Posgrado de la UNAM
Maestría en ciencias matemáticas

Curso avanzado en análisis

Ecuaciones abstractas de evolución y problemas parabólicos semilineales

Nils Ackermann

Prólogo

La meta de este curso es presentar una generalización de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias para tratar ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) parabólicas semilineales. Un ejemplo concreto y sencillo es la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es una región y $u_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función dada. Se busca una función $u \colon \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$, suficientemente regular, tal que (0.1) es cierto.

Los métodos que aplicaremos son análogas a la teoría de las ecuaciones ordinarias en espacios de Banach. Si escribimos

$$u(t)(x) := u(x,t) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(t,u(t))(x) := f(x,t,u(x,t)),$$

entonces podemos interpretar informalmente u como una órbita en un espacio adecuado X de funciones definidas en $\overline{\Omega}$ que se anulan en $\partial\Omega$, y $\mathcal{F} \colon [0,T] \times X \to X$ como un mapeo. En esta notación la ecuación (0.1) se puede escribir en abstracto como un problema de Cauchy en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = \Delta u(t) + \mathcal{F}(t,u(t)), \qquad u(0) = u_0. \tag{0.2}$$

La complicación en esto es que la parte lineal del lado derecho (Δ en el ejemplo (0.2)) no es una función continua en X.

Conviene repasar algo de la teoría de ecuaciones ordinarias

$$\dot{u} = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u_0, \tag{0.3}$$

puesta en un espacio de Banach X. Un teorema de existencia y unicidad dice que si f es continuo y Lipschitz continuo en su segundo argumento, entonces (0.3) es soluble única y localmente.

Si $X = \mathbb{R}^n$, $J := (\tau_1, \tau_2)$ y $A\colon J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es continuo, el teorema de existencia y unicidad implica que el conjunto de soluciones del problema lineal no autónomo

$$\dot{u} = A(t)u \tag{0.4}$$

es un subespacio de $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ de dimensión n. Para $s \in J$ sea $U_i(\cdot, s)$ la solución de (0.4) con valor inicial e_i (el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$) al tiempo s, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_i(t,s) = A(t)U_i(t,s), \qquad U_i(s,s) = e_i. \tag{0.5}$$

Formando la matriz $U := (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, eso se puede escribir concisamente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t,s) = A(t)U(t,s), \qquad U(s,s) = I_{\mathbb{R}^n}. \tag{0.6}$$

Entonces el problema de Cauchy lineal homogéneo

$$\dot{u} = A(t)u, \qquad u(s) = u_0 \tag{0.7}$$

tiene la solución $u(t) := U(t,s)u_0$.

Recordemos el método de variación de parámetros. Si $b\colon J \to \mathbb{R}^n$ es continuo, entonces el problema de Cauchy lineal no homogéneo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = A(t)u(t) + b(t), \qquad u(s) = u_0 \tag{0.8}$$

tiene la solución

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in J. \tag{0.9}$$

El conocimiento del llamado *operador de evolución* $U(t,s)$ de la función $A(t)$ sirve para resolver problemas lineales no homogéneos.

Esta idea servirá también para resolver ecuaciones parabólicas semilineales como en (0.2). Demostraremos la existencia de un operador de evolución $U(t,s)$

para Δ, de modo que

$$
\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.10}
$$

tiene la solución $u(t) = U(t,s)u_0$. Luego u es una solución de (0.2) si y sólo si

$$
u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau)F(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in J. \tag{0.11}
$$

La familia de operadores $U(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ tiene buenas propiedades, así que se puede controlar mediante (0.11) el problema de que Δ no es un operador continuo en X. Lo que falta que hacer para resolver (0.2) es resolver (0.11), usando el teorema de punto fijo de Banach.

Los detalles necesarios para ese programa son varios. Hay que entender bien las propiedades de los operadores de evolución, y también es importante escoger espacios adecuados X para que $\mathcal{F}$ esté bien definido. Finalmente, la solución de (0.11) inicialmente tiene muy poca regularidad. Hay que demostrar que en realidad la regularidad es suficiente para entenderla como solución clásica del problema concreto (0.1).

Una vez que la existencia y ciertas propiedades de las soluciones de (0.2) en X están conocidas, demostraremos que ellas definen un sistema dinámico en X, mas explícito, un *semiflujo continuo*. Como en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias eso permite considerar estabilidad de equilibrios y órbitas periódicas y construir variedades invariantes locales y globales relacionadas con estos objetos. Las variedades globales invariantes estructuran el espacio fase X. Su geometría permite demostrar la existencia de equilibrios y órbitas periódicas, junto con órbitas de conexión entre ellos.

Índice general

Capítulo 1

Semigrupos de operadores lineales

En este capítulo nos basamos principalmente en los libros [7, 11, 14, 16].

1.1 Introducción

Notación

Definimos $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$ para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Además, sean $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$ y $\mathbb{R}_0^\pm := \mathbb{R}^\pm \cup \{0\}$.

Si $P(\lambda)$ es una propiedad de números $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces escribimos

$$[P(\lambda)] := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) \text{ se cumple}\}.$$

Ejemplo:

$$[\lambda \geq 0] = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \geq 0\}.$$

Si X, Y son espacios topológicos, entonces el conjunto de mapeos continuos entre X y Y es denotado por $C(X, Y)$.

Para espacios métricos X, Y definimos para $x \in X$ y $r > 0$:

$$\begin{aligned} B_r(x; X) &:= \{y \in X \mid d_X(x, y) < r\}, \\ \overline{B}_r(x; X) &:= \{y \in X \mid d_X(x, y) \leq r\}, \\ \partial B_r(x; X) &:= \{y \in X \mid d_X(x, y) = r\}. \end{aligned}$$

Si no hay confusión, omitimos la X.

Si X es un espacio lineal normado, escribimos

$$B_r X := B_r(0; X)$$

y similarmente $\overline{B}_r X$ y $\partial B_r X$. Aquí también omitiremos la X si no hay confusión.

Operadores lineales

Sean X, Y espacios normados sobre el campo $\mathbb{K}$. Entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es el espacio normado de los operadores lineales acotados entre X y Y. Escribimos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$. Similarmente, $\mathcal{K}(X, Y)$ y $\mathcal{K}(X)$ denotan espacios de operadores lineales compactos. El espacio $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ es el dual de X.

Si $X \subseteq Y$ como conjuntos y si la inclusión $i: X \to Y$ (la cual es un operador lineal) es acotada, entonces el encaje de X en Y es continuo y escribimos

$$X \hookrightarrow Y.$$

Esto es el caso si y sólo si $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$, con una constante C. Si además X es denso en Y entonces escribimos

$$X \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} Y.$$

Para encajes compactos, o compactos y densos, escribimos

$$X \overset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} Y \qquad \text{y} \qquad X \overset{\mathrm{cd}}{\hookrightarrow} Y.$$

Si X y Y son iguales como conjuntos pero con normas distintas, entonces

$$X \doteq Y$$

si las normas son equivalentes.

Un operador lineal general A entre espacios normados X y Y está dado por su dominio $D(A) \subseteq X$ y sus valores como mapeo lineal $A\colon D(A) \to Y$. Aquí $D(A)$ siempre es un subespacio de X. El conjunto

$$\operatorname{gr} A := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in D(A),\ y = f(x)\}$$

es la gráfica de A. Un operador lineal A se llama *cerrado* si $\operatorname{gr} A$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$, y *densamente definido* si $D(A)$ es denso en X. Si Y

es completo y A acotado como operador lineal entre $D(A)$ y Y, entonces A tiene una extensión lineal acotada única a $\overline{D(A)}$. Si además A es densamente definido, entonces la extensión única de A está en $\mathcal{L}(X, Y)$. Un operador lineal es cerrado si y sólo si $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ implica que $x \in D(A)$ y $y = Ax$.

Pongamos $\mathcal{N}(A) := \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}$ (*núcleo de* A) y $\mathcal{R}(A) := \{Ax \mid x \in D(A)\}$ (*rango de* A).

Llamamos a un subespacio Z de X invariante bajo A si $A(Z \cap D(A)) \subseteq Z$. Sea $X = X_1 \oplus X_2$, la suma directa topológica de subespacios cerrados X_1, X_2. Si X_1, X_2 son invariantes bajo A entonces decimos que esta descomposición reduce al operador A. Con las definiciones $D(A_i) := X_i \cap D(A)$ y $A_i \colon D(A_i) \to Y$, $A_i x := Ax$, escribimos $A = A_1 \oplus A_2$. Si A está cerrado o acotado, estas propiedades se heredan a los operadores A_i.

Sean $X \hookrightarrow Y$ espacios de Banach encajados y sea A un operador lineal cerrado en Y. Definimos la *X-realización A_X de A* como sigue:

$$\begin{aligned} D(A_X) &:= \{x \in D(A) \cap X \mid Ax \in X\}, \\ A_X x &:= Ax \quad \text{para todo } x \in D(A_X). \end{aligned}$$

Entonces A_X es un operador cerrado.

