Lineare Partielle Differentialgleichungen

Nils Ackermann

WiSe 2016/2017

1 Funktionalanalysis

1.1 Banachräume

1.1 Definition. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine *Norm* in E ist eine Abbildung $E \to [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0$ genau dann wenn $x = 0$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in E$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$.

Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ nennt man einen *normierten Raum*. Die Norm induziert eine Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ auf E. Falls (E, d) damit ein **vollständiger** metrischer Raum ist, so nennt man $(E, \|\cdot\|)$ einen *Banachraum*.

Notation. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
U_r(x) &:= U_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} && \textit{offene Kugel} \\
B_r(x) &:= B_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} && \textit{abgeschlossene Kugel} \\
S_r(x) &:= S_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\} && \textit{Sphäre}
\end{aligned}$$

Für einen normierten Raum X und $x = 0$ unterdrücken wir x in der Schreibung: $U_r := U_r(0)$, $U_r X := U_r(0; X)$, etc.

1.2 Definition. Sei E ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen in E. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ *äquivalente Normen* falls Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \tag{1.1}$$

für alle $x \in E$.

1.3 Definition. Seien E, F normierte Räume und sei $L\colon E \to F$ ein linearer Operator. Dann heißt L *beschränkt* falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert so dass gilt:

$$\|Lx\|_F \leq C \|x\|_E \qquad \text{für alle } x \in E. \tag{1.2}$$

Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt *beschränkt*, falls $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.

1.4 Proposition. *Seien E, F normierte Räume und sei $L\colon E \to F$ linear. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *L ist beschränkt*

(ii) *L ist stetig*

(iii) *$Lx_n \to 0$ falls $x_n \to 0$*

(iv) *es gibt $r > 0$ so dass $L(U_r E) \subseteq U_1 F$.*

(v) *$L(A)$ ist beschränkt für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq E$.*

1.5 Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum endlicher Dimension.*

(a) *$A \subseteq E$ ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.*

(b) *Falls $\|\cdot\|_2$ eine andere Norm auf E ist, dann sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen.*

Beweis. Sei N die Dimension von E, sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ eine Basis von E und sei $L\colon \mathbb{R}^N \to E$ durch

$$(x^1, x^2, \ldots, x^N) \mapsto \sum_{k=1}^{N} x^k e_k$$

gegeben. Dann ist L ein linearer Isomorphismus. Wir zeigen, dass L dann auch ein Homöomorphismus ist (d.h., L und L^{-1} sind beide stetig), wobei $\mathbb{R}^N$ mit der Norm

$$|x|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x^k)^2}$$

ausgestattet sei.

Falls $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^N$, dann gilt $x_n^k \to x^k$ für $k = 1, 2, \ldots, N$. Wegen der Stetigkeit der algebraischen Verknüpfungen folgt

$$Lx_n = \sum_{k=1}^{N} x_n^k e_k \to \sum_{k=1}^{N} x^k e_k = Lx$$

in E und somit die Stetigkeit von L. Da $S_1\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$ kompakt ist, ist auch $L(S_1\mathbb{R}^N)$ kompakt in E. Wegen $0 \notin L(S_1\mathbb{R}^N)$ folgt $C := \min_{x \in S_1\mathbb{R}^N} \|Lx\|_E > 0$ (das Minimum existiert wegen der Stetigkeit der Norm und der Kompaktheit von $L(S_1\mathbb{R}^N)$). Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$:

$$\left\| L \frac{x}{|x|_2} \right\|_E \geq C$$

und daher

$$|x|_2 \leq \frac{1}{C} \|Lx\|_E$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Wir schlussfolgern, dass für alle $y \in E$ und $x := L^{-1}y$

$$|L^{-1}y|_2 \leq \frac{1}{C} \|y\|_E$$

gilt, das heißt, dass L^{-1} stetig ist.

(a): Es ist einfach zu sehen, dass eine kompakte Teilmenge von E notwendigerweise beschränkt und abgeschlossen ist.

Sei umgekehrt $A \subseteq E$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist $M := L^{-1}(A)$ beschränkt weil L^{-1} beschränkt ist. Außerdem ist M als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung selber abgeschlossenen. Nach dem Satz von Heine-Borel ist also M und somit auch A als Bild von M unter der stetigen Abbildung L kompakt.

(b): Wir schreiben $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|$. Da L und L^{-1} bezüglich beider Normen stetig sind, gibt es Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ so dass

$$C_1|x|_2 \le \|Lx\|_1 \le C_2|x|_2$$
$$C_3|x|_2 \le \|Lx\|_2 \le C_4|x|_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Daraus folgt für alle $y \in E$:

$$\frac{C_3}{C_2}\|y\|_1 \le C_3|L^{-1}y|_2 \le \|y\|_2 \le C_4|L^{-1}y|_2 \le \frac{C_4}{C_1}\|y\|_1.$$

□

1.6 Definition. Seien E, F normierte Räume. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{L}(E,F) := \{L\colon E \to F \mid L \text{ ist linear und beschränkt}\}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{L}(E,F)$ ein linearer Unterraum des Raumes aller linearen Abbildungen zwischen E und F ist. Für $L \in \mathcal{L}(E,F)$ definieren wir außerdem

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\|Lx\|_F \mid x \in E,\ \|x\|_E \le 1\}$$

und schreiben $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.

1.7 Proposition. (a) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *ist eine Norm auf* $\mathcal{L}(E,F)$. *Sie erfüllt*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\left\{ \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \;\middle|\; x \in E\backslash\{0\} \right\}.$$

(b) *Wenn F vollständig ist, dann gilt das auch für $\mathcal{L}(E,F)$.*

(c) *Wenn E, F, G normierte Räume sind und wenn $A \in \mathcal{L}(E,F)$ und $B \in \mathcal{L}(F,G)$, dann gelten $BA \in \mathcal{L}(E,G)$ und*

$$\|BA\|_{\mathcal{L}(E,G)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Beweis. **(a)** Für $x \in E\backslash\{0\}$ gilt

$$\frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} = \left\| L\frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F \le \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

und daher
$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \le \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$
Andererseits gilt für alle $x \in E$ mit $0 < \|x\|_E \le 1$ dass
$$\|Lx\|_F \le \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \le \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E}$$
und daher
$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in B_1 E} \|Lx\|_F \le \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E}.$$
Es ist einfach zu zeigen, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ eine Norm ist.

(b) Sei (L_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E,F)$. Dann gilt

$$\text{(1.3)} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0(\varepsilon)\, \forall m,n \ge n_0\, \forall x \in E\colon \quad \|L_m x - L_n x\|_F \le \|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \le \varepsilon \|x\|_E$$

und es folgt für alle $x \in E$ dass $(L_n x)$ eine Cauchyfolge in F ist. Da F vollständig ist, können wir $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ für alle $x \in E$ setzen. Es folgt leicht aus der Stetigkeit der algebraischen Verknüpfungen und aus der Linearität jedes L_n, dass L linear ist.

Es fehlt zu zeigen, dass $L \in \mathcal{L}(E,F)$ und $L_n \to L$ in $\mathcal{L}(E,F)$ gelten.

Seien $\varepsilon > 0$ und $n := n_0(\varepsilon)$. Wir machen den Grenzübergang $m \to \infty$ in (1.3):
$$\forall x \in E\colon \quad \|Lx\|_F - \|L_{n_0(\varepsilon)}x\|_F \le \|Lx - L_{n_0(\varepsilon)}x\|_F \le \varepsilon\|x\|_E.$$
Daher folgt
$$\forall x \in E\colon \quad \|Lx\|_F \le (\varepsilon + \|L_{n_0(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|x\|_E,$$
das heißt, $L \in \mathcal{L}(E,F)$ und $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \varepsilon + \|L_{n_0(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Wir lassen nochmals $m \to \infty$ in (1.3) und erhalten, dass
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0(\varepsilon)\, \forall n \ge n_0\, \forall x \in E\colon \quad \|Lx - L_n x\|_F \le \varepsilon\|x\|_E.$$
Abschließend können wir daher sagen, dass
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0(\varepsilon)\, \forall n \ge n_0\colon \quad \|L - L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \varepsilon,$$
das heißt, $L_n \to L$ in $\mathcal{L}(E,F)$.

(c) es ist klar, dass BA linear ist. Für alle $x \in E$ gilt
$$\|BAx\|_G \le \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}\|Ax\|_F \le \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E,$$
was alle Schlussfolgerungen beinhaltet. □

1.8 Bemerkung. Sei E ein Banachraum. Der Raum $\mathcal{L}(E)$ ist dann auch ein Banachraum und besitzt eine zusätzliche Struktur, die Komposition von Abbildungen $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $(A, B) \mapsto AB$. Mit dieser Vernüpfung ist $\mathcal{L}(E)$ eine Algebra. Außerdem gilt laut Proposition 1.7(c) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. Daraus folgt leicht, dass die Komposition (oft auch *Multiplikation* genannt) eine stetige Verknüpfung in $\mathcal{L}(E)$ ist.

Generell nennt man einen Banachraum $\mathcal{A}$ mit Algebrenstruktur, die $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ erfüllt, eine *Banachalgebra.*

1.9 Proposition (Die neumannsche Reihe)**.** *Sei E ein Banachraum, und $A \in \mathcal{L}(E)$ erfülle $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Dann ist $I - A$ invertierbar in $\mathcal{L}(E)$ und es gilt*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{1.4}$$

Beweis. Wir definieren eine Folge (A_n) in $\mathcal{L}(E)$ vermöge

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Aus Proposition 1.7(c) folgt dann per Induktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k. \tag{1.5}$$

Weil $\|A\| < 1$ ist, impliziert (1.5) dass $A^k \to 0$ in $\mathcal{L}(E)$ für $k \to \infty$. Außerdem konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$$

absolut. Daher ist die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Wegen (1.5) haben wir für $m \geq n$:

$$\|A_m - A_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|A^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k.$$

Darum ist auch (A_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E)$, und sie konvergiert gegen ein Element $B \in \mathcal{L}(E)$, weil $\mathcal{L}(E)$ vollständig ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$(I - A)A_n = I - A^{n+1} = A_n(I - A). \tag{1.6}$$

Die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{L}(E)$ erzwingt für $n \to \infty$, dass

$$(I - A)B = I = B(I - A),$$

das heißt, $I - A$ ist invertierbar und $(I - A)^{-1} = B = \lim_{n\to\infty} A_n$. □

1.10 Bemerkung. Im Zusammenhang der vorangegangenen Proposition schreibt man auch

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{1.7}$$

1.11 Definition. Sei E ein normierter Raum. Der *Dualraum E' von E* ist der Raum aller stetigen linearen reellwertigen Funktionen auf E:

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Für $x \in E$ und $f \in E'$ schreiben wir häufig

$$\langle\langle f, x\rangle\rangle := f(x).$$

Da $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, folgt aus Proposition 1.7(b), dass auch E' ein Banachraum ist.

1.12 Bemerkung. Kern und Bild eines linearen Operators sind lineare Unterräume. Der Kern eines stetigen linearen Operators zwischen normierten Räumen ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ immer abgeschlossen. Über das Bild kann man keine allgemeingültige Aussage bezüglich Abgeschlossenheit machen.

Notation. Für einen linearen Operator A bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(A)$ das Bild und mit $\mathcal{N}(A)$ den Kern von A.

1.13 Definition. Sei E ein Vektorraum. Eine *Projektion in E* ist ein linearer Operator $P\colon E \to E$, welcher $P^2 = P$ erfüllt.

1.14 Proposition. *Sei E ein Vektorraum.*

(a) *Für eine Projektion P in E ist auch $I - P$ eine Projektion, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I-P)$, $\mathcal{N}(I-P) = \mathcal{R}(P)$ und $E = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P)$.*

(b) *Zu jeder Zerlegung $E = X \oplus Y$ gibt es eine Eindeutige Projektion P in E mit $\mathcal{R}(P) = X$ und $\mathcal{N}(P) = Y$. Wir nennen sie die* Projektion auf X entlang Y.

1.15 Definition. Sei E ein normierter Raum und seien X, Y abgeschlossene Unterräume von E so dass $E = X \oplus Y$. Dann heißen X und Y *topologische Komplementärräume.*

1.16 Lemma. *Für einen normierten Raum E und eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ sind $\mathcal{N}(P)$ und $\mathcal{R}(P)$ topologische Komplementärräume.*

Beweis. Da P stetig ist, muss $\mathcal{N}(P)$ abgeschlossen sein. Mit $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I-P)$ und der Stetigkeit von $I-P$ erhalten wir genauso, dass $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossen ist. Die Behauptung folgt also aus Proposition 1.14(a). □

1.17 Bemerkung. Später werden wir umgekehrt die nichttriviale Tatsache zeigen, dass für topologische Komplementärräume X, Y eines *Banachraumes* die Projektion auf X entlang Y stetig ist.

1.2 Hilberträume

1.18 Definition. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ heißt *Skalarprodukt*, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in E$, und $\langle x, x\rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ gilt (positive Definitheit).

(ii) $\langle \cdot, x\rangle$ und $\langle x, \cdot\rangle$ sind lineare Abbildungen für alle $x \in E$ (Bilinearität).

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ für alle $x, y \in E$ (Symmetrie).

Wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt, dann schreiben wir $x \perp y$. Für $A \subseteq E$ definieren wir

$$A^\perp := \{x \in E \mid x \perp y \text{ für alle } y \in A\}.$$

Einen Vektorraum E mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ nennen wir *Innenproduktraum* und schreiben dafür $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$.

1.19 Proposition. *Sei $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum. Dann schreiben wir $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für $x \in E$.*

(a) *Es gilt die* Ungleichung von Cauchy-Schwarz*:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in E.$$

(b) *Für alle $x, y \in E$ gilt: $x \perp y$ genau dann, wenn $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(c) *$\|\cdot\|$ ist eine Norm auf E.*

(d) *Für alle $x \in E$ ist die lineare Funktion $f_x := \langle x, \cdot\rangle$ stetig und hat die Norm $\|f_x\|_{E'} = \|x\|_E$.*

(e) *Es gilt die* Parallelogrammidentität*:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \text{für alle } x, y \in E.$$

Beweis. **(a)** Für $x = 0$ gibt es nichts zu zeigen. Nehmen wir daher $x \neq 0$. Wir definieren ein quadratisches Polynom in λ:

$$f(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Sei λ_0 die eindeutige Minimalstelle von f:

$$0 = f'(\lambda_0) = 2\lambda_0\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = -\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}.$$

Wir erhalten

$$0 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = f(\lambda_0) = \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2}. \tag{1.8}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Aus $x \perp y$ folgt sofort $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien umgekehrt $x \neq 0$ und λ_0 wie im Beweis von (a) gewählt. Dann folgt aus (1.8), dass

$$\|y\|^2 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2}.$$

Daher muss $\langle x, y\rangle = 0$ gelten.

(c) Die positive Definitheit der Norm und ihr Verhalten bei Multiplikation mit Skalaren sind trivial. Die Dreiecksungleichung folgern wir aus (a):

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(d) Dies folgt aus (a) und aus $\langle x, x\rangle = \|x\|\,\|x\|$.

(e) Dies zeigt man durch einfaches Nachrechnen. □

1.20 Bemerkung. Man kann zeigen, dass eine Norm genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird, wenn die Parallellogrammidentität gilt.

1.21 Definition. Ein Innenproduktraum $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Hilbertraum*, wenn E mit der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm vollständig ist.

Ab hier sei für den Rest des Abschnittes 1.2 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ immer ein Hilbertraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$.

1.22 Proposition. *Sei X ein linearer Unterraum von E. Dann gelten:*

(a) *$X^\perp$ ist abgeschlossen.*

(b) *$X^\perp = (\overline{X})^\perp$.*

(c) *$E = \overline{X} \oplus X^\perp$.*

(d) *$X^{\perp\perp} := (X^\perp)^\perp = \overline{X}$.*

Beweis. **(a)** Für alle $x \in E$ folgt aus Proposition 1.19(d), dass der Raum $x^\perp$ als Kern der stetigen linearen Funktion f_x abgeschlossen ist. Daher ist auch

$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} x^\perp$$

abgeschlossen.

(b) Es ist klar, dass $(\overline{X})^\perp \subseteq X^\perp$ gilt. Sei umgekehrt $y \in X^\perp$. Dann gilt $X \subseteq y^\perp$. Da $y^\perp$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{X} \subseteq y^\perp$, das heißt, $y \in (\overline{X})^\perp$.

(c) Es ist klar, dass $\overline{X} \cap X^\perp = \{0\}$ gilt. Für jedes $x^* \in E$ müssen wir $y^* \in \overline{X}$ und $z^* \in X^\perp$ finden mit $x^* = y^* + z^*$. Sei $(y_n) \subseteq \overline{X}$ eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* - y_n\| = \inf_{y\in\overline{X}} \|x^* - y\| =: \alpha. \tag{1.9}$$

Wegen der Parallellogrammidentität folgt dann aus $(y_m + y_n)/2 \in \overline{X}$, dass

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x^*) - (y_n - x^*)\|^2\\ &= 2\|x^* - y_m\|^2 + 2\|x^* - y_n\|^2 - 4\|x^* - (y_m + y_n)/2\|^2\\ &\leq 2\|x^* - y_m\|^2 + 2\|x^* - y_n\|^2 - 4\alpha^2\\ &\to 0\end{aligned}$$

wenn $m, n \to \infty$. Daher ist (y_n) eine Cauchyfolge, welche gegen ein $y^* \in \overline{X}$ konvergiert. Die Stetigkeit der Norm und (1.9) erzwingen dann

$$\|x^* - y^*\| = \alpha. \tag{1.10}$$

Sei y_1^* ein weiteres Element von $\overline{X}$, welches (1.10) erfüllt. Wir betrachten die Folge (y_n), welche aus den Elementen $y^*, y_1^*, y^*, y_1^*, y^*, y_1^*, \ldots$ besteht, und die dann auch (1.9) erfüllt. Der vorangegangene Beweis zeigt, dass auch diese Folge (y_n) konvergiert, das heißt, dass $y^* = y_1^*$ gilt. Daher ist y^* das einzige Element in $\overline{X}$, welches $\|x^* - y^*\| = \alpha$ erfüllt.

Wir setzen $z^* := x^* - y^*$. Dann folgt für alle $y \in \overline{X}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\|z^*\| = \|x^* - y^*\| \leq \|x^* - y^* + \lambda y\| = \|z^* + \lambda y\|,$$

weil $-y^* + \lambda y \in \overline{X}$. Mit Proposition 1.19(b) erhalten wir, dass $z^* \perp y$ und daher $z^* \in X^\perp$ gelten.

(d) Falls $x \in X$ liegt, dann folgt $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in X^\perp$. Daher gilt $x \in X^{\perp\perp}$. Weil dies für alle $x \in X$ gilt, folgt $X \subseteq X^{\perp\perp}$. Und weil $X^{\perp\perp}$ wegen (a) abgeschlossen ist, folgt auch $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp}$. Sei andererseits $x \in X^{\perp\perp}$. Wir zeigen, dass $x \in \overline{X}$ gilt. Wegen (c) gibt es $y \in \overline{X}$ und $z \in X^\perp$, so dass $x = y + z$ gilt. Wegen $x \perp z$ und $y \perp z$ erhalten wir

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle = \|z\|^2,$$

das heißt, $z = 0$ und $x = y \in \overline{X}$. □

1.23 Definition. Sei P eine Projektion in E. Dann heißt P *Orthogonalprojektion*, falls $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$ gilt.

1.24 Definition. Ein linearer Operator $A\colon E \to E$, welcher $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in E$ erfüllt, heißt *symmetrisch*. Da das Skalarprodukt bilinear ist, ist die Menge aller symmetrischen linearen Operatoren in E ein Unterraum des Raumes aller linearen Operatoren in E.

1.25 Proposition. *Eine Projektion P in E ist genau dann orthogonal, wenn P ein symmetrischer Operator ist. In diesem Fall gelten $P \in \mathcal{L}(E)$ und entweder $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$ oder $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$. Außerdem sind $\mathcal{N}(P)$ und $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossen.*

1.26 Satz (Fréchet-Riesz)**.** *Für alle $f \in E'$ gibt es genau ein $x \in E$, so dass $f = \langle x, \cdot \rangle$ gilt.*

Beweis. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, seien $x_1, x_2 \in E$ so gewählt, dass $f = \langle x_1, \cdot \rangle = \langle x_2, \cdot \rangle$ gilt. Dann folgt $\langle x_1 - x_2, y \rangle = 0$ für alle $y \in E$, das heißt, $x_1 = x_2$.

Für die Existenz nehmen wir $f \neq 0$ an. Dann gelten $\mathcal{N}(f) \neq E$ und $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$. Weil $\mathcal{N}(f)$ abgeschlossen ist, gilt $E = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^\perp$. Daher ist $f \colon \mathcal{N}(f)^\perp \to \mathbb{R}$ injektiv, also bijektiv. Es folgt also

$$\dim(\mathcal{N}(f)^\perp) = 1. \tag{1.11}$$

Wir wählen $z \in S_1 E \cap \mathcal{N}(f)^\perp$, bezeichnen mit P die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(f)^\perp$ und setzen $x := f(z)z$. Sei $y \in E$ beliebig. Wegen (1.11) existiert dann $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $Py = \alpha z$. Abschließend folgt dann wegen $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(f)$:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle = \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle = f(z)\langle z, Py \rangle \\ = f(z)\alpha\langle z, z \rangle = f(\alpha z) = f(Py) = f(Py + (I - P)y) = f(y). \quad \square\end{aligned}$$

1.27 Bemerkung. In der Situation des Satz 1.26 gilt $\|f\|_{E'} = \|x\|_E$, wegen Proposition 1.19(d). Auch die Abbildung $E \to E'$, $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$, ist linear und bijektiv. Daher sind die Räume E und E' isometrisch isomorph.

