR 2500068
- [5] Michael Artin, *Algebra*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, Translated from the 1991 English original by Annette A'Campo. MR 1266624
- [6] Nakhlé H. Asmar and Loukas Grafakos, *Complex analysis with applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2018. MR 3839603
- [7] Martin Barner and Friedrich Flohr, *Analysis. II*, second ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989. MR 1091712
- [8] Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, second ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992. MR 1181881
- [9] Christian Blatter, *Analysis. II*, second ed., Heidelberger Taschenbücher [Heidelberg Paperbacks], vol. 152, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. MR 592590
- [10] Theodor Bröcker, *Analysis. II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992. MR 1204000
- [11] ———, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics], Birkhäuser Verlag, Basel, 2003, Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. [A textbook for physicists and mathematicians]. MR 1992380
- [12] R. Courant, *Differential and integral calculus. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, Translated from the German by E. J. McShane, Reprint of the 1936 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1009559

- [13] Kurt Endl and Wolfgang Luh, *Analysis. II*, fourth ed., Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978, Eine integrierte Darstellung, Studien-Texte: Mathematik. MR 537036
- [14] Wolfgang Fischer and Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 47, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980, Aufbaukurs Mathematik. MR 554918
- [15] Otto Forster, *Analysis 2. Differentialrechnung im  $\mathbf{R}^n$* , Verlag Vieweg, Braunschweig, 1977, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Rororo Vieweg: Mathematik Grundkurs, No. 31. MR 0492102
- [16] ———, *Analysis. 3*, fifth ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009, Integralrechnung im  $\mathbf{R}^n$  mit Anwendungen. [Integral calculus in  $\mathbf{R}^n$  with applications]. MR 2530638
- [17] Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Complex analysis*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR 2513384 (2012a:30002)
- [18] Hans Grauert and Hans-Christoph Grunau, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999. MR 1725707
- [19] Robert E. Greene and Steven G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR 2215872 (2006m:30001)
- [20] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, sixth ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1991. MR 1147182
- [21] ———, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, fifth ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 2006, Einführung in Lehre und Gebrauch. [Introduction to theory and application]. MR 2382060
- [22] ———, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, revised ed., Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009. MR 2502662
- [23] Erich Kamke, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977, Lösungsmethoden und Lösungen. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Neunte Auflage, Mit einem Vorwort von Detlef Kamke. MR 0466672
- [24] Max Köcher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [25] Konrad Königsberger, *Analysis. 2*, Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993, Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics]. MR 1251736

- [26] Steven G. Krantz, *Complex variables*, Textbooks in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008, A physical approach with applications and MATLAB<sup>®</sup>. MR 2503204
- [27] Serge Lang, *Complex analysis*, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1999. MR 1659317 (99i:30001)
- [28] Elliott H. Lieb and Michael Loss, *Analysis*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1817225
- [29] Ernst Peschl, *Funktionentheorie. Erster Band*, B.I.Hochschultaschenbücher, Band 131/131a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967. MR 0228660
- [30] Peter Plaschko and Klaus Brod, *Höhere mathematische Methoden für Ingenieure und Physiker*, Hochschultext. [University Textbooks], Springer-Verlag, Berlin, 1989. MR 1010041
- [31] H. A. Priestley, *Introduction to complex analysis*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 2003. MR 2014542 (2004i:30001)
- [32] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie. I*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 753290
- [33] ———, *Funktionentheorie. II*, Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics], vol. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1991. MR 1150243
- [34] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR MR924157 (88k:00002)
- [35] Heinz W. Trapp, *Funktionentheorie einer Veränderlichen*, Osnabrücker Studien zur Mathematik. [Osnabrück Studies in Mathematics], Universitätsverlag Rasch, Osnabrück, 1996. MR 1398185
- [36] Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, fifth ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung. [An introduction]. MR 1231977
- [37] Wolfgang Walter, *Analysis 2*, Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [38] Dirk Werner, *Einführung in die höhere Analysis*, corrected ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 2009, Topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis. [Topological spaces, function theory, ordinary differential equations, measure and integration theory, functional analysis]. MR 2730632