En $D(A)$ definimos la *norma de la gráfica*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Lema 1.1. *Sean X, Y espacios de Banach y A un operador lineal entre X y Y. Entonces son equivalentes:*

(i) *A es cerrado,*

(ii) *$D(A)$ es un espacio de Banach respecto a la norma de la gráfica.*

Demostración. **(i)⇒(ii):** Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $D(A)$. Eso implica que (x_n) es una sucesión de Cauchy en X y (Ax_n) es una sucesión de Cauchy en Y. Por completitud ambas sucesiones convergen. Particularmente $x_n \to x$ para un $x \in X$. A cerrado y Ax_n convergente implica que $x \in D(A)$ y $Ax_n \to Ax$. En seguida, $\|x_n - x\|_{D(A)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(ii)⇒(i): Sean $x_n \to x$ en X y $Ax_n \to y$ en Y sucesiones convergentes. Entonces ambas sucesiones son de Cauchy en sus espacios respectivos, y en seguida (x_n) es de Cauchy en $D(A)$. Por completitud existe $z \in D(A)$ tal que $x_n \to z$ en $D(A)$. Como $D(A) \hookrightarrow X$ es continuo, $x_n \to z$ en X, y $x = z$. Además, $\|x_n - x\|_{D(A)} \to 0$, es decir, $Ax_n \to Ax = y$ en Y. $\square$

Si A es un operador lineal biyectivo $D(A) \to Y$ tal que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, entonces $|\!|\!| x |\!|\!|_{D(A)} := \|Ax\|_Y$ define una norma equivalente a $\|\cdot\|_{D(A)}$:

$$
\begin{aligned}
(1.1) \qquad |\!|\!| x |\!|\!|_{D(A)} &\le \|x\|_{D(A)} = \|A^{-1}Ax\|_X + \|Ax\|_Y \\
&\le (\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + 1)\|Ax\|_Y = (\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + 1) \; |\!|\!| x |\!|\!|_{D(A)} .
\end{aligned}
$$

Complejificación y teoría espectral

Teoría espectral está puesta en espacios complejos, pero muchas ecuaciones diferenciales están puestas en espacios reales. Por lo tanto, la aplicación de la teoría espectral a problemas reales requiere de la complejificación de espacios reales. Sean X un espacio de Banach real y A un operador densamente definido cerrado en X. Definimos el espacio de Banach complejo $X_{\mathbb{C}}$ como sigue: Como conjunto se pone $X_{\mathbb{C}} := X \times X$. Un elemento $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ también se denota por $z = x + \mathrm{i}y$. Si $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$ y $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$, entonces las operaciones en $X_{\mathbb{C}}$ están definidas por

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\
\lambda z &:= (\lambda_1 x - \lambda_2 y) + \mathrm{i}(\lambda_1 y + \lambda_2 x).
\end{aligned}
$$

La norma en $X_{\mathbb{C}}$ se define por

$$
\|z\|_{X_{\mathbb{C}}} := \max_{\theta \in [0,2\pi]} \|\cos(\theta)x + \operatorname{sen}(\theta)y\|_X .
$$

La complejificación $A_{\mathbb{C}}$ de A se define por

$$
D(A_{\mathbb{C}}) := \{z \in X_{\mathbb{C}} \mid x, y \in D(A)\}, \qquad A_{\mathbb{C}} z := Ax + \mathrm{i}Ay \text{ si } z \in D(A_{\mathbb{C}}).
$$

Si A es un operador lineal en un espacio de Banach complejo X, entonces el *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A consiste de todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A$ es una biyección de $D(A)$ con X, y tal que $R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. El mapeo $\rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto R(\lambda; A)$ es la *resolvente* de A. El *espectro* $\sigma(A)$ de A es el complemento del conjunto resolvente de A en $\mathbb{C}$. Demostremos que $\rho(A)$ es abierto: sea $\lambda \in \rho(A)$. Si

$$
|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\lambda; A)\|}
$$

entonces $I - (\lambda - \mu)R(\lambda; A)$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$ por la serie de Neumann. En seguida,

$$(\mu I - A) = (\lambda I - A)(I - (\lambda - \mu)R(\lambda; A))$$

es invertible en $\mathcal{L}(X)$ con inversa

$$R(\mu; A) = R(\lambda; A)\sum_{k=0}^{\infty}((\lambda - \mu)R(\lambda; A))^k.$$

Se sigue que

$$\|R(\mu; A)\| \leq \frac{\|R(\lambda; A)\|}{1 - |\lambda - \mu|\,\|R(\lambda; A)\|} = \frac{1}{\|R(\lambda; A)\|^{-1} - |\lambda - \mu|}. \tag{1.2}$$

Eso demuestra que $\rho(A)$ es abierto y $\sigma(A)$ cerrado.

En efecto, para cualquier subconjunto cerrado S de $\mathbb{C}$ existen un espacio de Banach complejo X y un operador lineal A en X tal que $S = \sigma(A)$.

Si $\lambda \in \rho(A)$ y $x \in D(A)$, entonces la definición de la resolvente implica que

$$\begin{aligned} AR(\lambda; A)x &= (A - \lambda I)R(\lambda; A)x + \lambda R(\lambda; A)x \\ &= R(\lambda; A)(A - \lambda I)x + \lambda R(\lambda; A)x \\ &= R(\lambda; A)Ax - \lambda R(\lambda; A)x + \lambda R(\lambda; A)x \\ &= R(\lambda; A)Ax, \end{aligned}$$

es decir,

$$AR(\lambda; A)x = R(\lambda; A)Ax \qquad \text{para todo } x \in D(A). \tag{1.3}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D(A^n)$, entonces $A^n x \in X$ y $R(\lambda; A)A^n x \in D(A)$. Usando (1.3) sucesivamente se obtiene $A^n R(\lambda; A)x \in D(A)$, es decir, $R(\lambda; A)x \in D(A^{n+1})$. Hemos demostrado que

$$R(\lambda; A)(D(A^n)) \subseteq D(A^{n+1}) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, entonces para todo $x \in X$ tenemos (escribiendo $R(\lambda) := R(\lambda; A)$)

$$R(\lambda)x = R(\lambda)(\mu I - A)R(\mu)x$$

$$
\begin{aligned}
&= R(\lambda)((\lambda I - A) + (\mu I - A) - (\lambda I - A))R(\mu)x \\
&= R(\lambda)(\lambda I - A)R(\mu)x + R(\lambda)(\mu - \lambda)R(\mu)x \\
&= R(\mu)x + (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)x.
\end{aligned}
$$

Eso implica

$$
R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A), \tag{1.5}
$$

la llamada *ecuación de la resolvente*. Ella implica que

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} R(\lambda; A) = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{R(\lambda; A) - R(\mu; A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda; A)^2 \tag{1.6}
$$

para todo $\lambda \in \rho(A)$. En otras palabras, $R(\,\cdot\,; A)$ es holomorfa en $\rho(A)$.

Para $A \in \mathcal{L}(X)$ se define la exponencial mediante

$$
\mathrm{e}^A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{1.7}
$$

como para números complejos. Esta serie converge respecto a la norma en $\mathcal{L}(X)$ porque $\|A^k\| \le \|A\|^k$, y los últimos términos forman parte de la serie exponencial en $\mathbb{R}$, que sirve como dominante.

Lema 1.2. *Sean $A, B \in \mathcal{L}(X)$ operadores que conmutan, y sea*

$$
C := \text{máx}\{\|A\|, \|B\|\}.
$$

Entonces

$$
\|\mathrm{e}^A - \mathrm{e}^B\| \le \mathrm{e}^C \|A - B\|. \tag{1.8}
$$

Además, la función $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ es continuamente diferenciable, con derivada $A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A$.

Demostración. Para $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $AB = BA$ implica que

$$
A^k - B^k = (A - B) \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} B^{\ell}. \tag{1.9}
$$

En seguida,

$$\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| \sum_{\ell=0}^{k-1} \|A\|^{k-1-\ell} \|B\|^\ell = kC^{k-1}\|A - B\|$$

y luego

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^A - \mathrm{e}^B\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A^k - B^k\| \\ &\leq \|A - B\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} kC^{k-1} = \mathrm{e}^C \|A - B\|.\end{aligned}$$

Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Remplazando A por tA y B por sA, (1.9) implica

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{sA}}{t - s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} t^{k-1-\ell} s^\ell \right) \\ &\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA} A\end{aligned}$$

cuando $s \to t$. □

La integral de Bochner

Definición 1.3. Sea A un subconjunto de un espacio normado E.

(a) A es *convexo* si $(1 - t)x + ty \in A$ para todo $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$.

(b) La *envolvente convexa* $\mathrm{conv}(A)$ es el conjunto de todas combinaciones convexas

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i$$

en A, donde $\ell \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$ y $a_i \in A$.

Nota 1.4. La envolvente convexa de A siempre es un conjunto convexo. Es la intersección de todos conjuntos convexos que contienen a A.

Lema 1.5. *Sea*

$$a := \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i \tag{1.10}$$

una combinación convexa de elementos $a_i \in \mathbb{R}^N$. Entonces a es una combinación convexa de a lo más $N+1$ de los a_i.

Demostración. Supongamos que $\ell > N+1$ y que se cumple (1.10). Por inducción basta mostrar que a puede ser representada como una combinación convexa de nada más $\ell - 1$ de los elementos a_i. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, \ell$. El núcleo del mapeo lineal

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i a_i, \sum_{i=1}^{\ell} x_i \right)$$

de $\mathbb{R}^\ell$ en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tiene dimensión positiva, ya que $\ell > N+1$. Luego existe $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \neq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\ell} x_i a_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = 0$. Sea $r := \max_{i=1}^{\ell}(|x_i|/\mu_i)$. Entonces $r > 0$. Sea i_0 tal que $r = |x_{i_0}|/\mu_{i_0}$. Definimos $s := \operatorname{sign}(x_{i_0})/r$, así que $|sx_i| \leq \mu_i$ para todo i y $sx_{i_0} = \mu_{i_0}$. Definimos $\nu_i := \mu_i - sx_i \geq 0$, así que $a = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i a_i$ y $\sum_{i=1}^{\ell} \nu_i = 1$, es decir, a es una combinación convexa de los a_i con los pesos ν_i. Observamos que $\nu_{i_0} = 0$ y luego que a es una combinación convexa de a lo más $\ell - 1$ de los a_i. $\square$

Lema 1.6. *Sean E un espacio normado, $A \subseteq E$, $X \subseteq E$ finito y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subseteq X + B_\varepsilon$. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon$, entonces existe $Y \subseteq E$ finito tal que* $\operatorname{conv}(A) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}$.