1.28 Definition. Eine lineare und bijektive Abbildung zwischen zwei Vektorräumen nennen wir, wie in der linearen Algebra, einen *Isomorphismus.* Ein Isomorphismus zwischen zwei normierten Räumen heißt *topologischer Isomorphismus*, wenn er auch ein Homöomorphismus ist, d.h., wenn er zusammen mit seiner Inversen stetig ist. Insbesondere ist ein isometrischer (d.h. normerhaltender) Isomorphismus ein topologischer Isomorphismus. Manchmal bezeichnen wir einen topologischen Isomorphismus zwischen zwei Banachräumen als *Banachraum-Isomorphismus.*

1.29 Satz. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$.*

(a) *Falls $\alpha > 0$ existiert, so dass*

$$\|Ax\| \geq \alpha\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{N}(A)^\perp \tag{1.12}$$

gilt, dann ist $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen.

(b) *Falls $\alpha > 0$ existiert, so dass*

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha\|x\|^2 \qquad \text{für alle } x \in E \tag{1.13}$$

gilt, dann ist A ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. **(a):** Aus $E = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^\perp$ folgt, dass

$$L := A|_{\mathcal{N}(A)^\perp} : \mathcal{N}(A)^\perp \to \mathcal{R}(A)$$

bijektiv ist. Wegen (1.12) ist L^{-1} stetig, das heißt, L ist ein topologischer Isomorphismus. Um zu zeigen, dass $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist, sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{R}(A)$, die in E gegen ein x konvergiert. Wir setzen $y_n := L^{-1}x_n$. Aus $\|y_m - y_n\| \leq \|L^{-1}\| \, \|x_m - x_n\|$ folgt, dass (y_n) eine Cauchyfolge in E ist. Die Vollständigkeit von E und die Abgeschlossenheit von $\mathcal{N}(A)^\perp$ liefern uns ein $y \in \mathcal{N}(A)^\perp$, so dass $y_n \to y$. Weil L stetig ist, folgt $x_n = Ly_n \to Ly$, das heißt $x = Ly \in \mathcal{R}(A)$. Daher ist $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen.

(b): Für alle $x \in E$ folgt aus (1.13) und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|Ax\| \geq \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|} \geq \alpha\|x\|. \tag{1.14}$$

Es ist klar, dass A injektiv ist. Die Aussage (a) zeigt, dass $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist, das heißt, $E = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$. Wir zeigen, dass $\mathcal{R}(A)^\perp = \{0\}$ gilt. Sei dazu $x \in \mathcal{R}(A)^\perp$. Dann folgt zunächst $\langle Ax, x\rangle = 0$ und dann $x = 0$ wegen (1.13). Es gilt also $E = \mathcal{R}(A)$, d.h., A ist surjektiv. Die Stetigkeit von A^{-1} folgt schließlich aus (1.14). □

Notation. Für eine Teilmenge A eines Vektorraumes bezeichnen wir mit $[A]$ das lineare Erzeugnis von A. Falls $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ abzählbar ist, dann schreiben wir häufig auch einfach $[x_1, x_2, \dots] := [A]$.

1.30 Definition. Ein *abzählbares (endliches) Orthonormalsystem* ist eine Teilmenge $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ($\{e_k\}_{k=1}^n$) von E, so dass $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) gilt.

1.31 Proposition. *Sei $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ein abzählbares (oder endliches) Orthonormalsystem in E und sei P die Orthogonalprojektion auf $\overline{[e_1, e_2, \dots]}$. Für alle $x \in E$ gilt dann:*

(a) *Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2$ konvergiert in $\mathbb{R}$, und die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$ konvergiert in E.*

(b) *Es gilt*
$$\left\|\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

(c) $\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k = Px$

Beweis. Für $x \in E$ definieren wir $P_k x := \langle x, e_k\rangle e_k$. Für alle $x \in E$ gilt dann

$$P_k^2 x = \langle \langle x, e_k\rangle e_k, e_k\rangle e_k = \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_k\rangle e_k = P_k x,$$

das heißt, P_k ist eine Projektion auf $[e_k]$. Außerdem gilt für alle $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \langle P_k x, y\rangle &= \langle \langle x, e_k\rangle e_k, y\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle \langle e_k, y\rangle \\ &= \langle x, \langle y, e_k\rangle e_k\rangle \\ &= \langle x, P_k y\rangle. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass P_k symmetrisch ist. Wegen Proposition 1.25 muss P_k also mit der Orthogonalprojektion auf $[e_k]$ übereinstimmen.

Die Vektoren e_k sind paarweise orthogonal. Also ist $Q_n := \sum_{k=1}^n P_k$ eine Projektion auf $[e_1, e_2, \dots, e_n]$. Weil alle P_k symmetrisch sind, ist auch Q_n symmetrisch, das heißt, orthogonal.

Sei $x \in E$ fest gewählt. Wir haben dann $Q_n x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$. Die Orthogonalität liefert

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\Big\|^2 = \|Q_n x\|^2 \le \|Q_n x\|^2 + \|(I - Q_n)x\|^2 = \|x\|^2. \tag{1.15}$$

Es folgt, dass $\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Wir erhalten, wiederum unter Ausnutzung der Orthogonalität:

$$\|Q_n x - Q_m x\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Daher ist $(Q_n x)$ eine Cauchyfolge in E, und sie konvergiert gegen ein Element aus $\overline{[e_1, e_2, \dots]}$, weil E vollständig ist. Dies zeigt (a). Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (1.15) liefert (b).

(c) Wir definieren $X := [e_1, e_2, \dots]$ und $Qx := \lim_{n\to\infty} Q_n x$ für $x \in E$. Die Stetigkeit der Verknüpfungen zeigt, dass Q linear ist. Wegen $\|Q_n\| = 1$ für alle n haben wir außerdem für alle $x \in E$

$$\|Qx\| = \lim_{n\to\infty} \|Q_n x\| \le \lim_{n\to\infty} \|Q_n\|\|x\| = \|x\|.$$

Es folgt $Q \in \mathcal{L}(E)$.

Für $x \in E$ und $m \ge n$ gilt

$$Q_m Q_n x = Q_n x,$$

nach Definition der Q_n. Aus der Stetigkeit von Q folgt nach den Grenzübergängen $m \to \infty$ und danach $n \to \infty$ die Tatsache $Q^2 x = Qx$, das heißt, Q ist eine Projektion mit $\mathcal{R}(Q) \subseteq \overline{X}$. Wegen $Q_n e_k = e_k$ für $n \ge k$ ist klar, dass $X \subseteq \mathcal{R}(Q)$ gilt. Lemma 1.16 und die Stetigkeit von Q zeigen, dass $\mathcal{R}(Q)$ abgeschlossen ist. Deshalb folgt $\overline{X} \subseteq \mathcal{R}(Q)$, und Q ist eine Projektion auf $\overline{X} = \mathcal{R}(Q)$.

Seien $x, y \in E$. Wir rechnen unter Zuhilfenahme der Symmetrie von Q_n:

$$\langle Qx, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Q_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, Q_n y\rangle = \langle x, Qy\rangle.$$

Daher ist auch Q symmetrisch, also orthogonal, und daher $Q = P$. □

1.32 Definition. Ein abzählbares (oder endliches) Orthonormalsystem $\{e_k\}_{k\in J}$ in E ist eine *Hilbertbasis* falls

$$x = \sum_{k\in J} \langle x, e_k\rangle e_k \qquad \text{für alle } x \in E \tag{1.16}$$

gilt. Hierbei ist J eine abzählbare (oder endliche) Indexmenge.

1.33 Lemma. *Ein abzählbares (oder endliches) Orthonormalsystem* $\{e_k\}_{k\in J}$ *ist eine Hilbertbasis genau dann, wenn* $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$.

Beweis. Für eine Hilbertbasis $\{e_k\}$ in E haben wir $\overline{[e_1, e_2, \dots]} \subseteq E$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus (1.16).

Wenn $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$ gilt, dann sei P die Orthogonalprojektion auf $\overline{[e_1, e_2, \dots]}$. Proposition 1.22(c) zeigt dann, dass $P = I$ gilt. Für alle $x \in E$ folgt dann mit Proposition 1.31(c) dass $x = Px = \sum_{k\in J}\langle x, e_k\rangle e_k$. □

1.34 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ *liegt dicht in* X falls $\overline{A} = X$. X heißt *separabel* falls X eine dicht liegende, abzählbare Teilmenge besitzt.

1.35 Lemma. *Seien* X, Y *metrische Räume,* $A \subseteq X$ *dicht in* X*, und* $f\colon X \to Y$ *eine stetige Abbildung, so dass* $f(X)$ *in* Y *dicht liegt. Dann liegt* $f(A)$ *dicht in* Y.

Beweis. Sei $y \in Y$. Weil $f(X)$ in Y dicht liegt, existiert eine Folge $(x_n) \subseteq X$, so dass $f(x_n) \to y$ in Y. Weil A in X dicht liegt und f stetig ist, können wir für alle n ein $a_n \in A$ finden, so dass $d(f(x_n), f(a_n)) \le 1/n$. Es folgt, dass

$$d(y, f(a_n)) \le d(y, f(x_n)) + d(f(x_n), f(a_n)) \le d(y, f(x_n)) + \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. □

1.36 Satz. *Wenn* $E \ne \{0\}$ *separabel ist, dann existiert eine abzählbare Hilbertbasis.*

Beweis. Wir nehmen $\dim E = \infty$ an; der Fall endlicher Dimension ist schon bekannt. Sei $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ dicht in E und sei n_1 der erste Index mit $x_{n_1} \ne 0$. Induktiv definieren wir n_{k+1}, wenn $n_1, n_2, \dots, n_k$ schon gewählt sind wie folgt: n_{k+1} sei der erste Index mit $x_{n_{k+1}} \notin [x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}]$. Außerdem definieren wir $y_k := x_{n_k}$. Dann ist $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ eine linear unabhängige Menge mit $[x_1, x_2, \dots] = [y_1, y_2, \dots]$, und daher gilt $E = \overline{[y_1, y_2, \dots]}$.

Weiter definieren wir $z_1 := y_1$ und $e_1 := z_1/\|z_1\|$. Induktiv definieren wir z_{k+1} und e_{k+1}, wenn $e_1, e_2, \dots, e_k$ schon bekannt sind wir folgt: $z_{k+1} := y_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle y_{k+1}, e_i\rangle e_i$ (die Orthogonalprojektion von y_{k+1} auf $[e_1, e_2, \dots, e_k]^\perp$). da $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ linear unabhängig ist, folgt $z_{k+1} \ne 0$, und wir setzen $e_{k+1} := z_{k+1}/\|z_{k+1}\|$. Es ist klar, dass wir mit $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ein abzählbares Orthonormalsystem in E erhalten. Es ist auch klar, dass $[e_1, e_2, \dots] = [y_1, y_2, \dots]$ und daher $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$ gelten. Wir schließen den Beweis mit Hilfe von Lemma 1.33 ab. □

1.37 Lemma. *Für alle* $x \in E$ *gilt*

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| \mid y \in B_1\}.$$

Beweis. Es ist klar, dass $\sup\{|\langle x, y\rangle| \mid y \in B_1\} \le \|x\|$. Andererseits gelten für $x \ne 0$: $x/\|x\| \in B_1$ und $\|x\| = \langle x, x/\|x\|\rangle \le \sup\{|\langle x, y\rangle| \mid y \in B_1\}$. □

1.38 Proposition. *Für alle* $A \in \mathcal{L}(E)$ *existiert genau ein* $A^* \in \mathcal{L}(E)$ *mit*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in E. \tag{1.17}$$

Die Abbildung $A \mapsto A^*$ *ist ein isometrischer Automorphismus von* $\mathcal{L}(E)$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(E)$ fest gewählt und sei $\Gamma\colon E' \to E$ der isometrische Isomorphismus aus Bemerkung 1.27. Wir definieren $\Lambda\colon E \to E'$ durch $\Lambda(y)(x) := \langle Ax, y\rangle$. Es ist klar, dass Λ dann linear ist. Schließlich setzen wir $A^* := \Gamma\Lambda$ und erhalten einen Operator A^* der (1.17) erfüllt. Es ist leicht, zu zeigen, dass dies die einzig mögliche Wahl für A^* ist. Es folgt aus der Eindeutigkeit, dass $A \mapsto A^*$ eine lineare Abbildung ist.

Mit Hilfe des Lemma 1.37 erhalten wir

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{\|Ax\| \mid x \in B_1\}\\ &= \sup\{\langle Ax, y\rangle \mid x, y \in B_1\}\\ &= \sup\{\langle x, A^*y\rangle \mid x, y \in B_1\}\\ &= \sup\{\|A^*y\| \mid y \in B_1\}\\ &= \|A^*\|.\end{aligned}$$

Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist also isometrisch und daher auch injektiv. Und wegen $A^{**} = A$ ist $A \mapsto A^*$ auch surjektiv. □

1.39 Definition. A^* heißt *der zu A adjungierte Operator* oder auch *die Adjungierte.*

1.40 Proposition. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$. Dann gelten:*

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp &= \mathcal{N}(A^*), & \overline{\mathcal{R}(A)} &= \mathcal{N}(A^*)^\perp,\\ (\overline{\mathcal{R}(A^*)})^\perp &= \mathcal{N}(A), & \overline{\mathcal{R}(A^*)} &= \mathcal{N}(A)^\perp.\end{aligned}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir $(\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp = \mathcal{N}(A^*)$. Aus Proposition 1.22(b) ergeben sich folgende Äquivalenzen: $x \in (\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in E\colon \langle x, Ay\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E\colon \langle A^*x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(A^*)$.

Die Identität $(\overline{\mathcal{R}(A)}) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$ folgt aus der ersten Aussage mit Hilfe von Proposition 1.22(d). Die anderen Identitäten folgen aus den ersten zwei wegen $A^{**} = A$. □

1.41 Bemerkung. Falls $A \in \mathcal{L}(E)$ ein abgeschlossenes Bild besitzt, dann zeigt Proposition 1.40, dass die Gleichung

$$Ax = y$$

genau dann eine Lösung besitzt, wenn $y \in \mathcal{N}(A^*)^\perp$. Dies ist zum Beispiel der Fall für alle $y \in E$, wenn $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ gilt. Falls A injektiv und symmetrisch ist (das heißt, $A^* = A$ gilt), und falls außerdem A ein abgeschlossenes Bild besitzt, dann ist A bijektiv.

1.3 Das Lemma von Baire mit Folgerungen

1.42 Definition. Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist *nirgendwo dicht* falls ihr Abschluss keinen inneren Punkt enthält. Ein metrischer Raum *gehört zur ersten (Baireschen) Kategorie*, falls er eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener und nirgends dichter Teilmengen ist. Ein metrischer Raum *gehört zur zweiten (Baireschen) Kategorie*, falls er nicht zur ersten Kategorie gehört.

1.43 Satz (Lemma von Baire). *Ein vollständiger metrischer Raum $X \neq \varnothing$ gehört zur zweiten Kategorie: Falls $A_n \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen von X sind und falls*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1.18}$$

dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $\operatorname{int}(A_n) \neq \varnothing$.

Beweis. Für einen Beweis durch Widerspruch nehmen wir die folgende Situation an: Die Teilmengen $A_n \subseteq X$ sind abgeschlossen, erfüllen (1.18) und es gilt $\operatorname{int}(A_n) = \varnothing$ für alle n. Dann ist $X \backslash A_n \neq \varnothing$ offen und liegt in X dicht für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $x_1 \in X \backslash A_1$ und $r_1 > 0$, so dass $B_{r_1}(x_1) \subseteq X \backslash A_1$. Dann wählen wir $x_2 \in U_{r_1}(x_1) \backslash A_2$ und $r_2 \in (0, r_1/2]$, so dass $B_{r_2}(x_2) \subseteq U_{r_1}(x_1) \backslash A_2$. Induktiv erhalten wir zwei Folgen (x_n) und (r_n), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq U_{r_n}(x_n) \backslash A_{n+1}, \qquad r_{n+1} \in (0, r_n/2].$$

Es folgt, dass

$$x_n \in B_{r_m}(x_m) \subseteq X \backslash A_m \qquad \text{für alle } n \geq m \geq 1. \tag{1.19}$$

Für $n \geq m$ haben wir

$$d(x_m, x_n) \leq r_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} r_1 \to 0 \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Daher ist (x_n) eine Cauchyfolge, welche gegen ein $x \in X$ konvergiert. Für alle $m \in \mathbb{N}$ zeigt (1.19), dass $x \notin A_m$ gilt. Es ist also $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, im Widerspruch zu (1.18). □

Notation. Seien E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $A, B \subseteq E$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} x + A &:= \{x + y \mid y \in A\}, \\ \alpha A &:= \{\alpha y \mid y \in A\}, \\ A + B &:= \{y + z \mid y \in A,\ z \in B\}. \end{aligned}$$

A heißt *konvex* falls gilt: $(1-t)x + ty \in A$ für alle $x, y \in A$ und $t \in [0,1]$.

1.44 Lemma. *Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ und seien $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $A, B \subseteq E$. Dann gelten:*

(a) *Wenn A offen ist, dann sind auch $x + A$ und $A + B$ offen.*

(b) *Wenn A offen ist, dann ist auch αA offen.*

(c) $2A \subseteq A + A$

(d) *Für einen Vektorraum F und eine lineare Abbildung $L\colon E \to F$ ist $L(A)$ konvex, falls A konvex ist.*

(e) *Wenn A konvex ist, dann ist auch $\overline{A}$ konvex.*

(f) *Wenn A konvex ist, dann gilt $2A = A + A$.*

1.45 Satz (von der offenen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume und sei $L \in \mathcal{L}(E, F)$ surjektiv. Dann ist L eine offene Abbildung, das heißt, $L(U)$ ist offen in F für alle offenen Teilmengen U von E.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $r > 0$ existiert mit

$$B_r F \subseteq \overline{L(B_1 E)}. \tag{1.20}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $A_n := \overline{L(B_n E)}$. Da L surjektiv ist, folgt

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

und Satz 1.43 zeigt, dass n_0 existiert mit $\operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$. Wegen $A_{n_0} = n_0 A_1$ folgt aus Lemma 1.44(b), dass auch

$$\operatorname{int}(A_1) = \operatorname{int}\left(\frac{1}{n_0} A_{n_0}\right) = \frac{1}{n_0} \operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$$

und dass $y_0 \in F$ und $r > 0$ existieren, so dass $B_{2r}(y_0; F) \subseteq A_1$. Es gibt demnach eine Folge $(x_n) \subseteq B_1 E$, so dass $L x_n \to y_0$ für $n \to \infty$. Weil $-x_n \in B_1 E$ für alle n gilt, ist auch $L(-x_n) \in A_1$ und $-y_0 = \lim_{n\to\infty} L(-x_n) \in A_1$. Es folgt

$$B_{2r} F = B_{2r}(0; F) = -y_0 + B_{2r}(y_0; F) \subseteq A_1 + A_1. \tag{1.21}$$

Wegen Lemma 1.44(d) und (e) ist A_1 konvex. Mit Hilfe von Lemma 1.44(f) erhalten wir wegen (1.21), dass $B_{2r} F \subseteq 2A_1$ und dass daher (1.20) gilt.

Im zweiten Schritt zeigen wir für r aus (1.20), dass

$$B_{r/2} F \subseteq L(B_1 E) \tag{1.22}$$

gilt. Sei $y \in B_{r/2} F$ gewählt. Dann zeigt (1.20), dass $z_1 \in B_{1/2} E$ existiert, so dass $\|y - L z_1\| \leq r/4$ gilt. Mit (1.20) erhalten wir wieder $z_2 \in B_{1/4} E$, so dass $\|y - L z_1 - L z_2\| \leq r/8$ gilt. Per Induktion konstruieren wir eine Folge $(z_n) \subseteq E$, so dass gilt:

$$\|z_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} L z_k \right\| \leq r \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \tag{1.23}$$

Wir setzen nun $x_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$. Dann folgt

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 1.$$

Außerdem gilt für $n \geq m$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Daher konvergiert x_n gegen ein $x \in B_1E$. Unter Benutzung von (1.23) prüft man leicht, dass $y = Lx \in L(B_1E)$ gilt. Damit ist (1.22) gezeigt.

Im letzten Schritt nehmen wir an, dass $U \subseteq E$ offen ist. Für beliebiges $y \in L(U)$ existiert $x \in U$ mit $y = Lx$. Weil U offen ist, existiert $t > 0$ mit $x + B_tE \subseteq U$. Aus (1.22) folgt $B_{tr/2}F \subseteq L(B_tE)$. Dann gilt $y + B_{tr/2}F \subseteq y + L(B_tE) = L(x + B_tE) \subseteq L(U)$, und $y + B_{tr/2}$ ist daher eine Umgebung von y, die in $L(U)$ enthalten ist. Da $y \in L(U)$ beliebig war, ist $L(U)$ offen. □

1.46 Korollar (Satz von der stetigen Inversen)**.** *Ein stetiger bijektiver linearer Operator zwischen zwei Banachräumen ist ein Banachraum-Isomorphismus.*

1.47 Korollar. *Sei E ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, so dass die normierten Räume $E_1 := (E, \|\cdot\|_1)$ und $E_2 := (E, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind. Falls $C_1 \geq 0$ existiert mit $\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1$ für alle $x \in E$, dann sind die zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Der Operator $\mathrm{id}\colon E_1 \to E_2$ ist bijektiv und stetig. Nach Korollar 1.46 ist auch $\mathrm{id}\colon E_2 \to E_1$ stetig, das heißt, es existiert $C_2 \geq 0$, so dass $\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$ für alle $x \in E$ gilt. □

1.48 Definition. Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Die Menge

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

heißt dann *der Graph von f*.

1.49 Bemerkungen. Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Es sind äquivalent:
  (i) Der Graph von f ist abgeschlossen in $X \times Y$.
  (ii) Wenn $x_n \to x$ in X und $f(x_n) \to y$ in Y, dann gilt $y = f(x)$.

(b) Falls f stetig ist, dann ist der Graph von f abgeschlossen in $X \times Y$.

1.50 Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume und sei $L\colon E \to F$ ein linearer Operator mit abgeschlossenem Graphen. Dann ist L stetig.*

Beweis. Wir Definieren eine zweite Norm in E:

$$\|x\|_2 := \|x\|_E + \|Lx\|_F \qquad \forall x \in E.$$

Diese Norm heißt *Graphennorm.*

Wir zeigen, dass $E_2 := (E, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum ist. Sei dazu (x_n) eine Cauchyfolge in E_2. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge in E und (Lx_n) ist eine Cauchyfolge in F, wegen der Definition von $\|\cdot\|_2$. Weil E und F vollständig sind, existieren $x \in E$ und $y \in F$, so dass $x_n \to x$ in E und $Lx_n \to y$ in F. Da der Graph von L abgeschlossen ist, folgt aus der Bemerkungen 1.49(a) $Lx = y$ und $\|x_n - x\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$, das heißt, (x_n) konvergiert gegen x in E_2.

Wegen $\|x\|_E \leq \|x\|_2$ für alle $x \in E$, und weil E und E_2 vollständig sind, liefert Korollar 1.47 dass $C \geq 1$ existiert mit $\|x\|_2 \leq \|x\|_E$ für alle $x \in E$, das heißt, $\|Lx\|_F \leq (C-1)\|x\|_E$ für alle $x \in E$. □

1.51 Satz (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Seien E ein Hilbertraum und $A\colon E \to E$ ein symmetrischer linearer Operator. Dann ist A stetig.*

Beweis. Wir nehmen $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ an. Für alle $z \in E$ gilt dann $\langle z, Ax_n\rangle \to \langle z, y\rangle$ und $\langle z, Ax_n\rangle = \langle Az, x_n\rangle \to \langle Az, x\rangle = \langle z, Ax\rangle$. Daraus folgt $\langle z, Ax\rangle = \langle z, y\rangle$ für alle $z \in E$, das heißt, $Ax = y$. Wegen Bemerkungen 1.49(a) ist der Graph von A also abgeschlossen, und A ist stetig wegen Satz 1.50. □

1.52 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum, und sei $(L_j)_{j\in J}$ eine Familie von Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$, so dass $\sup_{j\in J}\|L_j x\|_F < \infty$ für alle $x \in E$. Dann gilt $\sup_{j\in J}\|L_j\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$, das heißt, die Familie ist gleichmäßig beschränkt in $\mathcal{L}(E,F)$.*

Beweis. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \{x \in E \mid \forall j \in J\colon \|L_j x\|_F \leq n\} = \bigcap_{j\in J}\{x \in E \mid \|L_j x\|_F \leq n\}.$$

Weil alle L_j stetig sind, ist A_n abgeschlossen. Die Voraussetzung liefert

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Aus Satz 1.43 folgt, dass n_0 existiert mit $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$. Wir können also $x_0 \in E$ und $r > 0$ finden, so dass $x_0 + B_r E \subseteq A_{n_0}$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|L_j\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup\{\|L_j x\|_F \mid \|x\|_E \leq 1\} \\
&= \frac{1}{r}\sup\{\|L_j x\|_F \mid \|x\|_E \leq r\} \\
&\leq \frac{1}{r}\sup\{\|L_j x\|_F \mid x \in -x_0 + A_{n_0}\} \\
&= \frac{1}{r}\sup\{\|L_j(x - x_0)\|_F \mid x \in A_{n_0}\} \\
&\leq \frac{1}{r}\left(\sup\{\|L_j x\|_F \mid x \in A_{n_0}\} + \|L_j x_0\|_F\right) \\
&\leq \frac{2n_0}{r},
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

1.53 Satz (Banach-Steinhaus)**.** *Seien E, F Banachräume und sei (L_n) eine Folge von Operatoren in $\mathcal{L}(E,F)$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$(L_n x)$ konvergiert in F für alle $x \in E$,*

(ii) *$\|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ist beschränkt und $(L_n x)$ konvergiert für alle x in einer dichten Teilmenge von E.*

Wenn (i) *und* (ii) *erfüllt sind, dann definieren wir den Operator $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$. Es gelten dann $L \in \mathcal{L}(E,F)$ und $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Beweis. **(i) $\Rightarrow$ (ii):** Wegen der punktweisen Konvergenz gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n x\| < \infty$ für alle $x \in E$. Aus Satz 1.52 folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$. Die letzte Aussage ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei X ein dichte Teilmenge von E, so dass $L_n x$ für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen $C := \sup\|L_n\|$ und zeigen, dass $L_n(x)$ für *alle* $x \in E$ konvergiert. Dafür halten wir $x \in E$ fest und betrachten eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert k mit $\|x - x_k\| \le \varepsilon/(3C)$, und es existiert n_0 mit $\|L_m(x_k) - L_n(x_k)\| \le \varepsilon/3$ für alle $m, n \ge n_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|L_m(x) - L_n(x)\| &\le \|L_m(x) - L_m(x_k)\| + \|L_m(x_k) - L_n(x_k)\| + \|L_n(x_k) - L_n(x)\| \\ &\le C\|x - x_k\| + \varepsilon/3 + C\|x - x_k\| \le \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m, n \ge n_0$, das heißt, $L_n(x)$ ist eine Cauchyfolge in F und konvergiert demnach.

Wir nehmen jetzt an, dass (i) und (ii) erfüllt sind und definieren $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ für $x \in E$. Aus der Stetigkeit der algebraischen Verknüpfungen folgt, dass L ein linearer Operator ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\lim_{n\to\infty}\|L_n\| = \liminf_{n\to\infty}\|L_n\|$. Es folgt, dass $\|Lx\| = \lim_{n\to\infty}\|L_n x\| \le \lim_{n\to\infty}\|L_n\|\,\|x\|$, das heißt, $L \in \mathcal{L}(E,F)$ und $\|L\| \le \lim_{n\to\infty}\|L_n\|$. □

1.4 Kompakte Operatoren

1.54 Bemerkungen. (a) In metrischen Räumen sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

(b) Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.

1.55 Lemma. *Sei E ein normierter Raum. Falls $B_1 E$ kompakt ist, dann gilt* $\dim E < \infty$.

Beweis. Für einen Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass $B_1 E$ kompakt ist und $\dim E = \infty$ gilt. Es reicht dann, eine Folge $(x_n) \subseteq S_1$ zu konstruieren, welche keine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $x_1 \in S_1$. Falls schon die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S_1$ konstruiert sind, dann definieren wir $F := [x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Wegen $\dim E = \infty$ existiert $y \in E \backslash F$. Wir schreiben $\mu := \operatorname{dist}(y, F) = \inf_{z\in F}\|y - z\|$. Sei $(z_n) \subseteq F$, so dass $\|y - z_n\| \to \operatorname{dist}(y, F)$. Dann gilt $\|z_n\| \leq \|y - z_n\| + \|y\| \to \mu + \|y\|$ für $n \to \infty$, das heißt, (z_n) ist beschränkt. Nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge können wir $z_n \to z \in F$ annehmen, denn es gilt $\dim F < \infty$. Es folgt $\|y - z\| = \mu > 0$, und wir definieren $x_{k+1} := (y - z)/\mu \in S_1$. So erhalten wir

$$\|x_{k+1} - x_\ell\| = \frac{\|y - z - \mu x_\ell\|}{\mu} \geq \frac{\operatorname{dist}(y, F)}{\mu} = 1 \qquad \text{für } \ell \in \{1, 2, \ldots, k\} \tag{1.24}$$

weil $z + \mu x_\ell \in F$.

Mit (1.24) folgt, dass $\|x_k - x_\ell\| \geq 1$ für $k \neq \ell$. Dies zeigt, dass (x_k) keine Cauchyfolge und daher auch keine konvergente Teilfolge enthält. $\square$

1.56 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

1.57 Lemma. *Seien X, Y metrische Räume und $A \subseteq X$.*

(a) *A ist relativ kompakt genau dann, wenn jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die in X konvergiert.*

(b) *Seien $A \subseteq X$ relativ kompakt und $f \colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(A)$ relativ kompakt.*

1.58 Definition. Seien E, F normierte Räume. Ein linearer Operator $K \colon E \to F$ heißt *kompakt* falls das Bild jeder in E beschränkten Menge unter K relativ kompakt in F ist.

1.59 Lemma. *Seien E, F Banachräume und $K \colon E \to F$ linear.*

(a) *Falls K kompakt ist, dann ist K stetig.*

(b) *K ist genau dann kompakt, wenn (Kx_n) für jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq E$ eine in F konvergente Teilfolge besitzt.*

(c) *Die Identität in E ist genau dann kompakt, wenn E endlichdimensional ist.*

(d) *Die Komposition eines kompakten Operators mit einem stetigen Operator ist kompakt.*

(e) *Die Menge der kompakten linearen Operatoren ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}(E, F)$.*

Beweis. **(a)** $\overline{K(B_1 E)}$ ist nach Definition kompakt. Wegen Bemerkungen 1.54(b) ist $\overline{K(B_1 E)}$ also beschränkt und somit K stetig.

(b) Sei K kompakt und sei (x_n) eine beschränkte Folge in E. Dann ist (Kx_n) relativ kompakt in F. Wegen Lemma 1.57 enthält dann (Kx_n) eine in F konvergente Teilfolge. Seien umgekehrt $A \subseteq E$ beschränkt und $(y_n) \subseteq K(A)$. Dann existiert $(x_n) \subseteq A$, so dass $y_n = Kx_n$ für alle n gilt. Da (x_n) beschränkt ist, enthält (y_n) eine konvergente Teilfolge. Dies gilt für jede Folge in $K(A)$, das heißt, $K(A)$ ist relativ kompakt wegen Lemma 1.57. Also ist K kompakt.

(c) Falls E endliche Dimension hat, dann folgt aus Satz 1.5(a), dass B_1E kompakt ist. Dies zeigt, dass id_E ein kompakter Operator ist. Umgekehrt sei id_E kompakt. Dann folgt, dass B_1E kompakt ist. Wegen Lemma 1.55 ist E endlichdimensional.

(d) Sei G ein normierter Raum und sei K kompakt. Falls $L \in \mathcal{L}(G, E)$ gilt, dann ist $K \circ L$ kompakt: das Bild $L(A)$ einer beschränkten Menge $A \subseteq G$ ist beschränkt, und daher ist $K(L(A))$ relativ kompakt. Falls $L \in \mathcal{L}(F, G)$ dann ist $L \circ K$ kompakt: Das Bild $K(A)$ einer beschränkten Menge $A \subseteq E$ ist relativ kompakt in F. Da L stetig ist, zeigt Lemma 1.57, dass $L(K(A))$ relativ kompakt ist in G.

(e) Seien $K_1, K_2 \colon E \to F$ kompakt, und sei $(x_n) \subseteq E$ beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir wegen Abschnitt (b) annehmen, dass (K_1x_n) und $K_2(x_n)$ konvergieren. Es folgt, dass $(K_1 + K_2)(x_n) = K_1x_n + K_2x_n$ konvergiert und dass daher $K_1 + K_2$ kompakt ist, wiederum wegen Abschnitt (b). Ganz ähnlich kann man zeigen, dass αK kompakt ist, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ und $K \colon E \to F$ kompakt ist. □

1.60 Definition. Sei E ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n) \subseteq E$ *konvergiert schwach* gegen $x \in E$ falls $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ für alle $y \in E$. In diesem Fall heißt x der *schwache Grenzwert von* (x_n), und wir schreiben $x_n \rightharpoonup x$.

1.61 Bemerkung. Der Klarheit wegen sagen wir manchmal x_n *konvergiert in der Norm* gegen x falls $x_n \to x$ in E. Wir nennen die Folge dann *normkonvergent.*

1.62 Proposition. (a) *Eine schwach konvergente Folge besitzt einen eindeutigen schwachen Grenzwert.*

(b) *Jede normkonvergente Folge konvergiert auch schwach. In diesem Fall stimmen der Grenzwert aus der Normkonvergenz und der schwache Grenzwert überein.*

(c) *Jeder stetige lineare Operator zwischen zwei Hilberträumen erhält die schwache Konvergenz von Folgen, d.h., er ist* schwach folgenstetig*.*

(d) *Jede schwach konvergente Folge in einem Hilbertraum ist beschränkt.*

(e) *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum enthält eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Seien E und F Hilberträume. **(a):** Seien x^*, x^{**} zwei schwache Grenzwerte einer schwach konvergenten Folge $(x_n) \subseteq E$. Für alle $y \in E$ gilt dann

$$\langle x^* - x^{**}, y\rangle = \langle x^*, y\rangle - \langle x^{**}, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\big(\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y\rangle\big) = 0,$$

das heißt, $x^* = x^{**}$.

(b): Es gelte $x_n \to x^*$ in E. Für alle $y \in E$ folgt dann $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x^*, y\rangle$, wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes, also $x_n \rightharpoonup x^*$.

(c): Seien $L \in \mathcal{L}(E, F)$ und $x_n \rightharpoonup x^*$ in E. Für $z \in F$ definieren wir $g_z \in E'$ durch $g_z(x) := \langle Lx, z\rangle$. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes, Satz 1.26, existiert $y \in E$ mit $f_y(x) = \langle x, y\rangle = g_z(x) = \langle Lx, z\rangle$ für alle $x \in E$. Es folgt

$$\langle Lx_n, z\rangle = \langle x_n, y\rangle \to \langle x^*, y\rangle = \langle Lx^*, z\rangle.$$

Da $z \in F$ beliebig war, zeigt dies $Lx_n \rightharpoonup Lx^*$ in F.

(d): Wir definieren $f_n := \langle x_n, \cdot \rangle \in E'$. Dann konvergiert $f_n(y)$ für alle $y \in E$. Nach Satz 1.52 bleibt $\|f_n\|$ also beschränkt, und wegen Proposition 1.19(d) ist $\|x_n\| = \|f_n\|$ beschränkt.

(e): Zunächst sei E separabel. Dann existiert eine Folge $(y_k) \subseteq E$, die in E dicht liegt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(\langle x_n, y_k \rangle)_n$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Für $k = 1$ wählen wir eine Teilfolge (x_n^1) von (x_n) aus, so dass $\langle x_n^1, y_1 \rangle$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Danach wählen wir eine Teilfolge (x_n^2) von (x_n^1) aus, so dass $\langle x_n^2, y_2 \rangle$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Induktiv erhalten wir auf diese Weise für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(x_n^k)_n$ von $(x_n^{k-1})_n$, so dass $\langle x_n^k, y_k \rangle$ in $\mathbb{R}$ konvergiert wenn $n \to \infty$. Dann ist auch die Diagonalfolge $z_n := x_n^n$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge von $(x_n^k)_n$, und $\langle z_n, y_k \rangle$ konvergiert in $\mathbb{R}$ wenn $n \to \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist (z_n) beschränkt.

Wir definieren $f_n \in E'$ durch $f_n := \langle z_n, \cdot \rangle$. Dann gilt $\|f_n\| = \|z_n\| \leq C$ mit einer Konstante $C \geq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiert $f_n(y_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen Satz 1.53 konvergiert $f_n(y)$ für alle $y \in E$ gegen ein $f \in E'$. Satz 1.26 liefert $z \in E$, so dass $f = \langle z, \cdot \rangle$ gilt. Es folgt $\langle z_n, y \rangle = f_n(y) \to f(y) = \langle z, y \rangle$, für alle $y \in E$, d.h., $z_n \rightharpoonup z$.

Falls E ein allgemeiner Hilbertraum ist, dann definieren wir $F := \overline{[x_1, x_2, \dots]}$. Wie im Beweis von Satz 1.36 konstruiert man eine abzählbare Hilbertbasis für F. In Aufgabe 36(a) wurde gezeigt, dass F dann separabel ist. Wegen des ersten Teils des gegenwärtigen Beweises existiert eine Teilfolge (z_n) von (x_n), die schwach in F konvergiert. Sei P die Orthogonalprojektion auf F. Für alle $y \in E$ gilt dann

$$\langle z_n, y \rangle = \langle P z_n, y \rangle = \langle z_n, Py \rangle \to \langle z, Py \rangle = \langle Pz, y \rangle = \langle z, y \rangle$$

und daher $z_n \rightharpoonup z$. □

1.63 Beispiel. Falls $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ein abzählbares Orthonormalsystem in E ist, dann gilt $x_n \rightharpoonup 0$: Sei $y \in E$. Proposition 1.31(a) zeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |\langle y, x_n \rangle|^2$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Daher gilt $\langle y, x_n \rangle \to 0$. Weil y beliebig war, folgt $x_n \rightharpoonup 0$.

Andererseits gilt für $m \neq n$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|x_m\|^2 + \|x_n\|^2 = 2.$$

Daher kann (x_n) keine Norm-Cauchyfolge, und somit auch keine normkonvergente Teilfolge enthalten.

1.64 Proposition. *Seien E, F Hilberträume. Ein linearer Operator $K \colon E \to F$ ist genau dann kompakt, wenn (Kx_n) für jede schwach konvergente Folge (x_n) in E im ursprüglichen Sinne in F konvergiert. In diesem Fall gilt $Kx_n \to Kx$ falls $x_n \rightharpoonup x$.*

Beweis. Sei zunächst K kompakt. Wenn $x_n \rightharpoonup x$ in E, dann nehmen wir für einen Beweis durch Widerspruch an, dass $Kx_n \not\to Kx$ gilt. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $r > 0$ existiert mit

$$\|Kx_n - Kx\| \geq r \qquad \text{für alle } n. \tag{1.25}$$

Wegen Proposition 1.62(d) ist (x_n) beschränkt. Die Kompaktheit von K und Lemma 1.59(b) erlauben uns (nach Übergang zu einer Teilfolge) anzunehmen, dass $Kx_n \to y$, und wegen Proposition 1.62(b) gilt $Kx_n \rightharpoonup y$. Nach Lemma 1.59(a) und Proposition 1.62(c) gilt aber auch $Kx_n \rightharpoonup Kx$. Wegen der Eindeutigkeit der schwachen Grenzwerte muss also $y = Kx$ gelten und daher $Kx_n \to Kx$, im Widerspruch zu (1.25).

Sei umgekehrt (x_n) eine beschränkte Folge in E. Wegen Proposition 1.62(e), und nach Übergang zu einer Teilfolge, können wir annehmen, dass (x_n) schwach konvergiert. Dann konvergiert (Kx_n) wegen der Voraussetzung in der Norm in F. Daher besitzt jede beschränkte Folge in E eine Teilfolge, so dass (Kx_n) in F konvergiert. Wegen Lemma 1.59(b) ist K also kompakt. □

1.65 Proposition. *Seien E ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt. Dann ist K^* kompakt.*

Beweis. Sei $x_n \rightharpoonup x$ in E. Wegen Proposition 1.62(c) gilt $K^*x_n \rightharpoonup K^*x$. Da K kompakt ist, folgt aus Proposition 1.64 $KK^*x_n \to KK^*x$ in E. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|K^*x_n - K^*x\|^2 &= \langle K^*x_n - K^*x, K^*x_n - K^*x\rangle \\ &= \langle KK^*x_n - KK^*x, x_n - x\rangle \\ &\le \|KK^*x_n - KK^*x\|\,\|x_n - x\| \\ &\to 0,\end{aligned}$$

weil $\|x - x_n\|$ wegen Proposition 1.62(d) beschränkt bleibt. Die Behauptung folgt jetzt aus Proposition 1.64. □

1.66 Lemma. *Seien E ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(E)$. Es gebe abgeschlossene Unterräume E_n von E und Skalare λ_n, $n \in \mathbb{N}$, so dass gelten:*

$$\bar{\lambda} := \inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| > 0, \tag{1.26}$$

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3 \subsetneq \dots, \tag{1.27}$$

und

$$(\lambda_n I - K)(E_n) \subseteq E_{n-1} \qquad \text{für alle } n \ge 2. \tag{1.28}$$

Dann ist K nicht kompakt.

Beweis. Weil E_n ein Hilbertraum ist, folgt $E_n = E_{n-1} \oplus E_{n-1}^{\perp_{E_n}}$, wobei $\perp_{E_n}$ das orthogonale Komplement in E_n bedeutet. Wegen $E_{n-1} \subsetneq E_n$ ist klar, dass $E_{n-1}^{\perp_{E_n}} \ne \{0\}$ gilt. Wir können $x_n \in E_{n-1}^{\perp_{E_n}} = E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ auswählen mit $\|x_n\| = 1$, für $n \ge 2$. Für $n > m$ gilt dann

$$Kx_m - Kx_n = \underbrace{(\lambda_n I - K)x_n - (\lambda_m I - K)x_m + \lambda_m x_m}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\lambda_n x_n}_{\in E_{n-1}^{\perp}}.$$

Mit $\|x_n\| = 1$ folgt

$$\|Kx_m - Kx_n\|^2 = \|(\lambda_n I - K)x_n - (\lambda_m I - K)x_m + \lambda_m x_m\|^2 + \|\lambda_n x_n\|^2 \\ \geq \|\lambda_n x_n\|^2 \geq \bar{\lambda}^2$$

für alle $m \neq n$, $m, n \geq 2$, das heißt, (Kx_n) enthält keine Cauchyfolge. Da (x_n) eine beschränkte Folge ist, kann K nicht kompakt sein. □

1.67 Satz. *Sei E ein Hilbertraum und sei $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt. Dann gelten:*

(a) $\dim \mathcal{N}(I - K) < \infty$,

(b) $\mathcal{R}(I - K)$ *ist abgeschlossen,*

(c) $\mathcal{R}(I - K) = \mathcal{N}(I - K^*)^\perp$,

(d) $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$ *genau dann, wenn* $\mathcal{R}(I - K) = E$,

(e) $\dim \mathcal{N}(I - K) = \dim(\mathcal{R}(I - K)^\perp) = \dim \mathcal{N}(I - K^*)$.

Beweis. **(a)** Für alle $x \in \mathcal{N}(I - K)$ haben wir $Kx = x$. Daher ist $\mathrm{id}_{\mathcal{N}(I-K)} = K|_{\mathcal{N}(I-K)}$ kompakt. Aus Lemma 1.59(c) folgt nun die Behauptung.