Demostración. Sea $x \in \operatorname{conv}(A)$. Entonces existen $\ell \in \mathbb{N}$, $\mu_i \in [0,1]$ y $x_i \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, \ell$ tales que $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_i$. Por la hipótesis podemos agarrar $y_i \in X$ tales que $|x_i - y_i| < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Se sigue que

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i y_i + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i (x_i - y_i) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon.$$

Como esto se cumple para cualquier $x \in \operatorname{conv}(A)$, obtenemos

$$\operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon. \tag{1.11}$$

Es claro que $\operatorname{conv}(X)$ es compacta porque X es finito. Existe un conjunto finito $Y \subseteq E$ tal que $\operatorname{conv}(X) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon}$. Con (1.11) esto implica

$$\operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}(X) + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon} + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}.$$

□

Proposición 1.7. *Sean E un espacio de Banach y $A \subseteq E$ compacto. Entonces $\overline{\operatorname{conv}(A)}$ es compacta. Si $\dim E < \infty$, $\operatorname{conv}(A)$ es compacta.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, existe un conjunto finito $X \subseteq E$ tal que $A \subseteq X + B_{\varepsilon/2}$. Por el Lema 1.6 existe $Y \subseteq E$ finito tal que $\operatorname{conv}(A) \subseteq Y + B_\varepsilon$. Como ε era arbitrariamente chico se muestra fácilmente, usando sucesiones, que $\overline{\operatorname{conv}(A)}$ es compacta.

Si $\dim E < \infty$, el Lema 1.5 dice que todos elementos de $\operatorname{conv}(A)$ son combinaciones convexas de $\dim E + 1$ elementos de A. Esta información permite demostrar fácilmente que $\operatorname{conv}(A)$ es compacta. □

Recordemos algunos hechos que son consecuencias del teorema de Hahn-Banach.

Lema 1.8. *Sean E un espacio normado y $x_0 \in E$. Entonces existe $\Lambda \in E'$ tal que*

$$\Lambda x_0 = \|x_0\| \qquad y \qquad |\Lambda x| \leq \|x\| \qquad \textit{para todo } x \in E. \tag{1.12}$$

Demostración. Si $x_0 = 0$ tomamos $\Lambda := 0$. Si $x_0 \neq 0$ tomamos $p(x) := \|x\|$, $M := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $f(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|$. El teorema de Hahn-Banach implica la existencia de una extensión Λ de f a E que cumple $|\Lambda x| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. □

Lema 1.9 (Véase [16, Theorem 3.4b)])**.** *Sean A, B subconjuntos convexos de un espacio normado E. Si A es compacto y B cerrado, entonces existen $\Lambda \in E'$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\operatorname{Re} \Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda y \tag{1.13}$$

para todo $x \in A$ y $y \in B$.

Decimos que el espacio dual E' de un espacio lineal topológico E *separa puntos en E* si para elementos distintos $x, y \in E$ existe $\Lambda \in E'$ tal que $\Lambda x \neq \Lambda y$.

Lema 1.10. *El dual de un espacio normado E separa puntos en E.*

Demostración. Si $x, y \in E$ son distintos, aplicamos el Lema 1.9 con $A := \{x\}$ y $B := \{y\}$. $\square$

Nota 1.11. El Lema 1.10 implica para un espacio normado E que si $\Lambda x = 0$ para todo $\Lambda \in E'$, entonces $x = 0$.

Teorema 1.12 (Integral de Bochner)**.** *Sean E un espacio de Banach, $a \leq b$ y $f : [a, b] \to E$ continua. Entonces existe un y sólo un elemento $y \in E$ tal que*

$$\Lambda y = \int_a^b \Lambda f(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

para todo $\Lambda \in E'$. Ese elemento y será llamado la integral de f sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s := y.$$

Si $a < b$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \in \overline{\mathrm{conv}(f[a,b])}. \tag{1.15}$$

Demostración. Consideremos E como espacio vectorial real. Esto es posible y suficiente ya que todo espacio vectorial complejo también es un espacio vectorial real, y todo operador lineal complejo es lineal real.

Primero demostremos la unicidad. Sean entonces y_1, y_2 dados con la propiedad (1.14). Eso implica $\Lambda[y_1 - y_2] = 0$ para todo $\Lambda \in E'$. Como E' separa puntos de E, se tiene $y_1 = y_2$.

Mostremos la existencia de y. Si $a = b$, escogemos $y = 0$. Si $a = 0$ y $b = 1$, ponemos

$$K := \overline{\mathrm{conv}(f[0,1])}.$$

Por la continuidad de f y por la Proposición 1.7 K es compacto.

Sea $D = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\ell\} \subseteq E'$ un conjunto finito de funcionales lineales. Denotemos

$$K_D := \{y \in K \mid (1.14) \text{ es cierto para todo } \Lambda \in D\}$$

y mostremos que K_D no es vacío. Definimos el mapeo $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^\ell)$ por

$$\widetilde{\Lambda} x := (\Lambda_1 x, \Lambda_2 x, \ldots, \Lambda_\ell x)$$

y $g := \widetilde{\Lambda} f$. Como g es continua, $g[0,1]$ es compacto. La Proposición 1.7 implica que $L := \operatorname{conv}(g[0,1])$ es un conjunto compacto. Definimos

$$z_i := \int_0^1 g_i(s)\, \mathrm{d}s$$

y $z := (z_1, z_2, \ldots, z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

Demostremos que

$$z \in L. \tag{1.16}$$

Supongamos por contradicción que eso no fuera cierto. Como L es convexo y compacto, el teorema de separación de Hahn-Banach implicaría la existencia de un mapeo lineal $\Gamma \colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ tal que $\Gamma x > \Gamma z$ para todo $x \in L$. Existirían coeficientes c_i tales que $\Gamma x = \sum_{i=1}^\ell c_i x_i$ para todo $x \in \mathbb{R}^\ell$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i g_i(t) > \sum_{i=1}^{\ell} c_i z_i$$

para todo $t \in [0,1]$. Integrar esta desigualdad sobre $[0,1]$ implicaría

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i z_i > \sum_{i=1}^{\ell} c_i z_i,$$

una contradicción. Eso comprueba (1.16).

(1.16) implica la existencia de $t_j \in [0,1]$ y $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, con $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ y

$$z = \sum_{j=1}^{m} \mu_j g(t_j).$$

Para

$$y := \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(t_j) \in \operatorname{conv}(f[0,1])$$

obtenemos $\widetilde{\Lambda} y = z$, es decir, (1.14) se cumple para $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\ell$. Eso muestra que K_D no es vacío.

Consideramos la colección

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq E' \mid D \text{ es finito}\}.$$

Como $K_{D_1} \cap K_{D_2} = K_{D_1 \cup D_2}$ para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, lo antes mostrado implica que

(1.17) toda intersección finita de conjuntos K_D, $D \in \mathcal{D}$, es no vacía.

Notemos también que todo K_D es cerrado por la continuidad de los elementos de E'. Si

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} K_D$$

fuera vacía, la colección

$$\{K \backslash K_D \mid D \in \mathcal{D}\}$$

sería una cubierta abierta de K. Por la compacidad de K existiría una subcubierta finita de ella, en contradicción con (1.17). Eso comprueba que podemos escoger

$$y \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} K_D,$$

así que (1.14) se cumple para todo $\Lambda \in E'$ y (1.15) se cumple.

En el caso general $a < b$, definimos

$$\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s := (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)s)\,\mathrm{d}s.$$

Es fácil comprobar (1.14) se cumple para todo $\Lambda \in E'$ y (1.15), usando el teorema de transformación de variable para la integral en $\mathbb{R}$. □

Proposición 1.13. *Si E, F son espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ y $f : [a, b] \to E$ es continua, se cumplen*

(1.18) $$\left\| \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_a^b \|f(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

y

$$A \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b Af(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.19}$$

Demostración. Ponemos $y := \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$. Si $y = 0$, la primera desigualdad es trivial. Sea entonces $y \neq 0$, y sea $\Lambda \in E'$ el funcional dado por el Lema 1.8 para el elemento y. Se tiene que $|\Lambda f(s)| \le \|f(s)\|$ para todo $s \in [a, b]$ y

$$\|y\| = \Lambda y = \int_a^b \Lambda f(s)\,\mathrm{d}s \le \int_a^b \|f(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

La otra identidad es una consecuencia de (1.14) y del hecho que $\Lambda A \in E'$ para todo $\Lambda \in F'$. □

Continuidad fuerte

Si X, Y son espacios de Banach, el conjunto

$$Y^X := \{\varphi\colon X \to Y\} = \prod_{x \in X} Y$$

de los mapeos $X \to Y$ tiene la topología natural del producto. Ella está definida como la topología menos fina tal que todas proyecciones $p_x\colon Y^X \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$, son continuas. La topología del producto tiene la siguiente propiedad: Si Λ es un espacio topológico y si $f\colon \Lambda \to Y^X$ es un mapeo, entonces f es continuo si y sólo si $p_x \circ f$ es continuo para todo $x \in X$, equivalentemente, si y sólo si $\lambda \mapsto f(\lambda)(x)$ es continuo para todo $x \in X$. Esa es la razón porque esta topología en Y^X se llama también la topología de convergencia en puntos.