(b) Wir zeigen, dass $\alpha > 0$ existiert, so dass

$$\|(I - K)x\| \geq \alpha \|x\| \tag{1.29}$$

für alle $x \in \mathcal{N}(I - K)^\perp$ gilt. In diesem Fall liefert Satz 1.29(a), dass $\mathcal{R}(I - K)$ abgeschlossen ist. Falls (1.29) nicht richtig ist, dann existiert eine Folge $(x_n) \subseteq S_1\mathcal{N}(I - K)^\perp$, so dass $\|(I - K)x_n\| \to 0$. Da K kompakt und (x_n) beschränkt ist, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass $Kx_n \to y$ in E. Es folgt, dass auch $x_n \to y$ in E und $\|y\| = 1$. Die Stetigkeit von K liefert $Ky = y$, das heißt, $y \in S_1\mathcal{N}(I - K)$. Weil aber $x_n \in S_1\mathcal{N}(I - K)^\perp$ gilt, haben wir $\|x_n - y\| = \sqrt{2}$ für alle n, ein Widerspruch.

(c) Dies folgt aus (b) und Proposition 1.40.

(d) Wir nehmen $\mathcal{N}(I - K) \neq \{0\}$ und $\mathcal{R}(I - K) = E$ an. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den abgeschlossenen linearen Unterraum $E_n := \mathcal{N}((I - K)^n)$. Es ist klar, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Voraussetzung existiert $x_1 \in E_1 \backslash \{0\}$. Da $I - K$ surjektiv ist, existiert eine Folge (x_n), so dass $(I - K)x_{n+1} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt

$$(I - K)^n x_{n+1} = x_1 \neq 0 \qquad \text{aber} \qquad (I - K)^{n+1} x_{n+1} = 0,$$

also $x_{n+1} \in E_{n+1} \backslash E_n$ und es gilt daher (1.27). Mit $\lambda_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgen auch (1.26) und (1.28). Weil K kompakt ist, erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 1.66, das heißt, $\mathcal{R}(I - K) = E$ erzwingt $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$.

Andererseits folgt aus $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$ und Proposition 1.40 $\mathcal{R}(I - K^*) = \mathcal{N}(I - K)^\perp = E$. Wegen Proposition 1.65 gilt, was wir schon für K gezeigt haben, auch für K^*. Daher ist $\mathcal{N}(I - K^*) = \{0\}$ und schließlich, wieder mit Proposition 1.40, $\mathcal{R}(I - K) = \mathcal{N}(I - K^*)^\perp = E$.

(e) Zuerst zeigen wir

$$\dim \mathcal{N}(I-K) \geq \dim \mathcal{R}(I-K)^{\perp}. \tag{1.30}$$

Für einen Widerspruch nehmen wir $\dim \mathcal{N}(I-K) < \dim \mathcal{R}(I-K)^{\perp}$ an. Dann existiert $A \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(I-K), \mathcal{R}(I-K)^{\perp})$, so dass A injektiv, aber nicht surjektiv ist. Wir erweitern A zu einem Operator in $\mathcal{L}(E, \mathcal{R}(I-K)^{\perp})$, indem wir $Ax = 0$ für $x \in \mathcal{N}(I-K)^{\perp}$ setzen. Mit anderen Worten erweitern wir A zu AP, wobei P die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(I-K)$ ist. Da $\mathcal{R}(AP) = A(\mathcal{N}(I-K))$ endliche Dimension besitzt, sind AP und $\widetilde{K} := K + AP$ wegen Lemma 1.59 kompakt. Sei $x \in \mathcal{N}(I-\widetilde{K})$. Es gilt dann

$$(I-K)x = APx \in \mathcal{R}(I-K) \cap \mathcal{R}(I-K)^{\perp} = \{0\},$$

das heißt, $x \in \mathcal{N}(I-K)$, $Px = x$ und daher $Ax = APx = 0$. Weil A injektiv in $\mathcal{N}(I-K)$ ist, haben wir $x = 0$. Es folgt $\mathcal{N}(I-\widetilde{K}) = \{0\}$. Die Anwendung von (d) auf den kompakten Operator $\widetilde{K}$ liefert $\mathcal{R}(I-\widetilde{K}) = E$. Andererseits gilt $\mathcal{R}(I-\widetilde{K}) \subseteq \mathcal{R}(I-K) \oplus \mathcal{R}(A) \subsetneq E$ wegen $\mathcal{R}(A) \subsetneq \mathcal{R}(I-K)^{\perp}$. Widerspruch! Damit ist (1.30) gezeigt.

Nochmalige Anwendung von Proposition 1.40 zusammen mit (1.30) liefert $\dim \mathcal{N}(I-K) \geq \dim \mathcal{N}(I-K^*)$. Da K^* wegen Proposition 1.65 kompakt ist, erhalten wir, mit vertauschten Rollen von $K = K^{**}$ und K^*, dass $\dim \mathcal{N}(I-K^*) \geq \dim \mathcal{N}(I-K)$ gilt, also insgesamt

$$\dim \mathcal{N}(I-K) = \dim \mathcal{N}(I-K^*) = \dim(\mathcal{R}(I-k)^{\perp}). \qquad \square$$

1.68 Korollar (Fredholm-Alternative)**.** *Seien E ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:*

(i) *Für alle $y \in E$ hat jede der Gleichungen*

$$x - Kx = y, \qquad x - K^*x = y$$

genau eine Lösung.

(ii) *Die homogenen Gleichungen*

$$x - Kx = 0, \qquad x - K^*x = 0$$

besitzen nichttriviale Lösungen. In diesem Fall haben die Lösungsräume der beiden Gleichungen dieselbe endliche Dimension. Für $y \in E$ hat die Gleichung $x - Kx = y$ eine (nicht eindeutige) Lösung genau dann, wenn $\langle y, x\rangle = 0$ für alle x gilt, die $x - K^*x = 0$ erfüllen. Die Gleichung $x - K^*x = y$ hat eine (nicht eindeutige) Lösung genau dann, wenn $\langle y, x\rangle = 0$ für alle x gilt, die $x - Kx = 0$ erfüllen.

1.69 Definition. Seien E ein Banachraum und $L \in \mathcal{L}(E)$. Die Menge

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda I - L \text{ ist bijektiv}\}$$

heißt die *(reelle) Resolventenmenge* von L. Wegen Korollar 1.46 ist $(\lambda I - L)^{-1}$ stetig für alle $\lambda \in \rho(L)$. Die Abbildung $\rho(L) \to \mathcal{L}(E)$, $\lambda \to (\lambda I - L)^{-1}$, heißt die *(reelle) Resolvente* von L. Die Menge

$$\sigma(L) := \mathbb{R} \backslash \rho(L)$$

heißt das *(reelle) Spektrum* von L. $\lambda \in \sigma(L)$ ist ein *Eigenwert* von L falls $\mathcal{N}(\lambda I - L) \neq \{0\}$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathcal{N}(\lambda I - L)$ der zum Eigenwert λ gehörige *Eigenraum* von L, und die Elemente von $\mathcal{N}(\lambda I - L) \backslash \{0\}$ heißen die zum Eigenwert λ gehörigen *Eigenvektoren* von L. Wir nennen die Menge

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \sigma(L) \mid \mathcal{N}(\lambda I - L) \neq \{0\}\},$$

das *Punktspektrum* von L.

1.70 Proposition. *Sei E ein Banachraum und $L \in \mathcal{L}(E)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(L)$ kompakt und* $\max_{\lambda \in \sigma(L)} |\lambda| \leq \|L\|$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \|L\|$ gegeben. Dann gilt $\|L/\lambda\| < 1$, und wegen Proposition 1.9 ist $I - L/\lambda$ invertierbar in $\mathcal{L}(E)$ und somit auch $\lambda I - L = \lambda(I - L/\lambda)$. Dies bedeutet aber $\lambda \in \rho(L)$. Somit haben wir $\sup_{\lambda \in \sigma(L)} |\lambda| \leq \|L\|$ gezeigt.

Wir zeigen, dass $\rho(L)$ offen ist: Sei dazu $\lambda_0 \in \rho(L)$. Wir setzen $r := 1/\|(\lambda_0 I - L)^{-1}\|$ und zeigen, dass $U_r(\lambda_0) \subseteq \rho(L)$. Sei also $\lambda \in U_r(\lambda_0)$ gegeben. Mit $A := \lambda_0 I - L$ und $B := \lambda I - L$ folgt

$$\begin{aligned} I - BA^{-1} &= I - (\lambda I - L)(\lambda_0 I - L)^{-1} \\ &= I - ((\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - L)(\lambda_0 I - L)^{-1} \\ &= I - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - L)^{-1} - I \\ &= -(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - L)^{-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\|I - BA^{-1}\| \leq |\lambda - \lambda_0| \, \|(\lambda_0 I - L)^{-1}\| < r \cdot \frac{1}{r} = 1.$$

Aufgabe 34(a) liefert, dass B in $\mathcal{L}(E)$ invertierbar ist, das heißt, dass $\lambda \in \rho(L)$ gilt. Also folgt $U_r(\lambda_0) \subseteq \rho(L)$. Insgesamt ist also $\rho(L)$ offen und $\sigma(L)$ abgeschlossen. $\square$

1.71 Proposition. *Sei E ein Hilbertraum und sei $A \in \mathcal{L}(E)$ symmetrisch. Wir definieren*

$$m := \inf_{x \in S_1 E} \langle Ax, x \rangle \qquad \text{und} \qquad M := \sup_{x \in S_1 E} \langle Ax, x \rangle.$$

Dann gelten $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ und $m, M \in \sigma(A)$.

Beweis. Sei $\lambda > M$. Es folgt

$$\langle (\lambda I - A)x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 - \langle Ax, x \rangle \geq (\lambda - M)\|x\|^2$$

für alle $x \in E$. Mit Satz 1.29(b) erhalten wir, dass $\lambda I - A$ bijektiv ist, also $\lambda \in \rho(A)$. Insgesamt folgt $\sigma(A) \subseteq (-\infty, M]$.

Wir zeigen $M \in \sigma(A)$: Mit $((x,y)) := \langle Mx - Ax, y\rangle$ folgt, dass $((\cdot,\cdot))$ eine positiv semidefinite, symmetrische, bilineare Funktion ist, das heißt, dass unter anderem $((x,x)) \geq 0$ für alle $x \in E$ gilt. Wie im Beweis von Proposition 1.19(a) kann man zeigen, dass $((\cdot,\cdot))$ das Analog der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erfüllt (im jenem Beweis wird nur die positive *Semi*definitheit verwendet). Eine Anwendung von Lemma 1.37 liefert

$$\begin{aligned}\|(MI - A)x\| &= \sup_{y\in S_1E} |\langle Mx - Ax, y\rangle| \\ &= \sup_{y\in S_1E} |((x,y))| \\ &\leq \sup_{y\in S_1E} ((x,x))^{1/2}((y,y))^{1/2} \\ &= \sup_{y\in S_1E} \langle Mx - Ax, x\rangle^{1/2}\langle My - Ay, y\rangle^{1/2} \\ &\leq \langle Mx - Ax, x\rangle^{1/2}\|MI - A\|^{1/2}\end{aligned} \tag{1.31}$$

für alle $x \in E$. Sei $(x_n) \subseteq S_1E$ so gewählt, dass $\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n\rangle = M$ gilt. Aus (1.31) folgern wir, dass $\|(MI - A)x_n\| \to 0$ gilt. Falls $M \in \rho(A)$ richtig wäre, dann würde $x_n = (MI - A)^{-1}(MI - A)x_n \to 0$ folgen, ein Widerspruch. Daher muss $M \in \sigma(A)$ gelten.

Wenn wir A durch $-A$ ersetzen, dann erhalten wir die Eigenschaften von m auf dieselbe Art und Weise. □

1.72 Korollar. *Sei E ein Hilbertraum und sei $A \in \mathcal{L}(E)$ symmetrisch. Falls $\sigma(A) = \{0\}$ gilt, dann ist $A = 0$.*

Beweis. Proposition 1.71 liefert $\langle Ax, x\rangle = 0$ für alle $x \in E$. Für festes $y \in E$ folgt für alle $x \in E$, dass

$$2\langle Ay, x\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle Ax, x\rangle - \langle Ay, y\rangle = 0,$$

das heißt, $Ay = 0$. □

1.73 Satz. *Sei E ein Hilbertraum mit $\dim(E) = \infty$ und sei $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt. Dann gelten:*

(a) $0 \in \sigma(K)$;

(b) $\dim \mathcal{N}(\lambda I - K) < \infty$ *für alle* $\lambda \in \sigma_p(K)\backslash\{0\}$;

(c) $\sigma(K)\backslash\{0\} \subseteq \sigma_p(K)$;

(d) $\sigma(K)\backslash\{0\}$ *besteht aus in* $\sigma(K)$ *isolierten Punkten.*

Beweis. **(a)** Falls $0 \notin \sigma(K)$, dann ist K in $\mathcal{L}(E)$ invertierbar und $I = KK^{-1}$ ist kompakt. Dies kann jedoch wegen Lemma 1.59(c) und $\dim(E) = \infty$ nicht richtig sein. Daher gilt $0 \in \sigma(K)$.

(b) Dies ist eine Folgerung aus Satz 1.67(a).

(c) Falls $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ und $\lambda \notin \sigma_p(K)$, dann gilt $\mathcal{N}(\lambda I - K) = \{0\}$. Wegen Satz 1.67(d) gilt $\mathcal{R}(\lambda I - K) = E$, das heißt, $\lambda I - K$ ist bijektiv. Es folgt $\lambda \notin \sigma(K)$, Widerspruch!

(d) Sei $(\lambda_n) \subseteq \sigma(K)\backslash\{0\}$, so dass $\lambda_m \neq \lambda_n$ für alle $m \neq n$, und so, dass $\lambda_n \to \lambda$. Es reicht zu zeigen, dass $\lambda = 0$ gilt. Für einen Beweis durch Widerspruch nehmen wir $\lambda \neq 0$ an und verwenden Lemma 1.66. Es ist klar, dass (1.26) erfüllt ist. Wir wählen zu jedem λ_n einen zugehörigen Eigenvektor x_n von K und setzen $E_n := [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$.

Wir zeigen induktiv, dass $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ linear unabhängig ist für jedes n: Wegen $x_1 \neq 0$ ist $\{x_1\}$ linear unabhängig. Falls $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ linear unabhängig ist, nehmen wir an, dass

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \tag{1.32}$$

mit Skalaren α_k gilt. Es folgt einerseits

$$K x_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+1} \alpha_k x_k,$$

und andererseits

$$K x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k x_k.$$

Dies liefert

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{n+1}) \alpha_k x_k = 0.$$

Da die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, folgt $(\lambda_k - \lambda_{n+1})\alpha_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Die paarweise Verschiedenheit der Folgeglieder λ_m liefert $\alpha_k = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Dies widerspricht aber $x_{n+1} \neq 0$ und (1.32). Also kann (1.32) nicht richtig sein, und $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$ ist linear unabhängig.

Es ist klar, dass (1.27) erfüllt ist. Für $x \in E_n$ haben wir

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

und daher

$$(\lambda_n I - K)x = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k x_k \in E_{n-1}.$$

Es folgt die Eigenschaft (1.28). Da K kompakt ist, liefert Lemma 1.66 einen Widerspruch, das heißt, $\lambda = 0$ muss richtig sein. $\square$

1.74 Bemerkung. Aus Satz 1.73(c) folgt $\sigma(K)\backslash\{0\} = \sigma_p(K)\backslash\{0\}$. Zusammen mit Proposition 1.70 zeigen die Abschnitte (a) und (d) von Satz 1.73, dass genau eine der folgenden Möglichkeiten eintreten muss:

(i) $\sigma(K)$ ist endlich;

(ii) $\sigma(K)\backslash\{0\}$ besteht aus einer gegen 0 konvergierenden Folge.

1.75 Satz. *Sei E ein separabler Hilbertraum und sei $K \in \mathcal{L}(E)$ symmetrisch und kompakt. Dann existiert eine abzählbare Hilbertbasis von E, die aus Eigenvektoren von K besteht.*

Beweis. Wir schreiben $\lambda_0 := 0$. Wegen Bemerkung 1.74 existiert eine (möglicherweise endliche oder leere) Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ von paarweise verschiedenen Eigenwerten von A, so dass $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. Wie in Aufgabe 37 sieht man leicht, dass Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind. Wir setzen $E_n := \mathcal{N}(\lambda_n I - K)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt also

$$E_m \perp E_n \qquad \text{falls } m \neq n. \tag{1.33}$$

Sei $F := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} E_n$. Wir zeigen, dass $\overline{F} = E$. Es ist klar, dass $K(F) \subseteq F$ gilt. Falls x in $F^\perp$ liegt, dann folgt für alle $y \in F$, dass $\langle y, Kx\rangle = \langle Ky, x\rangle = 0$ gilt, also $K(F^\perp) \subseteq F^\perp$. Der Operator $\widetilde{K} := K|_{F^\perp}$ ist ein kompakter symmetrischer Operator im Hilbertraum $F^\perp$. Außerdem gilt $\sigma(\widetilde{K}) = \{0\}$: Falls $\widetilde{K}$ einen von Null verschiedenen Eigenwert mit Eigenvektor $x \in F^\perp$ besäße, dann wäre x auch ein Eigenvektor von K. Aber dies würde bedeuten, dass $x \in F$, das heißt, $x = 0$. Widerspruch! Also gilt $\sigma(\widetilde{K}) = \{0\}$. Korollar 1.72 liefert nun $\widetilde{K} = 0$ und daher $F^\perp \subseteq \mathcal{N}(K) \subseteq F$, das heißt, $F^\perp = \{0\}$. Also gilt $E = \overline{F} \oplus F^\perp = \overline{F}$.

Nun bezeichne P die Orthogonalprojektion auf E_0. Falls $S := \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ dicht in E liegt, dann liegt $\{Px_1, Px_2, Px_3, \ldots\}$ dicht in E_0: Für $x \in E_0$ existiert eine Folge $(y_n) \subseteq S$, so dass $y_n \to x$ in E. Weil P stetig ist, folgt $Py_n \to Px = x$, und außerdem $(Py_n) \subseteq P(S) \subseteq E_0$. daher ist E_0 separabel. Wegen Satz 1.36 existiert eine abzählbare Hilbertbasis für E_0. Für $n \geq 1$ wissen wir wegen Satz 1.73(b), dass $\dim E_n < \infty$ und dass eine endliche Hilbertbasis für E_n existiert. Die Vereinigung dieser Hilbertbasen der linearen Unterräume E_n, $n \in \mathbb{N}_0$, liefert eine abzählbare Hilbertbasis von E wegen Lemma 1.33. □

2 Soboleverräume

In diesem Kapitel sei Ω immer eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$. Für $p \in [1, \infty)$ und $u \in L^p(\Omega)$ schreiben wir

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

wenn keine Unklarheit über Ω besteht.

Für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X und $r > 0$ setzen wir

$$\begin{aligned} U_r(A) &:= U_r(A; X) := \{y \in X \mid \operatorname{dist}(y, A) < r\}, \\ B_r(A) &:= B_r(A; X) := \{y \in X \mid \operatorname{dist}(y, A) \leq r\}, \\ S_r(A) &:= S_r(A; X) := \{y \in X \mid \operatorname{dist}(y, A) = r\}. \end{aligned}$$

2.1 Proposition. *Sei $u \in C(\Omega)$. Dann konvergiert die Glättung u^ε auf kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig gegen u wenn $\varepsilon \to 0$.*

Beweis. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Wir wählen $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $B_{\varepsilon_0}(K) \subseteq \Omega$ gilt. Sei $\delta > 0$. Da $B_{\varepsilon_0}(K)$ kompakt ist und u stetig, existiert $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$, so dass

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]\, \forall x, y \in B_{\varepsilon_0}(K)\colon (|x - y| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u(x) - u(y)| \leq \delta). \tag{2.1}$$

Es folgt für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ und $x \in K$, dass

$$|u^\varepsilon(x) - u(x)| = \left| \int_\Omega \rho_\varepsilon(x - y)(u(y) - u(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x - y)|u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y \leq \delta,$$

weil $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_0}(K)$. Dies liefert $\|u^\varepsilon - u\|_\infty \leq \delta$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ und daher die Behauptung. □

2.2 Korollar. *Für $p \in [1, \infty)$ liegt $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Zunächst ist wegen Proposition 2.1 klar, dass C_c^∞ in C_c dicht liegt: Für $u \in C_c$ konvergieren die trivialen Fortsetzungen von u^ε auf Ω gleichmäßig in Ω gegen u. Die Aussage folgt nun aus Lemma 1.35, weil $C_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegt (Maßtheorie!). □

2.3 Lemma. *Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann existiert $u \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u(x) = 1$ für alle $x \in K$ und $u(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis. Da K kompakt ist, $\partial\Omega$ abgeschlossen und $K \cap \partial\Omega = \varnothing$, folgt $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)/5 > 0$. Wir setzen $K_0 := B_\varepsilon(K)$ und definieren $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \operatorname{dist}(x, K_0) \geq \varepsilon, \\ 1 - \operatorname{dist}(x, K_0)/\varepsilon & \operatorname{dist}(x, K_0) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt wegen der Stetigkeit der Distanzfunktion $v \in C_c(\Omega)$, $\mathrm{supp}(v) = B_\varepsilon(K_0) = B_{2\varepsilon}(K)$, $v(x) = 1$ für $x \in K_0$ und $v(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \Omega$. Proposition 2.1 liefert für $v^\varepsilon := \rho_\varepsilon * v$, dass $\mathrm{supp}(v^\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(\mathrm{supp}(v)) = B_{3\varepsilon}(K)$, das heißt, $v^\varepsilon \subseteq C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Außerdem folgt für $x \in K$, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq K_0$. Die Eigenschaften von ρ_ε zeigen, dass $v^\varepsilon(x) = 1$. Da $\rho_\varepsilon \geq 0$ erhalten wir

$$v^\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y \in [0,1].$$

Schließlich definieren wir

$$u(x) := \begin{cases} v^\varepsilon(x) & x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon. \end{cases} \qquad \square$$

2.4 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Eine Funktion $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ erfülle*

$$\int_\Omega u\varphi = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

Dann ist $u \equiv 0$ in Ω.

Beweis. Zunächst nehmen wir $|\Omega| < \infty$ und $u \in L^1(\Omega)$ an. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen Korollar 2.2 existiert $\bar{u} \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\|u - \bar{u}\|_1 \leq \varepsilon$. Wir setzen

$$K_1 := \{x \in \Omega \mid \bar{u}(x) \geq \varepsilon\}, \qquad K_2 := \{x \in \Omega \mid \bar{u}(x) \leq -\varepsilon\}, \qquad K := K_1 \cup K_2.$$

Es folgt, dass die Mengen K_1, K_2 kompakt sind und leeren Durchschnitt haben. Daher gilt $\delta := \mathrm{dist}(K_1, K_2)/2 > 0$. Wegen Lemma 2.3 existieren $\varphi_i \subseteq C_c^\infty(U_\delta(K_i))$, so dass $\varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in K_i$ und $\varphi_i(x) \subseteq [0,1]$ für alle $x \in U_\delta(K_i)$. Wir setzen φ_i trivial nach Ω fort und definieren $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$. Es folgt $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) = 1$ für $x \in K_1$, $\varphi(x) = -1$ für $x \in K_2$, und $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Daher liefert (2.2)

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &\leq \varepsilon + \|\bar{u}\|_1 \\
&= \varepsilon + \int_{\Omega\backslash K} |\bar{u}| + \int_K |\bar{u}| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon|\Omega| + \int_K |\bar{u}| \\
&= \varepsilon(1 + |\Omega|) + \int_K \bar{u}\varphi \\
&= \varepsilon(1 + |\Omega|) + \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega (\bar{u} - u)\varphi - \int_{\Omega\backslash K} \bar{u}\varphi \\
&\leq \varepsilon(1 + |\Omega|) + \int_\Omega u\varphi + \|\bar{u} - u\|_1 \|\varphi\|_\infty + \int_{\Omega\backslash K} |\bar{u}| \\
&\leq 2\varepsilon(1 + |\Omega|) + \int_\Omega u\varphi \\
&= 2\varepsilon(1 + |\Omega|).
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|u\|_1 = 0$, also $u = 0$ fast überall in Ω.

Im allgemeinen Fall setzen wir

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/n,\ |x| < n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist Ω_n für alle $n \in \mathbb{N}$ offen, und $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega$ ist kompakt. Außerdem gilt

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n.$$

Der erste Schritt des Beweises, für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $u|_{\Omega_n}$ angewandt, liefert $u = 0$ fast überall in Ω. $\square$

2.1 Schwache Differenzierbarkeit

Die bekannten Banachräume k-mal stetig differenzierbarer Funktionen $BC^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ sind keine Hilberträume. Wie wir im Kapitel über die Spektraltheorie kompakter Operatoren gesehen haben, hat es viele Vorteile, in Hilberträumen (allgemeiner: in reflexiven Räumen) zu arbeiten. Für die Definition von Hilberträumen differenzierbarer Funktionen benötigen wir die im Folgenden beschriebene schwächere Version von Differenzierbarkeit.

Für Funktionen $u \in C^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ liegt φu in $C_c^1(\Omega)$. Für die triviale Fortsetzung von φu auf $\mathbb{R}^N$ gilt dann $\varphi u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ gilt wegen des Hauptsatzes der Analysis (Integration bezüglich der i-ten Koordinate):

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(\varphi u) = \int_\Omega \partial_i(\varphi u) = \int_\Omega (u\partial_i\varphi + \varphi\partial_i u).$$

Hieraus gewinnen wir eine spezielle Form der partiellen Integration:

$$\int_\Omega u\partial_i\varphi = -\int_\Omega \partial_i u\,\varphi \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Iteration dieser Formel liefert für $u \in C^k(\Omega)$ und einen Multiindex α der Ordnung $|\alpha|_1 \leq k$:

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega \partial^\alpha u\,\varphi. \tag{2.4}$$

Im Folgenden verwenden wir (2.4) um schwache partielle Ableitungen von u zu definieren:

2.5 Definition. Seien $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und α ein Multiindex. Dann ist v die schwache partielle Ableitung zu α von u falls

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega v\,\varphi \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

In diesem Fall schreiben wir $\partial^\alpha u := v$.

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Satz 2.4, folgt sofort:

2.6 Lemma. *Falls eine schwache partielle Ableitung zu α von $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ existiert, dann ist $\partial^\alpha u$ in L^1_{loc} eindeutig festgelegt.*

2.7 Bemerkung. Falls $u \in C^k(\Omega)$, dann liefert Lemma 2.6, dass jede schwache partielle Ableitung bis zur Ordnung k mit der jeweiligen klassischen partiellen Ableitung fast überall übereinstimmt.

2.8 Bemerkung. Man kann zeigen, dass schwache Differenzierbarkeit, genau wie klassische Differenzierbarkeit, eine lokale Eigenschaft ist: Falls $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und falls jedes $x \in \Omega$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq \Omega$ hat, so dass $u|_{U_x}$ die schwache Ableitung $\partial_i u$ besitzt, dann existiert die schwache Ableitung $\partial_i u$ in ganz Ω und stimmt mit den lokalen schwachen Ableitungen überein.

Der Beweis benötigt den Begriff der Parakompaktheit und der glatten Partition der Eins, die einer offenen Überdeckung untergeordnet ist.

2.9 Proposition. *Seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

(a) *Sei α ein Multiindex, so dass $\partial^\alpha u$ und $\partial^\alpha v$ existieren, und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt $w := \lambda u + \mu v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, es existiert $\partial^\alpha w$ und es gilt:*

$$\partial^\alpha w = \lambda \partial^\alpha u + \mu \partial^\alpha v,$$

das heißt, ∂^α ist ein linearer Operator.

(b) *Falls die schwachen Ableitungen von u bis zu einer Ordnung $k \in \mathbb{N}$ existieren, dann gilt für Multiindizes α, β mit $|\alpha|_1 + |\beta|_1 \le k$, dass*

$$\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta} u.$$

(c) *Falls $w \in C^\infty_c(\Omega)$ und falls $\partial_i u$ existiert, dann existiert $\partial_i(wu) = u\partial_i w + w\partial_i u$.*

Beweis. **(a)** Dies folgt direkt aus Definition 2.5.

(b) Für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ haben wir

$$\partial^\alpha(\partial^\beta \varphi) = \partial^\beta(\partial^\alpha \varphi) = \partial^{\alpha+\beta} \varphi.$$

Dann liefernDefinition 2.5 und Lemma 2.6 die Behauptung.

(c) Falls $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, dann gilt

$$\int_\Omega (u\partial_i w + w\partial_i u)\varphi = \int_\Omega u(\varphi\partial_i w - \partial_i(w\varphi)) = -\int_\Omega uw\partial_i\varphi.$$

Die Eindeutigkeit der schwachen partiellen Ableitung liefert die Behauptung. □

2.2 Grundlegende Eigenschaften der Sobolevräume

2.10 Definition. Seien $p \in [1, \infty]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren den*Sobolevraum* $W^{k,p}(\Omega)$ als den linearen Raum der Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, welche eine schwache partielle Ableitung $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha|_1 \leq k$ besitzen. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

2.11 Bemerkung. Die Definition impliziert $W^{k,p}(\Omega) \subseteq W^{l,p}(\Omega)$ falls $l \leq k$, und $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. Proposition 2.9(b) liefert $\partial^\alpha u \in W^{l,p}(\Omega)$ falls $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\alpha|_1 \leq k - l$. Wegen Proposition 2.9(a) ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Untervektorraum von $L^p(\Omega)$.

Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $0 \leq n \leq k$ führen wir die folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^n u &:= \{\partial^\alpha u \mid |\alpha|_1 = n\} \\ \|\mathrm{D}^n u\|_p &:= \Big(\sum_{|\alpha|_1 = n} \|\partial^\alpha u\|_p^p\Big)^{1/p} \\ \|\mathrm{D}^n u\|_\infty &:= \max\{\|\partial^\alpha u\|_\infty \mid |\alpha|_1 = n\}. \end{aligned}$$

2.12 Definition. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definieren wir

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{n=0}^{k} \|\mathrm{D}^n u\|_p^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{|\alpha|_1 \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\Big)^{1/p} \qquad \text{falls } p < \infty$$

und

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{n=0}^{k} \|\mathrm{D}^n u\|_\infty = \max_{|\alpha|_1 \leq k} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Falls $u, v \in H^k(\Omega)$, dann definieren wir

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|_1 \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_2.$$

Wie in Lebesgue-Räumen identifizieren wir Funktionen, die fast Überall übereinstimmen. Dann ist $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k(\Omega)}$ ist ein Skalarprodukt, welches $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ induziert. Also ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein normierter Raum und $H^k(\Omega)$ ein Innenproduktraum.

2.13 Lemma. *Sei Ω beschränkt. Dann gilt $L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega)$ für $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 \geq p_1$. Außerdem ist die Injektion stetig.*

Beweis. Falls $p_1 < p_2 < \infty$, dann definieren wir $q := p_2/(p_2 - p_1)$, der zu p_2/p_1 konjugierte Exponent. Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\|u\|_{p_1}^{p_1} = \int_\Omega |u|^{p_1} \leq \Big(\int_\Omega 1^q\Big)^{1/q} \Big(\int_\Omega |u|^{p_2}\Big)^{p_1/p_2} = |\Omega|^{1/q} \|u\|_{p_2}^{p_1}.$$

Für $p_2 = \infty$ ist klar, dass $\|u\|_{p_1} \leq |\Omega|^{1/p_1} \|u\|_\infty$ gilt. $\square$

2.14 Lemma. *Es gelte $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ für ein $p \in [1,\infty]$. Dann folgt für alle $q \in [1,p]$ und $\varphi \in C_\mathrm{c}(\Omega)$, dass $\varphi u_n \to \varphi u$ in $L^q(\Omega)$.*

Beweis. Sei $U \subseteq \Omega$ offen und beschränkt, so dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$. Lemma 2.13 zeigt, dass $u_n \to u$ in $L^q(U)$. Falls $q < \infty$, dann folgt

$$\|\varphi u_n - \varphi u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_U |u_n(x) - u(x)|^q |\varphi(x)|^q \,\mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_\infty^q \|u_n - u\|_{L^q(U)}^q \to 0.$$

Falls $q = p = \infty$, dann folgt $\|\varphi u_n - \varphi u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|u_n - u\|_\infty \to 0$. ☐

2.15 Proposition. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum, und $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Sei $(u_n) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Weil $\partial^\alpha u_n$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha|_1 \leq k$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist, existieren $\bar{u}_\alpha$, so dass $\partial^\alpha u_n \to \bar{u}_\alpha$ in $L^p(\Omega)$, und insbesondere existiert $u \in L^p(\Omega)$, so dass $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Es reicht nun zu zeigen, dass $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\partial^\alpha u = \bar{u}_\alpha$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha|_1 \leq k$ gelten.

Seien $\varphi \in C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ und $|\alpha|_1 \leq k$. Lemma 2.14 zeigt, dass $u_n \partial^\alpha \varphi \to u\, \partial^\alpha \varphi$ und $\varphi\, \partial^\alpha u_n \to \varphi \bar{u}_\alpha$ in $L^1(\Omega)$. Es folgt, dass

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\, \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|_1} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \partial^\alpha u_n\, \varphi = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega \bar{u}_\alpha \varphi.$$

Da $\varphi \in C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ beliebig war, liefern Definition 2.5 und Lemma 2.6, dass $\partial^\alpha u = \bar{u}_\alpha$ existiert. ☐

2.16 Definition. Für $p \in [1,\infty)$ schreiben wir $W_0^{1,p}(\Omega)$ für den Abschluss von $C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Außerdem setzen wir

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dann ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ ein Banachraum und $H_0^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

2.17 Bemerkung. Man kann den Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ ungefähr als den Unterraum der Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ verstehen, die "auf $\partial\Omega$ verschwinden".

2.18 Lemma. *Seien $p \in [1,\infty)$ und Ω beschränkt. Dann gilt $C_\mathrm{c}^1(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. Sei $u \in C_c^1(\Omega)$ fest gewählt. Wir setzen u trivial nach $\mathbb{R}^N$ fort, das heißt, $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Für $\varepsilon > 0$ sei u^ε die Glättung von u. Falls $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega)$ ist, dann gilt $\operatorname{supp}(u^\varepsilon) \subseteq \Omega$. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist und $\partial_i u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\partial_i u)$, liefert Proposition 2.1

$$u^\varepsilon \to u \qquad \text{in } C^1(\overline{\Omega}) \text{ wenn } \varepsilon \to 0. \tag{2.6}$$

Für ausreichend kleine ε erhalten wir $u^\varepsilon \in C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$. Außerdem zeigt (2.6), dass $u^\varepsilon \to u$ in $H^1(\Omega)$ wenn $\varepsilon \to 0$. Also muss $u \in H_0^1(\Omega)$ gelten. ☐

2.19 Proposition. *Seien Ω beschränkt, $f \in C^1(\mathbb{R})$ so, dass f' beschränkt ist, $p \in [1, \infty)$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $v := f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ und die schwachen Ableitungen erfüllen $\partial_i v = (f' \circ u)\partial_i u$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Außerdem gilt $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ falls $f(0) = 0$.*

Beweis. Sei $M := \sup_{\mathbb{R}} |f'|$. Wir wählen $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Aus $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|f \circ u_n - f \circ u\|_p^p = \int_\Omega |f(u_n(x)) - f(u(x))|^p \,\mathrm{d}x \leq M^p \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ = M^p \|u_n - u\|_p^p \to 0,\end{aligned}$$

das heißt,

$$f \circ u_n \to f \circ u \qquad \text{in } L^p(\Omega). \tag{2.7}$$

Sei nun $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ fest gewählt. Wir zeigen, dass

$$(f' \circ u_n)\partial_i u_n \to (f' \circ u)\partial_i u \qquad \text{in } L^p(\Omega). \tag{2.8}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $u_n(x) \to u(x)$, fast überall Ω. Die Stetigkeit von f' liefert

$$|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u| \to 0 \qquad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Außerdem gilt

$$|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u| \leq 2M|\partial_i u| \in L^p(\Omega).$$

Daher zeigt der Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue, dass

$$\|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u\|_p \to 0. \tag{2.9}$$

Des Weiteren wissen wir, dass $\partial_i u_n \to \partial_i u$ in $L^p(\Omega)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}&\|(f' \circ u_n)\partial_i u_n - (f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \leq \|(f' \circ u_n)\partial_i u_n - (f' \circ u_n)\partial_i u\|_p + \|(f' \circ u_n)\partial_i u - (f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \leq M\|\partial_i u_n - \partial_i u\|_p + \|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \to 0,\end{aligned}$$

wegen (2.9). Nun folgt (2.8) mittels eines einfachen Widerspruchsarguments.

Weil $(f' \circ u_n)\partial_i u_n$ die klassischen partiellen Ableitungen von $f \circ u_n$ sind, liefern (2.7) und (2.8), dass $f \circ u_n$ eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. Diese Folge konvergiert gegen die Funktion $f \circ u$, die daher die partiellen Ableitungen $(f' \circ u)\partial_i u$ besitzen muss. Falls $f(0) = 0$ gilt, dann folgt $f \circ u_n \in C_c^1(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle n, wegen Lemma 2.18. Dies liefert $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Für eine reellwertige Funktion u setzen wir $u^+ := \max\{0, u\}$ und $u^- := \max\{0, -u\}$, so dass $u^\pm \geq 0$ und $u = u^+ - u^-$ gelten.

2.20 Proposition. *Seien Ω beschränkt, $1 \le p < \infty$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $|u|, u^{\pm} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Die schwachen Ableitungen sind*

$$\partial_i u^+(x) = \begin{cases} \partial_i u, & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0, & \text{falls } u(x) \le 0, \end{cases} \qquad \partial_i u^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u(x) \ge 0, \\ -\partial_i u, & \text{falls } u(x) < 0, \end{cases}$$

und

$$\partial_i |u|(x) = \begin{cases} \partial_i u, & \text{falls } u(x) > 0, \\ -\partial_i u, & \text{falls } u(x) < 0, \\ 0 & \text{falls } u(x) = 0. \end{cases}$$

Beweis. Zuerst behandeln wir die Funktion u^+. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $f_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

Wegen $f_\varepsilon(t) = t^2/(\sqrt{t^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon)$ für $t > 0$ gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$f_\varepsilon'(t) := \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

Außerdem gelten $f(0) = 0$, $|f'(t)| \le 1$, $|f(t)| \le t$ und $f_\varepsilon(t) \to \max\{t, 0\}$ wenn $\varepsilon \to 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t > 0$ haben wir $f_\varepsilon'(t) \to 1$ wenn $\varepsilon \to 0$.

Sei $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ fest gewählt. Wir definieren

$$v(x) := \begin{cases} \partial_i u, & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0, & \text{falls } u(x) \le 0. \end{cases}$$

Außerdem definieren wir

$$A^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}.$$

Für alle $x \in A^+$ gelten dann $|f_\varepsilon(u(x)) - u(x)| \le 2|u(x)|$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u(x)) \to u(x)$. Mit dem Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue folgt

$$\|f_\varepsilon \circ u - u^+\|_{L^p(\Omega)} = \|f_\varepsilon \circ u - u\|_{L^p(A^+)} \to 0 \qquad \text{wenn } \varepsilon \to 0.$$

Es gilt $f_\varepsilon' \circ u \to 1$ in A^+. Nochmals mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir

$$\|(f_\varepsilon' \circ u)\partial_i u - v\|_{L^p(\Omega)} = \|(f_\varepsilon' \circ u - 1)\partial_i u\|_{L^p(A^+)} \to 0 \qquad \text{wenn } \varepsilon \to 0.$$

Wegen Proposition 2.19 ist $(f_\varepsilon' \circ u)\partial_i u$ die schwache partielle Ableitung von $f_\varepsilon \circ u$. Wir haben also gezeigt, dass $f_\varepsilon \circ u \to u^+$ in $W^{1,p}(\Omega)$ wenn $\varepsilon \to 0$, und dass $\partial_i u^+ = v$ gilt. Da $f_\varepsilon(0) = 0$ gilt für $\varepsilon > 0$, liefert Proposition 2.19 $f_\varepsilon \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle ε. Wir folgern $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Indem wir $-u$ betrachten, erhalten wir das analoge Resultat für u^-. Die restlichen Behauptungen folgen dann aus $|u| = u^+ + u^-$. $\square$

2.3 Stetige Einbettungen

Für zwei normierte Räume E, F soll $E \hookrightarrow F$ bedeuten, dass $E \subseteq F$ gilt und dass eine Konstante $C \geq 0$ existiert mit $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$ für alle $x \in E$. Mit anderen Worten ist die Einbettung $E \to F$, $x \mapsto x$, ein beschränkter linearer Operator.

2.21 Definition. Sei $p \in [1, N)$. Wir definieren den *Sobolevexponenten der Dimension N zum Exponenten p* durch

$$p^* := \frac{Np}{N-p}$$

und bemerken, dass gilt:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \qquad \text{und} \qquad p^* > p. \tag{2.10}$$

2.22 Satz (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sei $p \in [1, N)$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C(N, p)$, so dass*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\mathrm{D}u\|_p \tag{2.11}$$

für alle $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ gilt.

Beweis. Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ fest gewählt. Zunächst nehmen wir $p = 1$ an.

Wir definieren $v \in C_c(\mathbb{R}^N)$ durch $v(x) := \max_{i=1}^N |\partial_i u(x)|$. Für alle $i = 1, 2, \ldots, N$ und $x \in \mathbb{R}^N$ gilt dann

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}y_i$$

und daher

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}y_i.$$

Es folgt

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{2.12}$$

Wir integrieren (2.12) bezüglich x_1. Mit Aufgabe 48 folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Auf dieselbe Art und Weise rechnen wir, indem wir (2.13) bezüglich x_2 integrieren:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\
&\quad\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}\mathrm{d}x_2 \\
&\quad\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad\qquad \times \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nacheinander die Integrationen bezüglich $x_3, x_4, \dots, x_N$ durchführen, erhalten wir also

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} \le \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}y_i\cdots\mathrm{d}x_N\right)^{\frac{1}{N-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} v\right)^{\frac{N}{N-1}}. \tag{2.14}$$

Dies liefert

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \le \int_{\mathbb{R}^N} v \le \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}|\partial_i u| = \sum_{i=1}^{N}\|\partial_i u\|_1 = \|\mathrm{D}u\|_1,$$

also die Behauptung für $p = 1$.

Nun nehmen wir $1 < p < \infty$ an und wenden (2.14) auf die Funktion $w := |u|^\gamma$ an, wobei wir $\gamma > 1$ später festlegen werden. Für die Funktion $f(t) := |t|^\gamma$ gilt $f'(t) = \gamma|t|^{\gamma-2}t$ und daher $\partial_i w = \gamma|u|^{\gamma-2}u\partial_i u$ und

$$\max_{i=1}^{N}|\partial_i w| = \gamma|u|^{\gamma-1}\max_{i=1}^{N}|\partial_i u|. \tag{2.15}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} &\le \gamma\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\gamma-1}\max_{i=1}^{N}|\partial_i u| \\
&\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\max_{i=1}^{N}|\partial_i u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\|\mathrm{D}u\|_p.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Wir wählen γ so, dass

$$\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}$$

gilt, das heißt,

$$\gamma := \frac{p(N-1)}{N-p} > 1.$$

Es folgt

$$\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} = p^* \qquad \text{und} \qquad \frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}.$$

Daher liefert (2.16)

$$\|u\|_{p^*} \le \gamma \|\mathrm{D}u\|_p. \qquad \square$$

2.23 Korollar. *Seien Ω beschränkt, $p \in [1, N)$ und $q \in [1, p^*]$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C(N, p, q, \Omega)$, so dass*

$$\|u\|_q \le C\|\mathrm{D}u\|_p$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt. Daher haben wir $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Beweis. Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben und sei $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ gemäß der Definition von $W_0^{1,p}(\Omega)$ so gewählt, dass $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann gelten $\|u_n - u\|_p \to 0$ und $\|\mathrm{D}u_n - \mathrm{D}u\|_p \to 0$. Satz 2.22 liefert $C_1 = C_1(N, p)$, so dass

$$\|u_m - u_n\|_{p^*} \le C_1\|\mathrm{D}u_m - \mathrm{D}u_n\|_p$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Daher ist (u_n) eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\Omega)$ die gegen ein $v \in L^{p^*}(\Omega)$ konvergiert. Wegen $p^* > p$ zeigt Lemma 2.13, dass $u_n \to v$ in $L^p(\Omega)$, das heißt, $u = v \in L^{p^*}(\Omega)$. Nochmals mit Satz 2.22 folgt

$$\|u_n\|_{p^*} \le C_1\|\mathrm{D}u_n\|_p.$$

Nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir

$$\|u\|_{p^*} \le C_1\|\mathrm{D}u\|_p.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.13 für beliebiges $q \in [1, p^*]$. $\square$

2.24 Proposition (Poincaré-Ungleichung)**.** *Es existiert $C > 0$, so dass*

$$\|u\|_2 \le C\|\mathrm{D}u\|_2$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis. **Fall $N \ge 3$:** Dies ist eine direkte Folgerung aus Korollar 2.23, weil $2 < N$ und $2 < 2^*$ gelten.