Como $\mathcal{L}(X, Y) \subseteq Y^X$, podemos considerar el espacio $\mathcal{L}_s(X, Y)$ de los operadores lineales acotados entre X y Y, con la topología inducida de convergencia en puntos. Un mapeo $f\colon \Lambda \to \mathcal{L}_s(X, Y)$ es continuo en λ_0 si y sólo si el mapeo $\lambda \mapsto f(\lambda)x$ de Λ en Y es continuo en λ_0 para todo $x \in X$. Si eso es el caso, entonces decimos que *f es fuertemente continuo en λ_0*. Si f es fuertemente continuo en todo $\lambda \in \Lambda$, entonces *f es fuertemente continuo en Λ*.

Sea Λ un espacio métrico y $f\colon \Lambda \to \mathcal{L}_s(X, Y)$ continuo en un $\lambda_0 \in \Lambda$. Entonces

$$\sup_{\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty,$$

para algún $\varepsilon > 0$. Para ver eso, supóngase por contradicción que existiera una sucesión $\lambda_n \to \lambda_0$ tal que $\|f(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to \infty$. La continuidad fuerte en λ_0 implica que $f(\lambda_n)x$ es acotado en Y para todo $x \in X$. Por el principio de la acotación uniforme se tiene que $\|f(\lambda_n)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ es acotado, una contradicción. Ese resultado muestra que f es localmente acotado en λ_0. Particularmente, si Λ es compacto y $f \in C(\Lambda, \mathcal{L}_s(X,Y))$, entonces

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty,$$

es decir, f es acotado.

Proposición 1.14. *Sean Λ un espacio métrico y X, Y espacios de Banach.*

(a) *Sean $f \in C(\Lambda, \mathcal{L}_s(X,Y))$ y $u \in C(\Lambda, X)$. Entonces el mapeo $\lambda \mapsto f(\lambda)u(\lambda)$ es un elemento de $C(\Lambda, Y)$.*

(b) *Sean $f : \Lambda \to \mathcal{L}(X,Y)$ un mapeo y $\lambda_0 \in \Lambda$ tales que f es localmente acotado en λ_0. Si X_1 es un subespacio denso de X tal que*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda)x = f(\lambda_0)x \tag{1.20}$$

para todo $x \in X_1$, entonces f es fuertemente continuo en λ_0.

Demostración. **(a):** Fijamos $\lambda_0 \in \Lambda$ y sea $\lambda_n \to \lambda_0$ una sucesión convergente en Λ. Entonces

$$\begin{aligned} &\|f(\lambda_n)u(\lambda_n) - f(\lambda_0)u(\lambda_0)\| \\ &\qquad \le \|f(\lambda_n)\| \, \|u(\lambda_n) - u(\lambda_0)\| + \|f(\lambda_n)u(\lambda_0) - f(\lambda_0)u(\lambda_0)\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ por las hipótesis y porque f es localmente acotado en λ_0.

(b): Sea $\lambda_n \to \lambda_0$ convergente en Λ. Como $f(\lambda_n)$ es acotado en $\mathcal{L}(X,Y)$, existe $C > 0$ tal que $\|f(\lambda_n)\|, \|f(\lambda_0)\| \le C$ para todo n. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $y \in X_1$ tal que $\|x - y\| \le \varepsilon/3C$. Existe n_0 tal que $\|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| \le \varepsilon/3$ para $n \ge n_0$. En consecuencia

$$\begin{aligned} &\|f(\lambda_n)x - f(\lambda_0)x\| \\ &\qquad \le \|f(\lambda_n)\| \, \|x - y\| + \|f(\lambda_n)y - f(\lambda_0)y\| + \|f(\lambda_0)\| \, \|x - y\| \le \varepsilon \end{aligned}$$

para $n \ge n_0$. Eso demuestra que $f(\lambda_n)x \to f(\lambda_0)x$ para todo $x \in X$. $\square$

Sea Λ un subconjunto abierto de un espacio de Banach Z y $f : \Lambda \to \mathcal{L}(X, Y)$ un mapeo. La función f es *fuertemente diferenciable en* $z_0 \in Z$ si $z \mapsto f(z)x$ es diferenciable en z_0 para todo $x \in X$. En ese caso escribimos

$$\mathrm{D}f(z_0)x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z_0} f(z)x. \tag{1.21}$$

Similarmente, si $k \in \mathbb{N}$ entonces decimos que f es *k veces continua y fuertemente diferenciable en Λ* si $f(\cdot)x$ es diferenciable continuamente k veces en Λ para todo $x \in X$. Denotemos por $C^k(\Lambda, \mathcal{L}_\mathrm{s}(X, Y))$ es espacio de todas funciones $\Lambda \to \mathcal{L}(X, Y)$ que son k veces fuertemente diferenciables en Λ.

Lema 1.15. *Sean $f \in C^1(\Lambda, \mathcal{L}_\mathrm{s}(X, Y))$ y $u \in C^1(\Lambda, X)$. Entonces $f(\cdot)u(\cdot) \in C^1(\Lambda, Y)$ y*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)u(z) = \mathrm{D}f(z)u(z) + f(z)\mathrm{D}u(z) \in \mathcal{L}(Z, Y).$$

1.2 Semigrupos fuertemente continuos y sus generadores

Primero trataremos la generalización del problema lineal autónomo homogéneo $\dot{u} = Au$, puesto en $\mathbb{R}^n$, al problema análogo puesto en un espacio de Banach complejo X. Aquí el operador lineal A puede ser no acotado, para permitir operadores diferenciales como el Laplaciano. Como la solución en el caso de un operador acotado A es $\mathrm{e}^{tA}u(0)$, buscamos una forma similar de representar la solución en el caso general. Hay que tomar en cuenta que en general no es claro que debería significar la expresión e^{tA} si A no es acotado. Sólo en casos especiales hay una definición directa de la función exponencial de tA. Por ejemplo, si X es un espacio de Hilbert y A un operador normal la teoría espectral permite definir e^{tA} mediante el cálculo funcional. En el caso general, en vez de usar la representación de la solución como exponencial, se define la noción del semigrupo fuertemente continuo, que tiene las propiedades buscadas.

Definición 1.16. Sean X un espacio de Banach y $(Q(t))_{t \geq 0}$ una familia de operadores lineales acotados en X que satisface

(i) $Q(0) = I$ y $Q(s + t) = Q(s)Q(t)$ para $s, t \geq 0$;

(ii) $\lim_{t \to 0+} Q(t)x = x$ para todo $x \in X$.

Entonces Q es un *semigrupo fuertemente continuo* en X (C_0-*semigrupo*).

Nota 1.17. El límite en (ii) está entendido respecto a la norma en X. Efectivamente Q es fuertemente continuo en 0.

Toda $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua que cumple la ecuación funcional $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) f(\mu)$ y $f(0) = 1$ tiene la representación $f(\lambda) = e^{a\lambda}$, donde $a = f'(0)$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.18. Si Q es un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, entonces

$$Ax := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Q(\varepsilon)x - x}{\varepsilon} \tag{1.22}$$

define un operador lineal con dominio $D(A)$ el conjunto de los $x \in X$ tal que existe el límite en (1.22), respecto a la norma en X. Este operador A es el *generador infinitesimal* de Q.

Veremos que en un sentido débil el semigrupo tiene la representación $Q(t) = \exp(tA)$.

Teorema 1.19. *Un C_0-semigrupo Q en un espacio de Banach X con generador infinitesimal A tiene las siguientes propiedades:*

(a) *Existen constantes $C \geq 1$ y $\gamma \geq 0$ tales que*

$$\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{1.23}$$

(b) *Q es fuertemente continuo en $\mathbb{R}_0^+$.*

(c) *$D(A)$ es denso en X y A es cerrado.*

(d) *Para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene $Q(t)x \in D(A)$ y se cumple la ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)x = AQ(t)x = Q(t)Ax. \tag{1.24}$$

(e) *Escribiendo*

$$A_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - I) \in \mathcal{L}(X), \tag{1.25}$$

se tiene que $A_\varepsilon x \to Ax$ *para todo* $x \in D(A)$ *cuando* $\varepsilon \to 0$*, y que*

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathrm{e}^{tA_\varepsilon} x \tag{1.26}$$

para todo $x \in X$*. La convergencia en* (1.26) *es uniforme para* t *en cualquier subconjunto compacto de* $\mathbb{R}_0^+$*.*

(f) *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$*, entonces se cumple* $\lambda \in \rho(A)$ *y*

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t) x \, \mathrm{d}t. \tag{1.27}$$

Nota 1.20. Los límites en la derivada en (d) y en (e) se entienden respecto a la norma en X. El inciso (f) implica que $\sigma(A) \subseteq [\operatorname{Re}(\lambda) \leq \gamma]$.

Demostración. (a)*:* Como Q es fuertemente continuo en 0, las observaciones de la sección 1.1 implican que existen $C, \delta > 0$ tales que $\|Q(t)\| \leq C$ para todo $t \in [0, \delta]$. Necesariamente se tiene $C \geq \|Q(0)\| = \|I\| = 1$. Si $t \in \mathbb{R}_0^+$, pongamos $n := \lfloor t/\delta \rfloor + 1$, así que

$$(n-1)\delta \leq t < n\delta. \tag{1.28}$$

Entonces $\|Q(t/n)\| \leq C$. Usando la ecuación funcional de la Definición 1.16(i) y $C \geq 1$ se sigue que

$$\|Q(t)\| = \|Q(t/n)^n\| \leq C^n \leq C^{1+t/\delta}.$$

Basta escoger γ tal que $\mathrm{e}^\gamma = C^{1/\delta}$. Como $C \geq 1$, $\gamma \geq 0$.

(b): Si $0 \leq s < t \leq T$ entonces el inciso (a) y la ecuación funcional para Q implican

$$\|Q(t)x - Q(s)x\| \leq \|Q(s)\| \, \|Q(t-s)x - x\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma T} \|Q(t-s)x - x\| \to 0$$

cuando $|s - t| \to 0$. Esto comprueba continuidad fuerte por la derecha y por la izquierda.

(c): El inciso (b) implica que $t \mapsto Q(t)x$ es continuo como mapeo de $\mathbb{R}_0^+$ en X, para todo $x \in X$. Entonces se puede definir un operador M_t por

$$M_t x := \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) x \, \mathrm{d}s \qquad \text{para } t > 0, x \in X.$$

Se tiene por el inciso (a)

$$\|M_t x\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s)x\|\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{t}\int_0^t C\mathrm{e}^{\gamma s}\|x\|\,\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{1}{t}\int_0^t C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|\,\mathrm{d}s = C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|,$$

es decir,

$$M_t \in \mathcal{L}(X) \qquad \text{y} \qquad \|M_t\| \leq \mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.29}$$

Además se tiene para $x \in X$ y $t > 0$ por el teorema del valor intermedio que existe $s' \in (0, t)$ tal que

$$\begin{aligned} \|M_t x - x\| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s)x - x\|\,\mathrm{d}s \\ &= \|Q(s')x - x\| \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Afirmamos que

$$A_\varepsilon M_t x = A_t M_\varepsilon x \qquad \text{para todo } \varepsilon, t > 0,\ x \in X. \tag{1.31}$$

Para demostrar esta afirmación, notemos que para integrales sobre funciones continuas en $\mathbb{R}_0^+$ se cumple la identidad

$$\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} - \int_0^t = \int_t^{t+\varepsilon} - \int_0^\varepsilon . \tag{1.32}$$

El lado izquierdo aplicado al integrando $Q(s)x$ da

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} Q(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s &= \int_0^t Q(\varepsilon + s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (Q(\varepsilon) - I)Q(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= (Q(\varepsilon) - I)\int_0^t Q(s)x\,\mathrm{d}s \\ &= \varepsilon A_\varepsilon t M_t x. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es una consecuencia de la Proposición 1.13. En la misma manera el lado derecho de (1.32) da $tA_t\varepsilon M_\varepsilon x$. Eso comprueba (1.31).

Por (1.30) el lado derecho de (1.31) tiende a $A_t x$ cuando $\varepsilon \to 0$. Las definiciones de A_ε y $D(A)$ implican que $M_t x \in D(A)$. Otra vez usando (1.30), obtenemos que $D(A)$ es denso. Además,

$$AM_t x = A_t x \qquad \text{para todo } x \in X,\ t > 0. \tag{1.33}$$

Para demostrar que A es cerrado, sean $(x_n) \subseteq D(A)$, $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ en X. Para cualquier $z \in X$ calculamos

$$\begin{aligned} A_\varepsilon M_t z &= \frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon)M_t z - M_t z) \\ &= \frac{1}{t\varepsilon}\int_0^t \big(Q(\varepsilon)Q(s)z - Q(s)z\big)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{t\varepsilon}\int_0^t Q(s)(Q(\varepsilon)z - z)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)A_\varepsilon z\,\mathrm{d}s \\ &= M_t A_\varepsilon z, \end{aligned} \tag{1.34}$$

es decir, A_ε y M_t conmutan. Como $M_t z \in D(A)$, dejando $\varepsilon \to 0$ se tiene que

$$AM_t z = M_t Az \qquad \text{para todo } z \in D(A).$$

Usando (1.33) eso implica

$$A_t x_n = AM_t x_n = M_t Ax_n \qquad \text{para todo } t > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dejando $n \to \infty$ llegamos a

$$A_t x = M_t y, \tag{1.35}$$

considerando que A_t y M_t son operadores acotados. Dejando $t \to 0$ en (1.35), por (1.30) el lado derecho converge a y, es decir, $x \in D(A)$, $Ax = y$ y

$$A_t x = M_t Ax \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.36}$$

Entonces A es cerrado.

(d): Es obvio que A_ε y $Q(t)$ conmutan en X, para $\varepsilon > 0$ y $t \geq 0$. Si

$x \in D(A)$, dejando $\varepsilon \to 0$ en

$$A_\varepsilon Q(t)x = Q(t)A_\varepsilon x$$

muestra que $Q(t)x \in D(A)$, porque el lado derecho converge, y se tiene

$$AQ(t)x = Q(t)Ax \qquad \text{para todo } x \in D(A),\ t \geq 0. \tag{1.37}$$

Sea $x \in D(A)$. Calculemos la derivada por la derecha de $Q(t)x$:

$$\frac{1}{\varepsilon}(Q(t+\varepsilon)x - Q(t)x) = A_\varepsilon Q(t)x \to AQ(t)x = Q(t)Ax$$

cuando $\varepsilon \to 0+$, porque $Q(t)x \in D(A)$ y por (1.37). Falta ver que para $x \in D(A)$ y $t > 0$ existe la derivada por la izquierda de $Q(t)x$. Si $\varepsilon \in (0, t)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{-\varepsilon}&(Q(t-\varepsilon)x - Q(t)x)\\ &= Q(t-\varepsilon)(A_\varepsilon x - Ax) + Q(t-\varepsilon)Ax \to Q(t)Ax\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0+$. Eso sigue porque $\|Q\|$ es acotada en $[0, t]$, $x \in D(A)$ (esto hace que el primer término tiende a cero) y por la continuidad fuerte de Q en t. Entonces $Q(t)x$ es diferenciable y se cumple (1.24).

(e): Primero establecimos una cota para $\|\exp(tA_\varepsilon)\|$ que no depende de ε

para ε pequeño. Sean $t \geq 0$ y $\varepsilon \in (0, 1]$. Usando (1.23) y $\gamma \geq 0$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|\exp(tA_\varepsilon)\| &= \left\|\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - I)\right)\right\| \\
&= \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\left\|\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon)\right)\right\| \\
&\leq \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k\|Q(k\varepsilon)\| \\
&\leq C\mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}\right)^k \\
&= C\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon} - 1)\right) \\
&= C\exp\left(t\left(\gamma + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma^2 + \dots\right)\right) \\
&\leq C\exp(t(\mathrm{e}^{\gamma} - 1)).
\end{aligned} \tag{1.38}
$$

Fijamos $x \in D(A)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ y $t \geq 0$. Definimos una función $\varphi\colon [0, t] \to X$ por

$$\varphi(s) := \exp((t - s)A_\varepsilon)Q(s)x.$$

Por el Lema 1.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{sA_\varepsilon}y = \mathrm{e}^{sA_\varepsilon}A_\varepsilon y \tag{1.39}$$

para todo $y \in X$ y $s \geq 0$. El inciso (d) —aplicado a $Q(s)$— y (1.39) implican que φ es diferenciable y que

$$\varphi'(s) = \exp((t - s)A_\varepsilon)Q(s)(Ax - A_\varepsilon x). \tag{1.40}$$

Aquí hemos usado de nuevo que A_ε y $Q(s)$ conmutan. Notemos además que φ' es continua por la continuidad fuerte de Q. El inciso (a) y la ecuación (1.38) implican que existe una constante $K(t) \geq 0$ que sólo depende de t (continuamente) tal que

$$\|\varphi'(s)\| \leq K(t)\|Ax - A_\varepsilon x\| \qquad \text{para todo } s \in [0, t]. \tag{1.41}$$

Demostremos el teorema fundamental del cálculo para la función φ: para todo $\Lambda \in X'$ y $s \in [0, t]$ se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Lambda\varphi(s) = \Lambda\varphi'(s)$$

y entonces por la continuidad de φ'

$$\Lambda(\varphi(t) - \varphi(0)) = \Lambda\varphi(t) - \Lambda\varphi(0) = \int_0^t \Lambda\varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \Lambda\int_0^t \varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Eso da

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.42}$$

Usando que $\varphi(t) = Q(t)x$ y $\varphi(0) = \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x$, (1.42) y (1.41) implican

$$\|Q(t)x - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x\| \le \int_0^t \|\varphi'(s)\|\,\mathrm{d}s \le tK(t)\|Ax - A_\varepsilon x\| \quad \text{para todo } t \ge 0,\ x \in D(A), \varepsilon \in (0,1]. \tag{1.43}$$

Dejando $\varepsilon \to 0+$ obtenemos (1.26) para $x \in D(A)$.