Fall $N = 2$: Wir wählen $q \in (1, 2)$, so dass $q^* = 2q/(2-q) > 2$ gilt. Aus Lemma 2.13 and Korollar 2.23 erhalten wir (mit wechselnden Konstanten C)

$$\|u\|_2 \le C\|u\|_{q^*} \le C\|\mathrm{D}u\|_q \le C\|\mathrm{D}u\|_2.$$

Fall $N = 1$: Sei $\Omega = (a, b)$. Zunächst nehmen wir $u \in C_c^1(\Omega)$ an. Dann gilt

$$u(x) = \int_a^x u'(s)\,\mathrm{d}s$$

und daher

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(s)|\,\mathrm{d}s$$

für alle $x \in \Omega$. Es folgt

$$\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1 \qquad \text{für alle } u \in C_c^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Nochmals mit Lemma 2.13 liefert dies

$$\|u\|_2 \leq C\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_1 \leq C\|u'\|_2 \qquad \text{für alle } u \in C_c^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Für allgemeines $u \in H_0^1(\Omega)$ existiert $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$. Dann gilt also $\|u_n\|_2 \to \|u\|_2$ und $\|u_n'\|_2 \to \|u'\|_2$. Die Behauptung folgt nun aus (2.18). ☐

2.4 Der Satz von Rellich-Kondrakov

Für einen kompakten metrischen Raum X und $\alpha \in (0, 1]$ bezeichne $C^{0,\alpha}(X)$ den Banachraum der Hölderstetigen Funktionen $u\colon X \to \mathbb{R}$ mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} := \|u\|_\infty + [u]_{\alpha,X}.$$

2.25 Proposition. *Seien $a < b$, $\Omega := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und $p \in (1, \infty]$. Für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert $v \in C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$, so dass $u = v$ in c.t.p. Dies induziert eine stetige Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$. Außerdem ist die Injektion $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ kompakt für alle $q \in [1, \infty]$.*

Beweis. Wir setzen $\gamma := 1 - \frac{1}{p}$ falls $p < \infty$ und $\gamma = 1$ falls $p = \infty$. Sei $u \in C_c^1(\Omega)$. Zunächst nehmen wir $p < \infty$ an. Für $x, y \in \overline{\Omega}$, $x < y$, folgt, dass

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(s)\,\mathrm{d}s \right| &\leq \int_x^y |u'|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \left(\int_x^y 1\,\mathrm{d}s \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_x^y |u'|^p\,\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathrm{D}u\|_p\,|x-y|^\gamma. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$[u]_{\gamma;\overline{\Omega}} \leq \|\mathrm{D}u\|_p.$$

Für $p = \infty$ und $a < x < y < b$ erhalten wir, dass

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty\,|x - y|$$

und daher

$$[u]_{1;\overline{\Omega}} \leq \|\mathrm{D}u\|_\infty.$$

In beiden Fällen folgt aus Lemma 2.13 und (2.17), dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in C^1_\mathrm{c}(\Omega). \tag{2.19}$$

Für ein beliebiges $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert $(u_n) \subseteq C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, so dass $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ gilt. Wegen der stetigen Einbettung $W^{1,p} \hookrightarrow L^p(\Omega)$ folgt

$$u_n \to u \qquad \text{in } L^p(\Omega). \tag{2.20}$$

Die Ungleichung (2.19) zeigt, dass (u_n) eine Cauchyfolge in $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ ist. Es konvergiert also $u_n \to v$ in $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ für ein $v \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Weil

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gelten, folgt

$$u_n \to v \qquad \text{in } L^p(\Omega).$$

Daher liefert (2.20) $u = v$ f.ü., d.h., $u \in C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$ (wegen der üblichen Identifikation von f.ü. übereinstimmenden Funktionen in Sobolevräumen). Wir haben also $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$ gezeigt. Wenn wir berücksichtigen, dass

$$\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \to \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \qquad \text{und} \qquad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

gelten, dann folgt (2.19) für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, und daher ist diese Einbettung stetig.

Für $\gamma \in (0,1]$ ist jede beschränkte Teilmenge von $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ eine gleichgradig stetige Funktionenfamilie. Daher liefert der Satz von Arzelá-Ascoli, dass die Einbettung $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ kompakt ist. Damit ist auch die Komposition stetiger Einbettungen

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \underset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

kompakt. □

Für die allgemeine Dimension $N \in \mathbb{N}$ liefert Korollar 2.23 eine stetige Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls Ω beschränkt ist, $p \in [1,N)$ und $q \in [1,p^*]$. Analog zu Proposition 2.25 interessiert uns ihre Kompaktheit.

2.26 Satz (Rellich-Kondrakov)**.** *Seien $p \in [1,N)$ und $q \in [1,p^*)$. Dann ist die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ kompakt.*

Beweis. Im Folgenden stehe C für wechselnde Konstanten, die jeweils weder von ε noch von n abhängen. Zunächst nehmen wir an, dass $(u_n) \subseteq C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$

$$\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.21}$$

erfüllt. Sei $u_n^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ die ε-Glättung der trivialen Fortsetzung von u_n auf $\mathbb{R}^N$.

Wir wählen eine beschränkte offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $\overline{\Omega} \subseteq V$. Es folgt

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 := \operatorname{dist}(\overline{\Omega}, \partial V)\colon\ \operatorname{supp}(u_n^\varepsilon) \subseteq V. \tag{2.22}$$

Wir zeigen, dass

$$u_n^\varepsilon \to u_n \qquad \text{in } L^q(V) \text{ wenn } \varepsilon \to 0, \text{ gleichmäßig in } n. \tag{2.23}$$

Für festes $x \in V$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}
|u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)(u_n(y) - u_n(x)) \,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)(u_n(x-y) - u_n(x)) \,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 \nabla u_n(x-sy) \cdot y \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \right| \\
&\le \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u_n(x-sy)|_2 |y|_2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \\
&\le \varepsilon \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u_n(x-sy)|_2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \\
&\le \varepsilon \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u_n(x-sy)|_1 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung über V liefert

$$\begin{aligned}
\int_V |u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| \,\mathrm{d}x &\le \varepsilon \int_V \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u_n(x-sy)|_1 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon \int_0^1 \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \int_V |\nabla u_n(x-sy)|_1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \\
&\le \varepsilon \|\mathrm{D}u_n\|_1 \int_0^1 \int_{U_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \\
&= \varepsilon \|\mathrm{D}u_n\|_1,
\end{aligned}$$

und daher wegen (2.21) und Lemma 2.13

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_1 \le C\varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.24}$$

Andererseits zeigt zunächst Korollar 2.23, dass

$$\|u_n\|_{p^*} \le C \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Die Hölder-Ungleichung liefert für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
|u_n^\varepsilon(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \rho_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p^*}} |u_n(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

und daher für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, dass

$$\begin{aligned}
\|u_n^\varepsilon\|_{p^*}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\varepsilon(x)|^{p^*}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y \\
&= \|u_n\|_{p^*}^{p^*}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.25) erhalten wir

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{p^*} \le C \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Wegen $1/p^* < 1/q \le 1$ existiert $\theta \in (0, 1]$ mit

$$\frac{1}{q} = \theta + (1-\theta)\frac{1}{p^*}.$$

Es folgt

$$\frac{1}{\theta q} \ge 1, \qquad \frac{p^*}{(1-\theta)q} \ge 1 \qquad \text{und} \qquad \theta q + \frac{(1-\theta)q}{p^*} = 1.$$

Für beliebiges $v \in L^{p^*}(V)$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$\|v\|_q^q = \int_V |v|^q = \int_V |v|^{\theta q}|v|^{(1-\theta)q} \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|\right)^{\theta q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}} = \|v\|_1^{\theta q}\|v\|_{p^*}^{(1-\theta)q}.$$

Eine Anwendung dieser Tatsache auf $u_n^\varepsilon - u_n$ liefert zusammen mit (2.24) und (2.26)

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_q \le \|u_n^\varepsilon - u_n\|_1^\theta \|u_n^\varepsilon - u_n\|_{p^*}^{1-\theta} \le C\varepsilon^\theta \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

und daher (2.23).

Wir zeigen nun

(2.27) für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ist die Folge $(u_n^\varepsilon)_n$ beschränkt und gleichgradig stetig.

Dazu wählen wir feste $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und $x \in \mathbb{R}^N$, und beachten, dass wegen (2.25) und Lemma 2.13 gilt:

$$|u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|\rho_\varepsilon\|_\infty \|u_n\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^N} < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, dass $\|u_n^\varepsilon\|_\infty$ beschränkt bleibt wenn $n \to \infty$. Außerdem rechnen wir für alle $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$|\partial_i u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \rho_\varepsilon(x-y)|\,|u_n(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|\partial_i \rho_\varepsilon\|_\infty \|u_n\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass $\|\mathrm{D}u_n^\varepsilon\|_\infty$ beschränkt bleibt wenn $n \to \infty$. Diese Eigenschaften zeigen (2.27).

Mit Hilfe eines Diagonalprozesses und (2.27) gehen wir zu einer Teilfolge von (u_n) über, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Folge $u_n^{1/k}$ in $C(\overline{V})$ konvergiert. Wir zeigen, dass diese Folge (u_n) in $L^q(\Omega)$ konvergiert. Sei dazu $\delta > 0$. Dann existiert wegen (2.23) ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $1/k < \varepsilon_0$ und $\|u_n - u_n^{1/k}\|_q \leq \delta/3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Außerdem existiert wegen (2.27) n_0, so dass $\|u_m^{1/k} - u_n^{1/k}\|_q \leq \delta/3$ für alle $m, n \geq n_0$. Es folgt für alle $m, n \geq n_0$, dass

$$\|u_m - u_n\|_q \leq \|u_m - u_m^{1/k}\|_q + \|u_m^{1/k} - u_n^{1/k}\|_q + \|u_n^{1/k} - u_n\|_q \leq \delta.$$

Dies zeigt, dass (u_n) eine Cauchyfolge in $L^q(V)$ ist, das heißt, (u_n) konvergiert in $L^q(\Omega)$.

Um den Beweis abzuschließen, nehmen wir an, dass $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt ist. Es gibt Funktionen $v_n \in C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, so dass $\|u_n - v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann bleibt auch $\|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ beschränkt wenn $n \to \infty$, und wegen dem vorher gezeigten können wir, nach Übergang zu einer Teilfolge, die Konvergenz $v_n \to u$ in $L^q(\Omega)$ annehmen, mit einer Funktion $u \in L^q(\Omega)$. Es folgt

$$\|u_n - u\|_q \leq \|u_n - v_n\|_q + \|v_n - u\|_q \to 0. \qquad \square$$

2.27 Korollar. *Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt.*

Beweis. **Fall $N \geq 3$:** Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 2.26.

Fall $N = 2$: Wir wählen $q \in (1, 2)$. Es folgt $q^* = 2q/(2-q) > 2$. Wegen Lemma 2.13 and Satz 2.26 erhalten wir Einbettungen

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega) \underset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Fall $N = 1$: Dieser Fall ist in Proposition 2.25 enthalten. $\square$

3 Elliptische partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge.

3.1 Partielle Differentialoperatoren

Uns interessieren Lösungen $u(x)$ von Gleichungen der Form

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $c, f \in C(\Omega)$. Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (3.1) erfüllt, dann folgt für beliebiges $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ aus dem Gaußschen Integrationssatz

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi\Big) = \int_\Omega (-\Delta u + cu)\varphi$$

und daher

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi\Big) = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Diesen Vorgang nennt man *die Gleichung* (3.1) *mit* φ *testen*. Gleichung (3.2) ergibt aber auch Sinn, falls wir nur annehmen, dass $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwache Ableitungen erster Ordnung besitzt, dass $c \in L^\infty(\Omega)$ liegt und dass $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegt. Die Funktion u kann somit als schwache Lösung von (3.1) aufgefasst werden, falls (3.2) gilt und falls sie in geeigneter Form auf $\partial\Omega$ verschwindet. Dies liefert die Motivation, schwache Lösungen in den Räumen $W_0^{1,p}(\Omega)$ zu suchen. Für die lineare Theorie reicht es aus, sich dabei auf den Fall $p = 2$ zu beschränken, d.h., schwache Lösungen in $H_0^1(\Omega)$ zu suchen. Ist $f \in L^2(\Omega)$ und ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (3.1), dann gilt (3.2) sogar für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, weil $C_c^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ dicht liegt. Der Einfachheit halber werden wir (3.2) daher für diese größere Klasse von Funktionen φ fordern.

Bemerkung: Sei E ein normierter Raum und sei $B\colon E \times E \to \mathbb{R}$ bilinear. In Aufgabe 33 wurde gezeigt, dass B genau dann stetig ist, wenn

$$\|B\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})} := \sup_{x,y \in S_1 E} |B[x,y]|$$

endlich ausfällt. Mit $\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Vektorraum der bilinearen Abbildungen $E \times E \to \mathbb{R}$ mit $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})} < \infty$. Wie im Beweis von Proposition 1.7 kann man leicht zeigen, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})}$ eine Norm in $\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})$ ist, die diesen Raum zu einem Banachraum macht.

Wir wollen nun allgemeinere Differentialoperatoren als in (3.1) betrachten und geben daher die

3.1 Definition. Seien $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ für $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ gegeben. Wir Definieren einen (formalen) *partiellen Differentialoperator in Divergenzform* L durch den Ausdruck

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^{N} b_i \partial_i u + cu \tag{3.3}$$

und die zu L gehörige Bilinearform B durch

$$B[u, v] := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{N} b_i(\partial_i u)v + cuv \Big). \tag{3.4}$$

Für $f \in L^2(\Omega)$ heißt eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle_2 \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

eine *schwache Lösung* der linearen partiellen Differentialgleichung mit Randwerten

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Da uns wegen der physikalischen Anwendungen ursprünglich klassisch differenzierbare Lösungen interessieren, geben wir eine parallele Definition für diesen Fall:

3.2 Definition. Seien $a_{ij}, d_i, c \in C(\Omega)$ für $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ gegeben. Wir Definieren einen (formalen) *partiellen Differentialoperator in nicht-Divergenzform* L durch

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{N} d_i \partial_i u + cu. \tag{3.7}$$

Für $f \in C(\Omega)$ heißt eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

eine *klassische Lösung* dieser linearen partiellen Differentialgleichung mit Randwerten.

3.3 Bemerkung. (a) Wir nennen die oben eingeführten Differentialoperatoren *formal*, da wir sie zunächst nicht als wohldefinierte lineare Operatoren zwischen konkreten Funktionenräumen auffassen, sondern nur als Differentialausdrücke.

(b) Falls $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ für $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ gilt, dann korrespondieren die Operatoren in Divergenz- und nicht-Divergenzform vermöge $d_i = b_i - \sum_{j=1}^{N} \partial_j a_{ij}$. In diesem Fall kann man klassische Lösungen finden, indem man zunächst die Existenz schwacher Lösungen beweist, und dann mit Hilfe einer Regularitätstheorie zeigt, dass diese schon klassisch sind. Für die Existenztheorie konzentrieren wir uns hier auf schwache Lösungen, und für die qualitative Theorie auf klassische Lösungen.

(c) Da man ursprünglich an klassischen Lösungen u von (3.8) interessiert ist und da für diese $\partial_i\partial_j u = \partial_j\partial_i u$ gilt, folgt

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_j\partial_i u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}\partial_i\partial_j u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}\partial_j\partial_i u = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)\partial_j\partial_i u,$$

mit symmetrischer Matrix $\left(\left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)\right)$. Man setzt darum in der Regel gleich voraus, dass $a_{ij} = a_{ji}$ gilt.

3.2 Der Satz von Lax-Milgram

Die Definition schwacher Lösungen liefert sofort die Idee, schwache Lösungen zu (3.6) mittels einer Art Fréchet-Rieszschen Existenzsatzes zu erhalten, der für Bilinearformen gilt, die allgemeiner sind als Skalarprodukte (insbesondere nicht-symmetrisch):

3.4 Satz (Lax-Milgram)**.** *Seien E ein Hilbertraum, $B \in \mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})$ und $\alpha > 0$ mit*

$$B[x,x] \geq \alpha\|x\|_E^2 \qquad \text{für alle } x \in E \tag{3.9}$$

gegeben. Dann existiert für alle $f \in E'$ ein $x \in E$, so dass

$$\langle\langle f,y\rangle\rangle = B[x,y] \qquad \text{für alle } y \in E.$$

Außerdem ist die Abbildung $f \mapsto x$ ein Banachraum-Isomorphismus $E' \to E$.

Beweis. Weil $B[x,\cdot] \in E'$ für alle $x \in E$ gilt, existiert wegen des Satzes von Fréchet-Riesz (Satz 1.26) ein linearer Operator A in E mit

$$B[x,y] = \langle Ax,y\rangle \qquad \text{für alle } x,y \in E. \tag{3.10}$$

Für $x \in E$ haben wir

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = B[x,Ax] \leq \|B\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})}\|x\|\,\|Ax\|, \tag{3.11}$$

d.h., $A \in \mathcal{L}(E)$. Also folgt aus $\langle Ax,x\rangle \geq \alpha\|x\|^2$ für alle $x \in E$ mit Satz 1.29(b), dass A ein Banachraum-Isomorphismus ist.

Für $f \in E'$ liefert uns wiederum der Satz von Fréchet-Riesz $z \in E$, so dass

$$\langle\langle f,y\rangle\rangle = \langle z,y\rangle \qquad \text{für alle } y \in E. \tag{3.12}$$

Daher hat $x := A^{-1}z$ die gewünschten Eigenschaften. □

3.5 Definition. Es gelte $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i,j \in \{1,2,3,\ldots,N\}$. Ein linearer partieller Differentialoperator heißt *gleichmäßig elliptisch in* Ω, falls eine Konstante $\theta > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)v_iv_j \geq \theta|v|_2^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^N \tag{3.13}$$

existiert.

3.6 Proposition. *Seien L ein gleichmäßig elliptischer Operator in Divergenzform und B die zugehörige Bilinearform wie in Definition 3.1. Dann gilt $B \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ und es gibt $\alpha > 0$ und $\gamma \geq 0$, so dass*

$$B[u,u] + \gamma \|u\|_2^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \textit{für alle } u \in H_0^1(\Omega)$$

gilt.

Beweis. Wir rechnen für $u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |B[u,v]| &\leq \sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_\infty \|\partial_i u\|_2 \|\partial_j v\|_2 + \max_{i=1}^N \|b_i\|_\infty \|\partial_i u\|_2 \|v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daher gilt $B \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Die Elliptizität von L liefert für θ wie in (3.13) und $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \theta \|\mathrm{D}u\|_2^2 &= \theta \int_\Omega |\nabla u|_2^2 \\ &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_i u \partial_j u \\ &= B[u,u] - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N b_i (\partial_i u) u + cu^2 \right) \\ &\leq B[u,u] + \max_{i=1}^N \|b_i\|_\infty \|\mathrm{D}u\|_2 \|u\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Weil $st \leq (s^2 + t^2)/2$ für $s, t \geq 0$ gilt, haben wir für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\|\mathrm{D}u\|_2 \|u\|_2 = \left(\sqrt{2\varepsilon}\, \|\mathrm{D}u\|_2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \|u\|_2 \right) \leq \varepsilon \|\mathrm{D}u\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_2^2.$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\varepsilon \max_{i=1}^N \|b_i\|_\infty \leq \frac{\theta}{2}$$

und daher

$$\max_{i=1}^N \|b_i\|_\infty \|\mathrm{D}u\|_2 \|u\|_2 \leq \frac{\theta}{2} \|\mathrm{D}u\|_2^2 + C\|u\|_2^2$$

gelten. Dann folgt aus (3.14)

$$\frac{\theta}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{\theta}{2} (\|\mathrm{D}u\|_2^2 + \|u\|_2^2) \leq B[u,u] + C\|u\|_2^2,$$

die Behauptung. □

3.7 Bemerkung. Wenn $c \geq 0$ gilt, dann folgt aus (3.14) für $L = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j a_{ij} \partial_i + c$, dass

$$B[u,u] \geq \theta \|\mathrm{D}u\|_2^2.$$

Die Poincaré-Ungleichung Proposition 2.24 liefert $C > 0$, so dass $\|u\|_2^2 \leq C\|\mathrm{D}u\|_2^2$, also $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq (C+1)\|\mathrm{D}u\|_2^2$ gilt. Zusammen ergibt dies

$$B[u,u] \geq \frac{\theta}{C+1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$. In dieser Situation können wir also in der Aussage von Proposition 3.6 $\gamma = 0$ wählen.

3.8 Satz. *Sei L ein elliptischer Operator in Divergenzform mit zugehöriger Bilinearform B. Dann existiert $\gamma \geq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Falls $\mu \geq \gamma$, dann existiert zu jedem $h \in H_0^1(\Omega)'$ genau eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\langle\langle h, v\rangle\rangle = B[u,v] + \mu\langle u,v\rangle_2 \qquad \textit{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Wir schreiben $L_\mu := L + \mu$ und $L_\mu^{-1}h := u$. Dann ist $L_\mu^{-1} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)', H_0^1(\Omega))$ ein Banachraum-Isomorphismus.