Si $T \ge 0$ es fijo, el inciso (a) y (1.38) dicen que las normas de los operadores acotados $Q(t)$ y $\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}$ son uniformemente acotadas para $t \in [0, T]$ y $\varepsilon \in (0, 1]$, por alguna constante C. Por la continuidad de K podemos suponer que además $|tK(t)| \le C$ para $t \in [0, T]$. Sean $x \in X$ y $\delta > 0$. Escogemos $y \in D(A)$ tal que $2C\|x - y\| \le \delta/2$. Existe $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tal que

$$C\|Ay - A_\varepsilon y\| \le \delta/2$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Se sigue de (1.43) para tal ε y cualquier $t \in [0, T]$ que

$$\begin{aligned}
&\|Q(t)x - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x\| \\
&\qquad \le \|Q(t)[x - y]\| + \|(Q(t) - \mathrm{e}^{tA_\varepsilon})y\| + \|\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}[y - x]\| \\
&\qquad \le 2C\|x - y\| + tK(t)\|Ay - A_\varepsilon y\| \\
&\qquad \le \delta.
\end{aligned}$$

Eso muestra que $\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x \to Q(t)x$ cuando $\varepsilon \to 0$, uniformemente para $t \in [0, T]$.

(f): Para $x \in X$ y $0 \le T_1 \le T_2$ se tiene por el inciso (a) y por $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$ que

$$\left\| \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right\| \le C \int_{T_1}^{\infty} \mathrm{e}^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)t} \|x\| \,\mathrm{d}t \qquad (1.44)$$
$$\le \frac{C}{\operatorname{Re}(\lambda - \gamma)} \mathrm{e}^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)T_1} \|x\| \to 0$$

cuando $T_1 \to \infty$. Eso demuestra que está bien definido

$$\widetilde{R}(\lambda)x := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t := \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t.$$

Para $T_1 = 0$ y cualquier $x \in X$ (1.44) implica

$$\|\widetilde{R}(\lambda)x\| \le \frac{C}{\operatorname{Re}(\lambda - \gamma)} \|x\|.$$

Entonces $\widetilde{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

Por las definiciones de A_ε y $\widetilde{R}(\lambda)$ se tiene para $\varepsilon > 0$ y $x \in X$

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon \widetilde{R}(\lambda)x &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t+\varepsilon)x \,\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\varepsilon^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda (t-\varepsilon)} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} \int_\varepsilon^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \\
&\to \lambda \widetilde{R}(\lambda)x - x
\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Eso implica que $\widetilde{R}(\lambda)x \in D(A)$ y que

$$(\lambda I - A)\widetilde{R}(\lambda)x = x \qquad \text{para todo } x \in X. \qquad (1.45)$$

Por otro lado, si $x \in D(A)$ una aplicación del inciso (d) da

$$\widetilde{R}(\lambda)Ax = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)Ax \,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)x \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \right) \mathrm{d}t \\
&= -x + \lambda \widetilde{R}(\lambda)x.
\end{aligned}
$$

En la última igualdad aplicamos el teorema fundamental del cálculo, cuya validez ya hemos visto arriba. Llegamos a

$$
\widetilde{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x \qquad \text{para todo } x \in D(A). \tag{1.46}
$$

Como vimos antes, $\widetilde{R}(\lambda)(X) \subseteq D(A)$. Entonces (1.46) implica que $\widetilde{R}(\lambda)\colon X \to D(A)$ es suprayectiva, y junto con (1.45) obtenemos que

$$
\widetilde{R}(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda; A).
$$

Eso termina la demostración del inciso (f). □

Nota 1.21. La formula (1.27) se puede entender fácilmente si $Q(t) = \mathrm{e}^{at}$ para un $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda > a$. Entonces $a - \lambda < 0$ y por eso

$$
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{at} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(a-\lambda)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a-\lambda} \mathrm{e}^{(a-\lambda)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda - a}.
$$

La integral en (1.27) es la *transformada de Laplace* de $Q(t)x$.

Como el modelo de un semigrupo de operadores con generador infinitesimal A es e^{tA}, interesa saber como uno puede representar un C_0-semigrupo por su generador infinitesimal. Demostremos y mencionemos algunos resultados al respecto.

Teorema 1.22. *Sea $(Q(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en el espacio de Banach X con generador infinitesimal A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $D(A) = X$,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \| Q(\varepsilon) - I \| = 0$,

(iii) $A \in \mathcal{L}(X)$ *y* $Q(t) = \mathrm{e}^{tA}$ *para* $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Demostración. **(i) implica (ii):** Sea A_ε definido como en el Teorema 1.19(e). El teorema de la acotación uniforme da que $\|A_\varepsilon\|$ es acotada uniformemente para ε pequeño, porque $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x$ existe para todo $x \in X$. En seguida, $\|Q(\varepsilon) - I\| = \varepsilon\|A_\varepsilon\| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

(ii) implica (iii): Recordemos la notación

$$M_t x = \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)x \, \mathrm{d}s \qquad \text{para todo } x \in X$$

de la demostración del Teorema 1.19. Se cumple

$$\|M_t x - x\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|Q(s) - I\| \, \|x\| \, \mathrm{d}s \leq \max_{s\in[0,t]} \|Q(s) - I\| \, \|x\|,$$

es decir,

$$\|M_t - I\| \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0, \tag{1.47}$$

por la hipótesis del inciso (ii). Fijemos $t > 0$ tan chico que M_t es invertible en $\mathcal{L}(X)$ (por la serie de Neumann). Por (1.31) y (1.34) tenemos que $M_t A_\varepsilon = A_t M_\varepsilon$ y entonces

$$A_\varepsilon = M_t^{-1} A_t M_\varepsilon \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0. \tag{1.48}$$

Para todo $x \in X$ (1.30) dice que $\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon x = x$. En seguida, (1.48) y $M_t^{-1} A_t \in \mathcal{L}(X)$ implican que $A_\varepsilon x$ converge para todo $x \in X$, es decir, $D(A) = X$. Como A es cerrado, $A \in \mathcal{L}(X)$. Usamos (1.36) y (1.47) y obtenemos que

$$\|A_\varepsilon - A\| \leq \|M_t^{-1} A_t\| \, \|M_\varepsilon - I\| \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

En seguida, $\|A_\varepsilon\| \leq 2\|A\|$ para ε suficientemente chico. El inciso (d) del Teorema 1.19 implica que A y $Q(\varepsilon)$ y luego A y A_ε conmutan para $\varepsilon > 0$. Estos hechos y el Lema 1.2 muestran que

$$\|\mathrm{e}^{tA_\varepsilon} - \mathrm{e}^{tA}\| \leq \exp(2\|A\|)\|A_\varepsilon - A\| \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Por el inciso (e) del Teorema 1.19 obtenemos que

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{e}^{tA_\varepsilon} x = \mathrm{e}^{tA} x$$

para todo $x \in X$.

Que (iii) implica (i) es trivial. $\square$

Teorema 1.23 (Hille-Yosida)**.** *Un operador cerrado y densamente definido A en un espacio de Banach X es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $(Q(t))_{t\geq 0}$ con la propiedad $\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t}$ con constantes $C \geq 1$ y $\gamma \geq 0$ si y sólo si se cumple*

$$\text{(1.49)} \quad \lambda \in \rho(A) \quad \text{y} \quad \|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq C(\lambda - \gamma)^{-m} \qquad \textit{para todo } \lambda > \gamma,\ m \in \mathbb{N}.$$

En ese caso sea

$$\mathrm{Yos}(\varepsilon; A) := A(I - \varepsilon A)^{-1} \qquad \textit{para } \varepsilon \in (0, 1/\gamma)$$

la ε-aproximación de Yosida *de A. Se tiene*

$$\text{(1.50)} \qquad \mathrm{Yos}(\varepsilon; A) \in \mathcal{L}(X), \qquad \textit{para todo } \varepsilon \in (0, 1/\gamma),$$

$$\text{(1.51)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathrm{Yos}(\varepsilon; A)x = Ax, \qquad \textit{para todo } x \in D(A),$$

$$\text{(1.52)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \exp(t\,\mathrm{Yos}(\varepsilon; A))x = Q(t)x, \qquad \textit{para todo } x \in X,\ t \geq 0.$$

Demostración. Primero sea A el generador infinitesimal de $(Q(t))_{t\geq 0}$. Escogemos C y γ como en el Teorema 1.19. Por el Teorema 1.19(f) sabemos que para $\lambda > \gamma$ se tiene $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\text{(1.53)} \qquad R(\lambda; A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in X$. Afirmamos que

$$\text{(1.54)} \quad R(\lambda; A)^m x = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty t^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in X,\ m \in \mathbb{N}.$$

Para demostrar esa afirmación por inducción, sean $\Omega_1 := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y

$$\Omega_2 := \{(u, v) \in \Omega_1 \mid u \leq v\}.$$

Definimos el difeomorfismo $\Phi\colon \Omega_2 \to \Omega_1$ por $\Phi(u,v) = (u, v-u)$. Se cumple

$$\mathrm{D}\Phi(u,v) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$|\det \mathrm{D}\Phi(u,v)| = 1 \qquad \text{para todo } (u,v) \in \Omega_2. \tag{1.55}$$

Suponemos que (1.54) se cumple para un $m \in \mathbb{N}$. Sean $x \in X$ y $\Lambda \in X'$. Como $\lambda > \gamma$, la función

$$(s,t) \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} \Lambda Q(s+t) s^{m-1} x$$

es un elemento de $L^1(\Omega_1)$, por la cota (1.23). Aplicamos (1.53), la transformación de variables de integración $(s,t) = \Phi(u,v)$, (1.55) y el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\Lambda R(\lambda; A)^{m+1} x &= \Lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t) \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty s^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda s} Q(s) x \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \int_{\Omega_1} s^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} \Lambda Q(s+t) x \,\mathrm{d}(s,t) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \int_{\Omega_2} u^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda v} \Lambda Q(v) x \,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda v} \Lambda Q(v) x \int_0^v u^{m-1} \,\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{m!} \int_0^\infty v^m \mathrm{e}^{-\lambda v} \Lambda Q(v) x \,\mathrm{d}v \\
&= \Lambda \frac{1}{m!} \int_0^\infty v^m \mathrm{e}^{-\lambda v} Q(v) x \,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Como $\Lambda \in X'$ era arbitrario, obtenemos

$$R(\lambda; A)^{m+1} x = \frac{1}{m!} \int_0^\infty v^m \mathrm{e}^{-\lambda v} Q(v) x \,\mathrm{d}v.$$

Junto con (1.53) (el caso $m = 1$) eso comprueba (1.54).