Insbesondere existiert für jede Funktion $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung von

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & \textit{in } \Omega, \\ u = 0, & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

Beweis. Wir wählen γ für L wie in Proposition 3.6. Für beliebiges $\mu \geq \gamma$ definieren wir die bilineare Funktion $B_\mu \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ durch

$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu\langle u,v\rangle_2.$$

Diese Bilinearform B_μ gehört zum elliptischen Operator in Divergenzform $L_\mu[u] := Lu + \mu u$, so wie in Definition 3.1. Wegen Proposition 3.6 existiert $\alpha > 0$, so dass

$$B_\mu[u,u] \geq \alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

Für $h \in H_0^1(\Omega)'$ liefert nun Satz 3.4 ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit (3.15), und die Abbildung $h \mapsto u$ ist ein Banachraum-Isomorphismus.

Sei nun $f \in L^2(\Omega)$ beliebig. Wir definieren eine lineare Abbildung $h\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch $h[u] := \langle f, u\rangle_2$. Es gilt dann für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$, dass

$$|h[u]| = |\langle f,u\rangle_2| \leq \|f\|_2\|u\|_2 \leq \|f\|_2\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

d.h., $h \in H_0^1(\Omega)'$ und

$$\|h\|_{H_0^1(\Omega)'} \leq \|f\|_2. \tag{3.17}$$

Daher können wir obiges Resultat auf h anwenden und erhalten $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$B[u,v] + \mu\langle u,v\rangle_2 = \langle\langle h,v\rangle\rangle = \langle f,v\rangle_2 \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

d.h., eine schwache Lösung von (3.16). □

3.9 Beispiel. Für $L = -\Delta + c$ mit $c \in L^\infty(\Omega)$ und $c \geq 0$ liefert Bemerkung 3.7, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f, && \text{in } \Omega, \\ u &= 0, && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt.

3.3 Fredholm- und Spektraltheorie von partiellen Differentialoperatoren

Um die Theorie der schwachen Lösbarkeit von elliptischen linearen partiellen Differentialgleichungen zu vertiefen, wollen wir die auftretenden formalen Differentialoperatoren als echte lineare Operatoren zwischen konkreten Hilberträumen auffassen. Dazu schreiben wir in diesem Unterkapitel $E := H_0^1(\Omega)$ und $V := L^2(\Omega)$. Weiterhin bezeichnen $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ die zugehörigen Skalarprodukte.

Seien in diesem Unterkapitel durchgängig L ein (formaler) gleichmäßig elliptischer Operator in Divergenzform und $B \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ die zugehörige Bilinearform. Für $\mu \in \mathbb{R}$ definieren wir $L_\mu := L + \mu u$ und die zu L_μ gehörige Bilinearform $B_\mu = B + \mu\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, d.h., $L = L_0$ und $B = B_0$. Wir fassen den Operator L_μ durch $L_\mu u := B_\mu[u, \cdot]$ als Element von $\mathcal{L}(E, E')$ auf: Für $u \in E$ und $v \in E'$ gilt $|\langle\langle L_\mu u, v\rangle\rangle| = |B_\mu(u, v)| \leq \|B_\mu\|\|u\|\|v\|$, d.h., $L_\mu u \in E'$ und $\|L_\mu u\| \leq \|B_\mu\|\|u\|$. Dies wiederum liefert $L_\mu \in \mathcal{L}(E, E')$ und $\|L_\mu\| \leq \|B_\mu\|$. Wählen wir außerdem $\gamma \geq 0$ und $\alpha > 0$ für B wie in Proposition 3.6 und nehmen für alles Weitere immer $\mu \geq \gamma$ an, dann zeigt Satz 3.8, dass L_μ ein Banachraum-Isomorphismus ist.

Wir interessieren uns für schwache Lösungen $u \in E$ der Gleichung

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

wobei $f \in V$ liegt. Mit obigen Bezeichnungen ist (3.18) zu folgendem Problem äquivalent:

$$\begin{cases} L_\mu u = f + \mu u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Es reicht also, für die Auflösung von (3.18) lediglich (3.19) zu betrachten. Formal ist $u \in E$ eine Lösung von (3.19) genau dann, wenn

$$u - \mu L_\mu^{-1} u = L_\mu^{-1} f \tag{3.20}$$

gilt.

Um die Alternative von Fredholm (Korollar 1.68) auf (3.20) anwenden zu können, müssen wir diese Gleichung mit Operatoren schreiben, die einen Hilbertraum zurück in sich abbilden. Mit η bezeichnen wir dazu die Einbettung von E in V. Es folgt für $u \in E$:

$$\|\eta u\|_V = \|u\|_2 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_E,$$

d.h., $\|\eta\|_{\mathcal{L}(E,V)} \le 1$. Wir definieren $\vartheta\colon V \to E'$ durch

$$\langle\langle \vartheta u, v\rangle\rangle := \langle u, \eta v\rangle_V.$$

Es folgt

$$|\langle\langle \vartheta u, v\rangle\rangle| \le \|u\|_V \|\eta v\|_V \le \|u\|_V \|v\|_E$$

und daher $\vartheta u \in E'$ mit $\|\vartheta u\|_{E'} \le \|u\|_V$. Dies wiederum liefert $\vartheta \in \mathcal{L}(V, E')$ und $\|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')} \le 1$. Wir erhalten das Diagramm

$$E \xrightarrow{\eta} V \xrightarrow{\vartheta} E'. \tag{3.21}$$

In dieser Situation spricht man allgemeiner auch von einem *Gelfand-Tripel*, wenn η und ϑ injektiv sind und dichtes Bild haben. Wir definieren nun den *Greenschen Operator* $G_{L_\mu} \in \mathcal{L}(V)$ von L_μ durch

$$G_{L_\mu} := \eta \circ L_\mu^{-1} \circ \vartheta. \tag{3.22}$$

Korollar 2.27 liefert die Kompaktheit von η, das heißt, G_{L_μ} ist kompakt.

Wir können (3.20) nun mit dem kompakten Operator $K := \mu G_{L_\mu} \in \mathcal{L}(V)$ und dem Element $g := G_{L_\mu} f \in V$ folgendermaßen als Operatorengleichung in V schreiben:

$$(I - K)u = g. \tag{3.23}$$

Für die Anwendung der Alternative von Fredholm müssen wir nun zunächst die Adjungierte $G^*_{L_\mu}$ von G_{L_μ} als den Greenschen Operator eines formalen Differentialoperators ausdrücken können.

Wir erinnern uns an die formale Darstellung von L:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^{N} b_i \partial_i u + cu \tag{3.24}$$

und daran, dass wir $a_{ij} = a_{ji}$ voraussetzen.

3.10 Definition. Der *formal zu L adjungierte Operator* L^* ist durch den Ausdruck

$$L^* u := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) - \sum_{i=1}^{N} \partial_i(b_i u) + cu, \tag{3.25}$$

und die zugehörige Bilinearform $B^* \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ durch

$$B^*[u,v] := B[v,u] = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{N} b_i u(\partial_i v) + cuv \right) \tag{3.26}$$

gegeben. Für $f \in V$ heißt eine Funktion $u \in E$ mit

$$B^*[u,v] = \langle f, v\rangle_V \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.27}$$

eine *schwache Lösung* der Gleichung

$$\begin{cases} L^*u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

welche ihrerseits die *zu* (3.18) *adjungierte Gleichung* heißt.

Wie vorher definieren wir für $\mu \in \mathbb{R}$ den zu L_μ formal adjungierten Operator $L_\mu^* := L^* + \mu u$ und durch $B_\mu^* := B^* + \mu\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ die zugehörige Bilinearform, d.h., $L^* = L_0^*$ und $B^* = B_0^*$. Wir fassen den Operator L_μ^* durch $L_\mu^* u := B_\mu^*[u,\cdot]$ als Element von $\mathcal{L}(E,E')$ auf. Die vorher gewählten Zahlen γ und α bleiben im Sinne von Proposition 3.6 für B^* gültig, das heißt, für $\mu \geq \gamma$ ist auch L_μ^* wie in Satz 3.8 ein Banachraum-Isomorphismus. Daher können wir mit $G_{L_\mu^*} := \vartheta(L_\mu^*)^{-1}\eta \in \mathcal{L}(V)$ den zugehörigen kompakten Greenschen Operator definieren.

3.11 Proposition. *Die Greenschen Operatoren G_{L_μ} und $G_{L_\mu^*}$ sind in $\mathcal{L}(V)$ zueinander adjungiert, d.h., $G_{L_\mu}^* = G_{L_\mu^*}$.*

Beweis. Die Definition von L_μ und L_μ^* liefert

$$B_\mu[L_\mu^{-1}h, v] = \langle\langle h, v\rangle\rangle = B_\mu^*[(L_\mu^*)^{-1}h, v] \qquad \text{für alle } h \in E',\ v \in E. \tag{3.29}$$

Für $u, v \in V$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\langle G_{L_\mu}u, v\rangle_V &= \langle v, G_{L_\mu}u\rangle_V \\
&= \langle v, \eta L_\mu^{-1}\vartheta u\rangle_V && \text{Definition von } G_{L_\mu} \\
&= \langle\langle \vartheta v, L_\mu^{-1}\vartheta u\rangle\rangle && \text{Definition von } \vartheta \\
&= B_\mu^*[(L_\mu^*)^{-1}\vartheta v, L_\mu^{-1}\vartheta u] && (3.29) \\
&= B_\mu[L_\mu^{-1}\vartheta u, (L_\mu^*)^{-1}\vartheta v] && \text{Definition von } B_\mu^* \\
&= \langle\langle \vartheta u, (L_\mu^*)^{-1}\vartheta v\rangle\rangle && (3.29) \\
&= \langle u, \eta(L_\mu^*)^{-1}\vartheta v\rangle_V && \text{Definition von } \vartheta \\
&= \langle u, G_{L_\mu^*}v\rangle_V && \text{Definition von } G_{L_\mu^*}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Für die Formulierung des nächsten Ergebnisses benötigen wir noch die Begriffe der *homogenen elliptischen Probleme*

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

und

$$\begin{cases} L^*u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

3.12 Satz (Fredholm-Alternative für elliptische Differentialgleichungen)**.** *Es tritt genau eine der folgenden Möglichkeiten ein:*

(i) *Für alle $f \in L^2(\Omega)$ besitzt jede der Gleichungen* (3.18) *und* (3.28) *eine eindeutige schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$.*

(ii) *Die homogenen Gleichungen* (3.30) *und* (3.31) *besitzen nichttriviale schwache Lösungen. In diesem Fall haben die Lösungsräume dieser Gleichungen dieselbe endliche Dimension. Für $f \in L^2(\Omega)$ hat die Gleichung* (3.18) *eine (nicht eindeutige) schwache Lösung genau dann, wenn $\langle f, u\rangle_2 = 0$ für jede schwache Lösung u von* (3.31) *gilt. Die Gleichung* (3.28) *hat eine (nicht eindeutige) schwache Lösung genau dann, wenn $\langle f, u\rangle_2 = 0$ für jede schwache Lösung u von* (3.30) *gilt.*

Beweis. Wir wählen $\mu \geq \gamma$ mit $\mu > 0$. Für $f \in V$ ist $u \in E$ eine schwache Lösung von (3.18) genau dann, wenn $B_\mu[u, v] = \langle f + \eta\mu u, \eta v\rangle_V = \langle\langle \vartheta[f + \eta\mu u], v\rangle\rangle$ für alle $v \in E$ gilt, das heißt, $\vartheta[f + \mu\eta u] = L_\mu u$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $G_{L_\mu}[f + \mu\eta u] = \eta u$ gilt, oder mit anderen Worten, wenn $(I - K)[\eta u] = g$ gilt, wobei $K := \mu G_{L_\mu} \in \mathcal{L}(V)$ kompakt ist und $g := G_{L_\mu} f \in V$. Weil $\mathcal{R}(G_{L_\mu}) \subseteq \mathcal{R}(\eta)$ gilt und η injektiv ist, haben wir:

(3.32) η ist eine lineare Bijektion zwischen schwachen Lösungen von (3.18) und Lösungen $v \in V$ von $(I - K)v = g$.

Wegen Proposition 3.11 gilt

$$K^* = \mu G_{L_\mu^*}, \tag{3.33}$$

und wir haben die analoge Aussage:

(3.34) η ist eine lineare Bijektion zwischen schwachen Lösungen von (3.28) und Lösungen $v \in V$ von $(I - K^*)v = g$.

Weil K kompakt ist, liefert Satz 1.67, dass die Kerne von $I - K$ und $I - K^*$ dieselbe endliche positive Dimension besitzen wenn (i) nicht gilt. Seien $f \in V$ und $g = G_{L_\mu} f$. Wegen der zweiten Fredholm-Alternative in Satz 1.67 gilt $g \in \mathcal{R}(I - K)$ genau dann, wenn $g \in \mathcal{N}(I - K^*)^{\perp_V}$ liegt, das heißt, genau dann, wenn für alle $v \in \mathcal{N}(I - K^*)$

$$0 = \mu\langle g, v\rangle_V = \langle Kf, v\rangle_V = \langle f, K^* v\rangle_V = \langle f, v\rangle_V.$$

Hier haben wir $\mu > 0$ verwendet. Wegen $\mathcal{R}(K^*) = \mathcal{R}(G_{L_\mu^*}) \subseteq \mathcal{R}(\eta)$ hat (3.18) also genau dann eine schwache Lösung, wenn $\langle f, u\rangle_V = 0$ für jede schwache Lösung u von (3.28) gilt. Der Rest folgt analog. □

3.13 Satz. *Sei Σ die Menge derjenigen $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.35}$$

eine schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ besitzt. Dann gelten:

(a) *Σ hat keinen Häufungspunkt. Daher ist Σ abzählbar. Falls Σ nicht endlich ist, dann gilt $\Sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ mit $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ und $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$.*

(b) *Falls $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$, dann hat*

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = f, & \textit{in } \Omega, \\ u = 0, & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.36}$$

eine eindeutige schwache Lösung für alle $f \in L^2(\Omega)$.

Die Menge Σ heißt das Spektrum *und ihre Elemente die* Eigenwerte *von L. Für einen Eigenwert λ heißt die Dimension des Lösungsraumes von* (3.35) *die* geometrische Vielfachheit von λ*, und die Elemente dieses Lösungsraumes heißen die* zu λ gehörigen Eigenvektoren (oder Eigenfunktionen) von L*.*

3.14 Bemerkung. Es ist üblich, jeden Eigenwert λ von L in der Folge (λ_n) so oft aufzuführen, wie es der geometrischen Vielfachheit von λ entspricht.

Beweis von Satz 3.13. Wir verwenden dieselbe Notation wie im Beweis von Satz 3.12. Insbesondere nehmen wir wieder $\mu > 0$ an.

(a) Falls $\lambda \in \Sigma$ und falls $u \neq 0$ eine schwache Lösung von (3.35) ist, dann folgt

$$0 < \alpha \|u\|_E^2 \le B_\mu[u,u] = (\lambda + \mu)\langle \eta u, \eta u\rangle_V = (\lambda+\mu)\|u\|_V^2.$$

Dies liefert

$$\lambda + \mu > 0 \qquad \text{für alle } \lambda \in \Sigma. \tag{3.37}$$

Wegen (3.32) ist η eine lineare Bijektion zwischen den schwachen Lösungen $u \in E$ von (3.35) und den Lösungen $v \in V$ von

$$(I - K)v = \frac{\lambda}{\mu} K v,$$

bzw. von

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} I - K \right) v = 0. \tag{3.38}$$

Daher gilt

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu} \in \sigma(K)\backslash\{0\}. \tag{3.39}$$

Sei umgekehrt $s \in \sigma(K)\backslash\{0\}$. Weil K kompakt ist, existiert ein Eigenvektor $v \in V\backslash\{0\}$ von K für den Eigenwert s. Wir setzen $u := L_\mu^{-1}\vartheta v$ und rechnen:

$$\begin{aligned} s\|v\|_V^2 = \langle Kv, v\rangle_V = \mu\langle \eta L_\mu^{-1}\vartheta v, v\rangle_V = \mu\langle\langle \vartheta v, L_\mu^{-1}\vartheta v\rangle\rangle \\ = \mu\langle\langle L_\mu u, u\rangle\rangle = \mu B_\mu[u,u] \ge \mu\alpha\|u\|_E^2 > 0 \end{aligned}$$

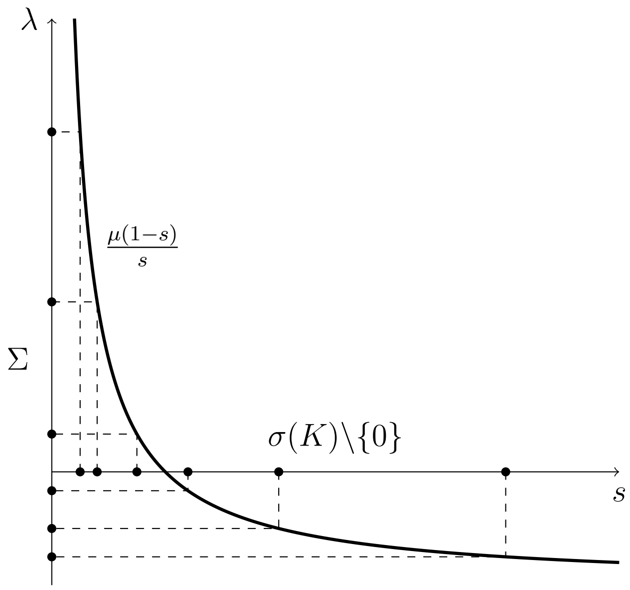

Abbildung 3.1: Bijektion zwischen $\sigma(K)\backslash\{0\}$ und Σ

und erhalten $s > 0$. Mit $\lambda := \mu(1-s)/s$ folgt dann

$$s = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Außerdem gilt $\lambda \in \Sigma$, wegen der Äquivalenz von (3.38) mit (3.35). Das heißt, $\lambda \mapsto \mu/(\lambda + \mu)$ ist eine Bijektion zwischen Σ und $\sigma(K)\backslash\{0\}$ mit Inverse $s \mapsto \mu(1-s)/s$, vgl. Abbildung 3.1. Es folgt

$$\Sigma = \left\{ \frac{\mu(1-s)}{s} \;\middle|\; s \in \sigma(K)\backslash\{0\} \right\}. \tag{3.40}$$

Falls die Menge $\sigma(K)\backslash\{0\}$ unendlich ist, dann besteht sie aus einer Folge $(s_n) \subseteq (0, \infty)$ mit $s_n \to 0$. Wegen (3.40) besteht Σ also aus einer Folge λ_n mit $\lambda_n \to \infty$.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$. Der Beweis von Teil (a) zeigt, dass

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \in \rho(K) \tag{3.41}$$

liegt. Wegen (3.32) ist η eine lineare Bijektion zwischen den schwachen Lösungen $u \in E$ von (3.36) und den Lösungen $v \in V$ von

$$(I - K)v = \frac{1}{\mu}(\lambda K v + K f),$$

bzw.

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} I - K \right) v = \frac{1}{\lambda + \mu} K f. \tag{3.42}$$

Daher liefert (3.41) die Behauptung. $\square$

3.15 Satz. *In der Situation von Satz* 3.13 *gelten:*

(a) *Es existiert eine Konstante* $C > 0$*, so dass*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|u\|_2 + \|f\|_2) \tag{3.43}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ *und jede schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (3.18) *gilt.*

(b) *Für* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$ *existiert eine Konstante* $C > 0$*, so dass*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_2 \tag{3.44}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ *und die eindeutige schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (3.36) *gilt.*

Beweis. Wir fahren mit derselben Notation wie im Beweis von Satz 3.12 fort und nehmen wieder $\mu > 0$ an. Außerdem erinnern wir daran, dass $\|\eta\|_{\mathcal{L}(E,V)} \leq 1$ und $\|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')} \leq 1$ gelten.

(a) Seien $f \in V$, und sei $u \in E$ eine schwache Lösung von (3.18). Die Erörterungen kurz vor (3.32) zeigen, dass $u = L_\mu^{-1}\vartheta[f + \mu\eta u]$ und daher

$$\|u\|_E \leq \|L_\mu^{-1}\|_{\mathcal{L}(E',E)}\|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')}(\mu\|\eta u\|_V + \|f\|_V)$$

gilt. Die Behauptung folgt nun mit $C := \|L_\mu^{-1}\|_{\mathcal{L}(E',E)} \max\{1, \mu\}$.

(b) Seien $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$, $f \in V$, und sei u eine schwache Lösung von (3.36). Gleichung (3.42) liefert

$$\eta u = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}I - K\right)^{-1} \frac{1}{\lambda + \mu}Kf$$

und daher

$$\|\eta u\|_V \leq C\|f\|_V$$

mit einer Konstante $C > 0$, die weder von f noch von u abhängt. Zusammen mit (a) folgt die Behauptung. □

3.16 Satz. *Seien* $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ *und* L *ein gleichmäßig elliptischer Operator mit Divergenzform*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + cu.$$

Sei das Spektrum von L *gegeben durch* $\Sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$*, wobei die Eigenwerte* λ_n *gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit aufgeführt werden. Dann gelten:*

(a) *Es existiert eine Folge* (φ_n) *zugehöriger Eigenfunktionen, welche eine Hilbertbasis von* $L^2(\Omega)$ *bildet.*

(b) *Es gelte $c \geq 0$. Dann ist $\lambda_1 > 0$. Die zu L gehörige Bilinearform B definiert ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$, und die induzierte Norm $\|\cdot\|_B$ ist zu $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ äquivalent. Die Eigenfunktionen $\psi_n := \varphi_n/\sqrt{\lambda_n}$ bilden eine Hilbertbasis von $H_0^1(\Omega)$ bezüglich B. Es gilt*

$$\lambda_1 = \min_{u \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{B[u,u]}{\|u\|_2^2}, \tag{3.45}$$

und die Eigenfunktionen zu λ_1 sind genau die $u \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$, in denen das Minimum in (3.45) angenommen wird.

Beweis. Wir fahren mit derselben Notation wie im Beweis von Satz 3.12 fort und nehmen wieder $\nu > 0$ an.

(a): Da $b_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ gelten $L = L^*$ und $B = B^*$, d.h., B ist symmetrisch. Es folgt, dass der Greensche Operator von L_ν symmetrisch ist: $G^*_{L_\nu} = G_{L^*_\nu} = G_{L_\nu}$. Wegen (3.32) ist η eine lineare Bijektion zwischen den Eigenfunktionen von L zum Eigenwert λ_n und den Eigenfunktionen des symmetrischen kompakten Operators $K := \nu G_{L_\nu} \in \mathcal{L}(V)$ zum Eigenwert $\nu/(\lambda_n+\nu)$. Daher folgt die Behauptung aus Satz 1.75.

(b): Wegen Bemerkung 3.7 existiert $C > 0$, so dass

$$B[u,u] \geq C\|u\|_E^2 \qquad \text{für alle } u \in E, \tag{3.46}$$

das heißt, B ist positiv definit und stellt ein Skalarprodukt auf E dar, mit induzierter Norm $\|\cdot\|_B$. Ungleichung (3.46) und die Stetigkeit von B (siehe Proposition 3.6) zeigen, dass $\|\cdot\|_B$ und $\|\cdot\|_E$ äquivalent sind.

Für jedes n ist φ_n eine schwache Lösung von (3.35) mit λ_n statt λ. Daher ist $\varphi_n \in E$ und es gilt

$$\|\varphi_n\|_B^2 = B[\varphi_n, \varphi_n] = \lambda_n \|\varphi_n\|_V^2 = \lambda_n \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und

$$B[\varphi_n, \varphi_m] = \lambda_n \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle_V = 0 \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m.$$

Insbesondere gilt $0 < B[\varphi_1, \varphi_1] = \lambda_1$.

Mit der Definition $\psi_n := \varphi_n/\lambda_n^{1/2}$ ist also (ψ_n) ein Orthonormalsystem in E bezüglich B (siehe auch Aufgabe 37). Um zu zeigen, das dieses eine Hilbertbasis von E bildet, sei $u \in [\psi_1, \psi_2, \dots]^{\perp_B}$ (orthogonales Komplement in E bzgl. B). Für alle $n \in \mathbb{N}$ liefert dies

$$0 = B[\varphi_n, u] = \lambda_n \langle \varphi_n, u\rangle_V \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da $\lambda_n > 0$ für alle n und da (φ_n) eine Hilbertbasis von V darstellt, muss also $u = 0$ gelten. Wir erhalten $\overline{[\psi_1, \psi_2, \dots]}^E = E$, und Lemma 1.33 zeigt, dass (ψ_n) eine B-Hilbertbasis von E ist.

Sei nun $u \in S_1 V$. Mit $\mu_n := \langle u, \varphi_n\rangle_V$ erhalten wir die Fourierdarstellung von u in V:

$$u = \sum_{n=1}^\infty \mu_n \varphi_n \quad \text{in } V \qquad \text{und} \qquad 1 = \|u\|_V^2 = \sum_{n=1}^\infty \mu_n^2. \tag{3.47}$$

Mit $\nu_n := B[u, \psi_n]$ erhalten wir die Fourierdarstellung von u in E:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \psi_n \qquad \text{in } E.$$

Wegen der stetigen Einbettung $E \hookrightarrow V$ konvergiert diese Reihe auch in V. Es folgt

$$\mu_n = \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m \psi_m,\ \varphi_n \right\rangle_V = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \nu_m \psi_m, \varphi_n \rangle_V = \nu_n \langle \psi_n, \varphi_n \rangle_V = \frac{\nu_n}{\lambda_n^{1/2}}$$

und daher

$$\|u\|_B^2 = B[u,u] = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n \qquad \text{für alle } u \in S_1 V. \tag{3.48}$$

Um (3.45) zu zeigen, beachten wir, dass (3.48) und (3.47) für u wie oben

$$B[u,u] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_1 = \lambda_1$$

implizieren, also $\inf_{v \in V \setminus \{0\}} B[v,v]/\|v\|_s^s \geq \lambda_1$. Für jede Eigenfunktion $u \in S_1 V$ zu λ_1 gilt $B[u,u] = \lambda_1$. Es folgt (3.45). Sei nun umgekehrt $u \in S_1 V$ mit $B[u,u] = \lambda_1$ gegeben, und seien wieder μ_n die Fourierkoeffizienten bezüglich der Hilbertbasis (φ_n) in V. Aus (3.47) und (3.48) folgt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_1 = \lambda_1 = B[u,u] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_1) \mu_n^2 = 0.$$

Weil $\lambda_n \geq \lambda_1$ gilt, erhalten wir $\mu_n = 0$ für alle n mit $\lambda_n \neq \lambda_1$ und somit $u \in E_1$. Damit ist alles gezeigt. $\square$

3.4 Eigenschaften schwacher und klassischer Lösungen

Wir kehren zu allgemeinen Randwert-Problemen des Typs

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.49}$$

zurück. Hier interessiert uns nicht so sehr die Existenztheorie, als vielmehr die Eigenschaften existierender Lösungen. Ein wichtiger Aspekt, den wir in diesem Rahmen nicht behandeln können, ist die Regularität schwacher Lösungen von (3.49), wenn L in Divergenzform ist. Wir zitieren nur ein entsprechendes Resultat, siehe zum Beispiel [2, 1]:

3.17 Satz (ohne Beweis)**.** *Seien* Ω *ein* C^2*-Gebiet,* $\gamma \in (0,1]$, $a_{ij} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ *und* $b_i, c, f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. *Sei* L *ein gleichmäßig elliptischer Operator in Divergenzform und* $\widetilde{L}$ *gemäß Bemerkung* 3.3(b) *der entsprechende Operator in nicht-Divergenzform. Dann liegt jede schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (3.49) *in* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *und ist eine klassische Lösung von*

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.50}$$

Da schwache Lösungen unter den Bedingungen von Satz 3.17 auch klassische Lösungen sind, werden wir jetzt die Eigenschaften dieser Lösungen behandeln. Sei also ab jetzt L ein gleichmäßig elliptischer Operator in nicht-Divergenzform mit Koeffizienten $a_{ij}, d_i, c \in C(\overline{\Omega})$:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{N} d_i\partial_i u + cu.$$

3.18 Definition. Wie schon im Falle des Laplace-Operators nennen wir eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ *subharmonisch (superharmonisch) für* L falls $Lu \leq 0$ ($Lu \geq 0$) in Ω gilt. Ist u sowohl sub- als auch superharmonisch für L, dann heißt u *harmonisch für* L.

3.19 Satz (Schwaches Maximumsprinzip)**.** *Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *subharmonisch (superharmonisch) für* L.

(a) *Falls* $c \equiv 0$, *dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \qquad (\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u). \tag{3.51}$$

(b) *Falls* $c \geq 0$, *dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \qquad (\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-)). \tag{3.52}$$

(c) *Falls* $c \geq 0$ *und* u *harmonisch ist für* L, *dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega}}|u| = \max_{\partial\Omega}|u|. \tag{3.53}$$

Beweis. **(a):** Sei u subharmonisch. Wir müssen also

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \tag{3.54}$$

zeigen.

Zunächst behandeln wir den Fall, wo $Lu < 0$ in ganz Ω gilt, und zeigen, dass u dann kein lokales Maximum in Ω besitzt. Dies reicht aus, um (3.54) in diesem Fall zu zeigen. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass u in $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum besitzt. Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{ij}(x_0)$. Da A symmetrisch und positiv definit ist (L ist ja elliptisch), existiert eine orthogonale Matrix $Q \in O(N)$, so dass $G := QAQ^T$ diagonal und positiv definit ist, also dass $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{NN} > 0$ gilt. Seien q_{ij} die Einträge von Q, und sei $H \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Hessesche Matrix von u in x_0, mit den Einträgen $h_{ij} := \partial_j\partial_i u(x_0)$. Weil x_0 ein lokales Maximum von u ist, ist H ist negativ semidefinit, und dasselbe gilt für die symmetrische Matrix QHQ^T. Insbesondere sind ihre Diagonalelemente nicht positiv, das heißt,

$$\sum_{i,j=1}^{N} q_{ki}h_{ij}q_{kj} \le 0 \qquad \text{für alle } k = 1, 2, \dots, N. \tag{3.55}$$

Die Identität $A = Q^T GQ$ liefert

$$a_{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^{N} q_{ki}g_{kk}q_{kj},$$

so dass aus $g_{kk} > 0$ und (3.55)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\partial_j\partial_i u(x_0) &= \sum_{i,j,k=1}^{N} q_{ki}g_{kk}q_{kj}h_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{N} g_{kk} \sum_{i,j=1}^{N} q_{ki}h_{ij}q_{kj} \\ &\le 0 \end{aligned} \tag{3.56}$$

folgt.

Auf der anderen Seite erfüllt der kritische Punkt x_0 von u

$$\partial_i u(x_0) = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, N. \tag{3.57}$$

Daher liefern (3.56) und (3.57)

$$Lu(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\partial_j\partial_i u(x_0) + \sum_{i=1}^{N} d_i\partial_i u(x_0) \ge 0,$$

im Widerspruch zu $Lu < 0$ in Ω. In diesem Fall ist also (3.54) erfüllt.

Nun gelte lediglich $Lu \le 0$. Wir wählen $\gamma > \|d_1\|_\infty/\theta$, wobei θ die Konstante aus der Definition der Elliptizität (Definition 3.5) bezeichne. Wir rechnen

$$Le^{\gamma x_1} = (-\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma d_1(x))e^{\gamma x_1} \le (-\gamma^2\theta + \gamma\|d_1\|_\infty)e^{\gamma x_1} < 0. \tag{3.58}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ liefert dies $L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) < 0$ und daher, wegen des zuerst behandelten Falles,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Nun folgt (3.54) durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Um den Fall einer superharmonischen Funktion zu behandeln, sei $Lu \geq 0$. Es folgt $L(-u) = -Lu \leq 0$, und das obige Resultat für subharmonische Funktionen liefert

$$\min_{\overline{\Omega}} u = -\max_{\overline{\Omega}}(-u) = -\max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u.$$

(b): Zuerst sei u subharmonisch, und wir definieren $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. Falls $u^+ \equiv 0$ gilt, dann ist $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$ trivialerweise erfüllt. Nun nehmen wir $u^+ \not\equiv 0$ an, das heißt, $\Omega^+ \neq \varnothing$. Wir setzen

$$L_0 := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i + \sum_{i=1}^{N} d_i(x)\partial_i.$$

Dann gilt

$$L_0 u^+ = L_0 u \leq L_0 u + cu = Lu \leq 0 \qquad \text{in } \Omega^+.$$

Anwendung von (a) auf u und den Operator L_0 in Ω^+ liefert

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}} u^+ = \max_{\overline{\Omega^+}} u^+ = \max_{\partial\Omega^+} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

In der letzten Ungleichung haben wir benutzt, dass $u^+ = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$ gilt.

Wenn $-u$ subharmonisch ist, dann erhalten wir

$$\min_{\overline{\Omega}} u = -\max_{\overline{\Omega}}(-u) \geq -\max_{\partial\Omega}(-u)^+ = -\max_{\partial\Omega} u^- = \min_{\partial\Omega}(-u^-).$$

(c): Sei $c \geq 0$ und u harmonisch für L. Aus (b) folgt dann

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{\Omega}}|u| &= \max\{\max_{\overline{\Omega}} u,\ \max_{\overline{\Omega}}(-u)\} \\
&\leq \max\{\max_{\partial\Omega} u^+,\ \max_{\partial\Omega}(-u)^+\} \\
&= \max\{\max_{\partial\Omega} u^+,\ \max_{\partial\Omega} u^-\} \\
&= \max_{\partial\Omega}|u|.
\end{aligned}$$

□

3.20 Lemma (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Kugel, $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ subharmonisch für L und $x_0 \in \partial U$ so, dass $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in U$ gilt. Es existiere die äußere Normalenableitung $\partial_\nu u(x_0)$ im klassischen Sinne. Dann gilt $\partial_\nu u(x_0) > 0$ falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $c \equiv 0$ *in* U,

(ii) $c \geq 0$ *in* U *und* $u(x_0) \geq 0$,

(iii) $u(x_0) = 0$.

3.21 Bemerkung. Aus den Voraussetzungen von Lemma 3.20 folgt trivialerweise, dass $\partial_\nu u(x_0) \geq 0$ gilt. Die Kernaussage liegt in der *Positivität* dieser Ableitung.

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir $U = U_r = U_r(0)$ mit $r > 0$ an. Jede der Bedingungen (i)–(iii) liefert

$$c(x)u(x_0) \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in U. \tag{3.59}$$

Wir Definieren für ein $\lambda > 0$, welches wir später festlegen, die Funktion

$$v(x) := \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} - \mathrm{e}^{-\lambda r^2}, \qquad x \in B_r.$$

Mit $|\cdot|$ sei die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^N$ bezeichnet, und wir schreiben $A = ((a_{ij}))_{ij}$ und $d = (d_i)_i$. Die Bedingung (3.13) aus Definition 3.5 (Elliptizität eines Operators) liefert

$$\begin{aligned}(L + c^-)v &= -\sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j v + \sum_i d_i\partial_i v + c^+ v \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\sum_{ij} a_{ij}(-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda\delta_{ij}) - \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\sum_i d_i 2\lambda x_i + c^+(\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} - \mathrm{e}^{-\lambda r^2}) \\ &\leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}(-4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|d|\,|x| + c^+).\end{aligned}$$

Wir definieren die offene Kugelschale $V := U_r \backslash B_{r/2}$ und wählen λ so groß, dass

$$(L + c^-)v \leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}(-\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|d|r + c^+) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in V \tag{3.60}$$

gilt.

Aus $u(x) < u(x_0)$ für $x \in U_r$ folgt $u(x) \leq u(x_0)$ für $x \in B_r$. Außerdem gilt $v(x) = 0$ für $x \in S_r = \partial B_r$. Daher können wir $\varepsilon > 0$ so wählen, dass

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \partial V = S_{r/2} \cup S_r \tag{3.61}$$

gilt. Mit (3.60) erhalten wir

$$(L + c^-)(u - u(x_0) + \varepsilon v) \leq L(u - u(x_0)) + (L + c^-)\varepsilon v \leq -cu(x_0) \leq 0 \qquad \text{in } V, \tag{3.62}$$

weil u subharmonisch ist, und wegen (3.59). Dies und (3.61) liefern wegen Satz 3.19, dass $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$ in V gilt. Wir halten fest, dass $\nu = x_0/r$ in x_0 gilt. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\partial_\nu u(x_0) = \lim_{t\to 0-} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} &\geq \lim_{t\to 0-} \frac{-\varepsilon v(x_0 + t\nu)}{t} \\ &= -\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} v(x_0 + t\nu) = -\varepsilon\nabla v(x_0)\cdot\frac{x_0}{r} = 2\lambda\varepsilon r\mathrm{e}^{-\lambda r^2} > 0. \qquad \square\end{aligned}$$

3.22 Satz (Starkes Maximumsprinzip). *Seien Ω ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch (superharmonisch) für L. Die Funktion u nehme in $z_0 \in \Omega$ ihr Maximum (Minimum) über $\overline{\Omega}$ an. Dann ist u konstant, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $c \equiv 0$,

(ii) $c \geq 0$ *und* $u(z_0) \geq 0$ $(u(z_0) \leq 0)$,

(iii) $u(z_0) = 0$.

Beweis. Wir behandeln nur den superharmonischen Fall; der andere lässt sich auf diesen zurückführen, indem man u durch $-u$ ersetzt.

Wir nehmen an, dass eine der Bedingungen (i)–(iii) erfüllt ist, setzen $M := \max_{\overline{\Omega}} u$ und

$$\omega := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

Wegen der Annahmen gilt $\omega \neq \varnothing$. Außerdem ist ω relativ abgeschlossen in Ω, weil u stetig ist.

Weil Ω zusammenhängend ist, reicht es also, zu zeigen dass ω offen ist. Ist dies nicht der Fall, dann existieren $y^* \in \omega$ und eine Folge $(y_n) \subseteq \Omega \backslash \omega$, so dass $y_n \to y^*$. Da ω in Ω relativ abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{dist}(y_n, \omega) > 0$ für jedes n. Andererseits gilt $\operatorname{dist}(y_n, \omega) \to 0$ und $\operatorname{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \operatorname{dist}(y^*, \partial\Omega) > 0$. Wir wählen ein festes n groß genug aus, so dass $r := \operatorname{dist}(y_n, \omega) < \operatorname{dist}(y_n, \partial\Omega)$ gilt. Dann folgt $U := U_r(y_n) \subseteq \Omega \backslash \omega$ und $\partial U \cap \omega \neq \varnothing$, wiederum weil ω in Ω relativ abgeschlossen ist. Wir können also $x_0 \in \partial U \cap \omega$ wählen. Es folgt $u(x_0) = u(z_0) = M$, $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in U$, und eine der Bedingungen (i)–(iii) von Lemma 3.20 ist erfüllt. Jenes Resultat zeigt also, dass $\nabla u(x_0) \neq 0$ gilt, im Widerspruch zur Annahme, dass $x_0 \in \Omega$ ein Maximum von u ist. Daher muss ω offen sein. □

3.23 Satz. *Seien* Ω *ein beschränktes* C^2*-Gebiet und* L *ein gleichmäßig elliptischer Operator in Divergenzform, so dass in Definition* 3.1 $a_{ij} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $b_i = 0$ *und* $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ *für ein* $\gamma \in (0, 1]$ *gelten. Seien die Eigenwerte* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ *von* L *gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit aufgeführt. Gemäß Satz* 3.17 *können wir dann die zugehörigen Eigenfunktionen als stetig annehmen. Dann gilt* $\lambda_1 < \lambda_2$*, d.h., der zu* λ_1 *gehörende Eigenraum* E_1 *hat Dimension* 1*. Jede Eigenfunktion* $\varphi \in E_1 \backslash \{0\}$ *ist entweder strikt positiv oder strikt negativ in* Ω*.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $c \geq 0$ annehmen, indem wir statt L den Operator $L - m$ betrachten, mit $m := \min c(\overline{\Omega})$. Dieser besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 - m \leq \lambda_2 - m \leq \lambda_3 - m \leq \ldots$$

und hat dieselben zugehörigen Eigenfunktionen wie L.

Sei $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ eine Eigenfunktion zu λ_1. Wegen Satz 3.17 können wir annehmen, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt, und dass u eine klassische Lösung der Gleichung

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda_1 u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

ist, wobei $\widetilde{L}$ der zu L gehörende Operator in nicht-Divergenzform darstellt. Wir zeigen zunächst, dass u entweder positiv oder negativ ist.

Wir nehmen $u \in S_1 V$ an. Es gilt $u^+ u^- \equiv 0$, so dass u^+ und u^- in V orthogonal sind. Proposition 2.20 zeigt, dass $u^\pm \in E$ und $(\partial_i u^+)(\partial_j u^-) \equiv 0$ gelten. Es folgt $B[u^+, u^-] = 0$. Andererseits haben wir

$$B[u^\pm, u^\pm] \geq \lambda_1 \|u^\pm\|_2^2 \tag{3.63}$$

wegen Satz 3.16(b). Diese Tatsachen liefern

$$\lambda_1 = B[u, u] = B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-] \geq \lambda_1 \|u^+\|_V^2 + \lambda_1 \|u^-\|_V^2 = \lambda_1,$$

das heißt, $B[u^+, u^+] + B[u^-, u^-] = \lambda_1 \|u^+\|_V^2 + \lambda_1 \|u^-\|_V^2$. Nochmals mit (3.63) folgt $B[u^\pm, u^\pm] = \lambda_1 \|u^\pm\|_V^2$, das heißt, die $u^\pm$ sind Eigenfunktionen L zu λ_1, wiederum wegen Satz 3.16(b). Es gilt dieselbe Regularitätsaussage Satz 3.17 wie für u, also $u^\pm \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und

$$\begin{cases} \widetilde{L} u^\pm = \lambda_1 u^\pm \geq 0, & \text{in } \Omega, \\ \quad u^\pm = 0, & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Damit ist u^+ superharmonisch für $\widetilde{L}$, und das starke Maximumsprinzip Satz 3.22 liefert, dass entweder $u^+ \equiv 0$ oder $u^+ > 0$ in Ω gilt. Eine analoge Aussage trifft auf u^- zu. Da u stetig ist und nicht identisch verschwindet, muss also entweder $u > 0$ oder $u < 0$ in Ω gelten.

Für die Dimensionsaussage zu E_1 seien $u_1, u_2 \in E_1 \backslash \{0\}$. Wieder nehmen wir an, dass u_1, u_2 in $\overline{\Omega}$ stetig sind. Wir haben eben gezeigt, dass weder u_1 noch u_2 das Vorzeichen wechseln. Insbesondere gilt

$$\int_\Omega u_1 \neq 0.$$

Es gibt darum $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_\Omega u_2 = \alpha \int_\Omega u_1,$$

das heißt

$$\int_\Omega (u_2 - \alpha u_1) = 0. \tag{3.64}$$

Da aber auch $v := u_2 - \alpha u_1$ in E_1 liegt, wechselt v nicht das Vorzeichen. Demnach zeigt (3.64), dass $v = 0$ sein muss, das heißt, u_1 und u_2 sind linear abhängig. Insgesamt folgt $\dim E_1 = 1$. $\square$

Literatur

[1] W. Chen und C. Li, *Methods on nonlinear elliptic equations*, Bd. 4 der Reihe *AIMS Series on Differential Equations & Dynamical Systems*, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2010, S. xii+299, ISBN: 978-1-60133-006-2.

[2] D. Gilbarg und N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Bd. 224 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, Springer-Verlag, Berlin, second Aufl., 1983, S. xiii+513, ISBN: 3-540-13025-X.