Obtenemos de (1.54) que

$$\|R(\lambda; A)^m\| \le \frac{C}{(m-1)!}\int_0^\infty t^{m-1}\mathrm{e}^{(\gamma-\lambda)t}\,\mathrm{d}t = C(\lambda-\gamma)^{-m},$$

haciendo $m-1$ integraciones parciales y una integración final.

Inversamente, sea A densamente definido tal que existen C, γ con (1.49). Ponemos $S(\varepsilon) := (I-\varepsilon A)^{-1}$ y $\varepsilon_0 := 1/\gamma$. En seguida, (1.49) implica

$$\|S(\varepsilon)^m\| \le C(1-\varepsilon\gamma)^{-m} \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ m \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Además, tenemos

$$(I-\varepsilon A)S(\varepsilon)x = x = S(\varepsilon)(I-\varepsilon A)x, \tag{1.57}$$

donde la primera igualdad vale para $x \in X$ y la segunda para $x \in D(A)$.

La ecuación (1.56) para $m = 1$ implica que $\|S(\varepsilon)\|$ es acotada uniformemente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/2)$. Si $x \in D(A)$ entonces $x - S(\varepsilon)x = -\varepsilon S(\varepsilon)Ax \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, es decir, $\lim_{\varepsilon\to 0+} S(\varepsilon)x = x$ para todo $x \in D(A)$. Como $\|S(\varepsilon)\|$ queda acotado cuando $\varepsilon \to 0$ y $D(A)$ es denso, obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} S(\varepsilon)x = x \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{1.58}$$

Notemos que $S(\varepsilon)\colon X \to D(A)$ y que (1.57) además implica que $S(\varepsilon)Ax = AS(\varepsilon)x$ para todo $x \in D(A)$. En seguida

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{Yos}(\varepsilon; A)x = \lim_{\varepsilon\to 0+} AS(\varepsilon)x = \lim_{\varepsilon\to 0+} S(\varepsilon)Ax = Ax$$

para $x \in D(A)$, es decir, se cumple (1.52). Tenemos por (1.57)

$$AS(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(S(\varepsilon) - I) \in \mathcal{L}(X) \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{1.59}$$

comprobando (1.50). Además, está bien definido

$$T(t, \varepsilon) := \exp(tAS(\varepsilon)) = \exp(t\,\mathrm{Yos}(\varepsilon; A)).$$

Afirmamos que

$$\|T(\varepsilon, t)\| \le C\exp\left(\frac{\gamma t}{1-\varepsilon\gamma}\right) \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ t > 0. \tag{1.60}$$

Para demostrar eso usemos (1.59):

$$\begin{aligned}
\|T(\varepsilon,t)\| &= \left\|\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}S(\varepsilon)\right)\right\| \\
&\leq \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k\|S(\varepsilon)^k\| \\
&\leq C\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k(1-\varepsilon\gamma)^{-k} \\
&= C\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}(1-\varepsilon\gamma)^{-1}\right) \\
&= C\exp\left(\frac{t\gamma}{1-\varepsilon\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Para demostrar la convergencia de $T(t,\varepsilon)x$ cuando $\varepsilon\to 0+$, notemos primero que $T(t,\delta)^{-1}=\mathrm{e}^{-tAS(\delta)}$. En consecuencia, para $x\in D(A)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T(t,\varepsilon)T(t,\delta)^{-1}x)=T(t,\varepsilon)T(t,\delta)^{-1}(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax.$$

Después de una integración de 0 a t y la aplicación de $T(t,\delta)$ obtenemos (usando que A, $S(\varepsilon)$, $S(\delta)$, $T(t,\varepsilon)$ y $T(t,\delta)$ conmutan dos a dos)

$$T(t,\varepsilon)x-T(t,\delta)x=\int_0^t T(u,\varepsilon)T(t-u,\delta)(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax\,\mathrm{d}u.$$

Poniendo $\bar{\varepsilon}:=\max\{\varepsilon,\delta\}$ calculamos con (1.60) y (1.58):

$$\begin{aligned}
\|T(t,\varepsilon)x-T(t,\delta)x\| &\leq \int_0^t\|T(u,\varepsilon)T(t-u,\delta)(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax\|\,\mathrm{d}u \\
&\leq C^2\int_0^t\exp\left(\frac{\gamma u}{1-\bar{\varepsilon}\gamma}\right)\exp\left(\frac{\gamma(t-u)}{1-\bar{\varepsilon}\gamma}\right)\|(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax\|\,\mathrm{d}u \\
&= C^2t\exp\left(\frac{\gamma t}{1-\bar{\varepsilon}\gamma}\right)\|(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax\| \\
&\to 0 \qquad\qquad \text{cuando } \bar{\varepsilon}\to 0.
\end{aligned}$$

Eso implica que existe el límite

$$Q(t)x:=\lim_{\varepsilon\to 0}T(t,\varepsilon)x \tag{1.61}$$

para todo $x \in D(A)$, y la convergencia es localmente uniforme en t. La ecuación (1.60) implica que $\|T(t,\varepsilon)\|$ es acotada uniformemente para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0/2)$ y t en intervalos acotados. Como $D(A)$ es denso en X, el límite en (1.61) existe pata todo $x \in X$ y la convergencia es localmente uniforme en t, para x fijo.

La misma acotación uniforme de $T(t,\varepsilon)$ implica por la definición de Q y porque $T(\varepsilon,t)$ es un semigrupo que también Q es un semigrupo:

$$\begin{aligned}
&\|Q(t)Q(s)x - T(t+s,\varepsilon)x\| \\
&\qquad = \|Q(t)Q(s)x - T(t,\varepsilon)T(s,\varepsilon)x\| \\
&\qquad \leq \|(Q(t)-T(t,\varepsilon))Q(s)x\| + \|T(t,\varepsilon)\|\,\|Q(s)x - T(s,\varepsilon)x\| \\
&\qquad \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

y

$$T(t+s,\varepsilon)x \to Q(t+s)x \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Como para todo $x \in X$ el mapeo $t \mapsto Q(t)x$ es un límite localmente uniforme en t de los mapeos continuos $T(t,\varepsilon)x$, también $Q(t)x$ depende de t continuamente. Estos hechos comprueban que $(Q(t))_{t\geq 0}$ forma un C_0-semigrupo en X.

Sea $\widetilde{A}$ el generador infinitesimal de Q. Necesitamos demostrar que $\widetilde{A} = A$. Sea $x \in D(A)$. Aplicando Teorema 1.19(d) al semigrupo $T(t,\varepsilon)$ obtenemos

$$(1.62) \qquad Q(t)x - x = \lim_{\varepsilon\to 0} T(t,\varepsilon)x - x = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_0^t T(s,\varepsilon)S(\varepsilon)Ax\,\mathrm{d}s.$$

La cota (1.60) y la convergencia (1.61), que son localmente uniformes en t, implican que

$$\begin{aligned}
&\|T(s,\varepsilon)S(\varepsilon)Ax - Q(s)Ax\| \\
&\qquad \leq \|T(s,\varepsilon)\|\,\|S(\varepsilon)Ax - Ax\| + \|T(s,\varepsilon)Ax - Q(s)Ax\| \\
&\qquad\qquad \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

uniformemente en $[0,t]$. En seguida, (1.62) implica que

$$Q(t)x - x = \int_0^t Q(s)Ax\,\mathrm{d}s = tM_tAx \qquad \text{para todo } x \in D(A).$$

Aquí M_t está definido como en la demostración del Teorema 1.19. Definiendo $\widetilde{A}_t x$ como en el Teorema 1.19, eso da

$$\widetilde{A}_t x = \frac{Q(t)x - x}{t} = M_t A x \to Ax \qquad \text{cuando } t \to 0.$$

Por lo tanto, $x \in D(\widetilde{A})$ y $\widetilde{A}x = Ax$ para todo $x \in D(A)$, es decir, $A \subseteq \widetilde{A}$.

Mostremos que

$$\text{(1.63)} \qquad \|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t} \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Sea $x \in X$. Usando (1.60) y (1.61) se sigue que

$$\|Q(t)x\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \|T(t,\varepsilon)x\| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} C \exp\left(\frac{\gamma t}{1 - \varepsilon\gamma}\right)\|x\| = C\mathrm{e}^{\gamma t}\|x\|.$$

Tomar el supremo sobre todo $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ implica (1.63).

Sea $\lambda > \gamma$. La ecuación (1.63), el Teorema 1.19 y la hipótesis del actual teorema implican que $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A})$. Entonces

$$(\lambda I - \widetilde{A})(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X,$$

es decir,

$$D(\widetilde{A}) = (\lambda I - \widetilde{A})^{-1}(X) = D(A)$$

y $\widetilde{A} = A$. □

Corolario 1.24. *En la situación del Teorema* 1.23 *se cumple*

$$\text{(1.64)} \quad \lambda \in \rho(A) \quad \text{y} \quad \|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq C(\operatorname{Re}\lambda - \gamma)^{-m} \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda > \gamma.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene para todo $x \in X$, usando (1.27):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} R(\lambda; A)x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty -t\mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Por inducción eso implica

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in X,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.65}$$

Por otro lado la holomorfía de la resolvente en (1.6) implica

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Comparando esto con (1.65) obtenemos

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia

$$\|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{C}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{(\gamma - \mathrm{Re}\,\lambda)t} \|x\| \,\mathrm{d}t = \frac{C}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \gamma)^n} \|x\|.$$

$\square$

Ejemplo 1.25. Consideremos el operador $A := \Delta$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$ con dominio

$$H^2(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^1_{\mathrm{loc}} \mid \mathrm{D}^k u \in L^2,\ k = 0, 1, 2\}. \tag{1.66}$$

Aquí $\mathrm{D}^k u$ denota el conjunto de las k-ésimas derivadas parciales débiles de u. Entonces A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo Q en $L^2(\mathbb{R}^N)$ cuyas órbitas son soluciones de (1.66). Para $N = 1$, $u_0 \in L^2$ y $u(\cdot, t) = Q(t)u_0$ se tiene la representación

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) \,\mathrm{d}y.$$

El espectro del generador $A = \Delta$ es $(-\infty, 0]$.

Ejemplo 1.26. Consideremos la ecuación

$$\partial_t^2 u(x,t) = \Delta u(x,t). \tag{1.67}$$

Primero hay que transformarla en un sistema de ecuaciones del orden uno en t, como se hace para ecuaciones ordinarias. Escribimos

$$U := \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$$

y

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos escribir (1.67) como $\partial_t U = AU$. Considerando A como operador en el espacio de Hilbert $H^1 \times L^2$, con dominio $H^2 \times H^1$, se sigue que A es el generador de un C_0-semigrupo cuyas órbitas son soluciones de (1.67). El espectro de A es $\mathrm{i}\mathbb{R}$. Eso se ve así heurísticamente:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda I & -I \\ -\Delta & \lambda I \end{pmatrix}$$

no es invertible continuamente si y sólo si la determinante

$$\lambda^2 I - \Delta$$

no es invertible continuamente, es decir, si y sólo si $\lambda^2 \in \sigma(\Delta) = \mathbb{R}_0^-$. Eso es equivalente a que $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.27. Consideramos

$$\mathrm{i}\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t). \tag{1.68}$$

Ahora se toma $A := -\mathrm{i}\Delta$. Resulta que A genera un C_0-semigrupo en L^2 cuyas órbitas son soluciones de (1.68). En este caso el espectro de A es $\mathrm{i}\mathbb{R}_0^+$.

Definición 1.28. Un semigrupo $(Q(t))_{t\geq 0}$ es *uniformemente acotado* si $\|Q(t)\| \leq C$ para todo $t \geq 0$, con $C \geq 1$. Un semigrupo uniformemente acotado es un *semigrupo de contracciones* si $C = 1$ en la situación anterior.

Corolario 1.29. *Un operador A densamente definido en un espacio de Banach X es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $(Q(t))_{t\geq 0}$ de contracciones si y sólo si se cumple*

$$\lambda \in \rho(A) \qquad y \qquad \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{1.69}$$

Demostración. La necesidad de (1.69) es obvia por el Teorema 1.23. Inversamente, sea cierta la ecuación (1.69). Para todo $\lambda > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda; A)^m\| \leq \|R(\lambda; A)\|^m \leq \frac{1}{\lambda^m}.$$

Entonces el Teorema 1.23 implica que A es el generador infinitesimal de un semigrupo $(Q(t))$ que cumple $\|Q(t)\| \leq 1$, es decir, de un semigrupo de contracciones. □

Sea $(Q(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semigrupo tal que $\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t}$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ también $T(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} Q(t)$ es un C_0-semigrupo. Como

$$\frac{T(\varepsilon)x - x}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} - 1}{\varepsilon} Q(\varepsilon)x + \frac{Q(\varepsilon)x - x}{\varepsilon} \to (\lambda I + A)x$$

cuando $\varepsilon \to 0$ para todo $x \in D(A)$, $\lambda I + A$ es el generador infinitesimal de $T(t)$. Si $\lambda \leq -\gamma$, entonces T es uniformemente acotado.

Definición 1.30. Para un semigrupo fuertemente continuo $(Q(t))$ con generador infinitesimal A definimos el *tipo exponencial*

$$(1.70) \quad \omega(A) := \omega(Q) := \operatorname{ínf}\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists C \geq 1\ \forall t \geq 0 \colon \|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\omega t}\}.$$

Definimos la *cota espectral* $\mathrm{ce}(A)$ de A por

$$(1.71) \qquad \mathrm{ce}(A) := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Lema 1.31. *En la situación de la Definición* 1.30 *se tiene* $\mathrm{ce}(A) \leq \omega(A)$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega(A)$ y escogemos $\gamma \in (\omega(A), \mathrm{Re}\,\lambda)$. Por la definición de $\omega(A)$ existe $C \geq 1$ tal que $\|Q(t)\| \leq C\mathrm{e}^{\gamma t}$ para todo $t \geq 0$. Por el Corolario 1.24, $\lambda \in \rho(A)$. Eso muestra que $[\mathrm{Re}\,\lambda > \omega(A)] \subseteq \rho(A)$ y luego $[\mathrm{Re}\,\lambda \leq \omega(A)] \supseteq \sigma(A)$. La afirmación es una consecuencia inmediata. □

Otra situación donde podemos representar un semigrupo como la exponencial de su generador es la de operadores normales. No la necesitaremos a lo largo de este curso. Por lo tanto solamente anotaremos ese hecho sin demostración.

Nota 1.32. Sea $Q(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Hilbert H, y sea A su generador infinitesimal. Entonces $Q(t)$ es normal para todo $t \geq 0$ si y sólo si A es normal. Para una demostración de ese hecho véase [16, Teorema 13.38]. En ese caso se tiene la representación $Q(t) = \mathrm{e}^{At}$ usando el cálculo funcional. Como $\mathrm{ce}(A) < \infty$ por el Lema 1.31, la función $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ es acotada en $\sigma(A)$. Eso es consistente con que $Q(t)$ es un operador acotado.

En el caso particular de que cada $Q(t)$ es un operador unitario, entonces existe un operador autoadjunto L en H tal que $A = \mathrm{i}L$. Esa es la *representación de Stone* de semigrupos unitarios.

Necesitaremos información respecto al dominio de potencias de generadores infinitesimales.

Proposición 1.33. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $(Q(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en X.*

Demostración. Para $x \in X$ y $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ (las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son diferenciables infinitas veces y tienen soporte compacto en $\mathbb{R}^+$) definimos

$$\kappa(x, \varphi) := \int_0^{\infty} \varphi(s) Q(s) x \, \mathrm{d}s \in X.$$

Si $\varepsilon > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - I)\kappa(x, \varphi) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \varphi(s)(Q(s+\varepsilon)x - Q(s)x) \, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}(\varphi(s-\varepsilon) - \varphi(s)) Q(s) x \, \mathrm{d}s \\
&\to - \int_0^{\infty} \varphi'(s) Q(s) x \, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0$, porque la convergencia del integrando es uniforme en $s \in \mathbb{R}_0^+$. Eso demuestra que $\kappa(x, \varphi) \in D(A)$ y

$$A\kappa(x, \varphi) = - \int_0^{\infty} \varphi'(s) Q(s) x \, \mathrm{d}s = \kappa(x, -\varphi').$$

Como también $\varphi' \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, por inducción obtenemos que $\kappa(x, \varphi) \in D(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Eso demuestra

$$\{\kappa(x, \varphi) \mid x \in X,\ \varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n). \tag{1.72}$$

Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ no fuera denso en X entonces existiría $\Lambda \in X'\backslash\{0\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \subseteq \mathcal{N}(\Lambda)$, por el teorema de Hahn-Banach. Se seguiría por (1.72) que

$$\int_0^\infty \varphi(s)\Lambda Q(s)x\,\mathrm{d}s = \Lambda \int_0^\infty \varphi(s)Q(s)x\,\mathrm{d}s = \Lambda\kappa(x,\varphi) = 0$$

para todo $x \in X$ y $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Por lo tanto, la función continua $s \mapsto \Lambda Q(s)x$ sería idénticamente cero en $\mathbb{R}^+$ para todo $x \in X$. Por continuidad en $s = 0$, $\Lambda x = 0$ para todo $x \in X$, es decir, $\Lambda = 0$, una contradicción. $\square$

1.3 Semigrupos diferenciables y analíticos

Recordemos que si Q es un C_0-semigrupo con generador infinitesimal A entonces $t \mapsto Q(t)x$ es diferenciable en $[0, \infty)$ para todo $x \in D(A)$, por el Teorema 1.19(d).

Definición 1.34. Sea Q un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X. Si $t \mapsto Q(t)x$ es diferenciable en $(0, \infty)$ para todo $x \in X$ entonces Q se llama *diferenciable*.

Nota 1.35. Si Q es un C_0-semigrupo diferenciable con generador infinitesimal A y si además $t \mapsto Q(t)x$ es diferenciable en 0 para todo $x \in X$, entonces existe

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} Q(t)x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{Q(\varepsilon)x - x}{\varepsilon}$$

para todo $x \in X$, es decir, $D(A) = X$. Como A es cerrado, A es acotado.

Si A es un operador lineal, entonces denotemos

$$D(A^\infty) := \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n). \tag{1.73}$$

Teorema 1.36. *Sea Q un C_0-semigrupo en un espacio de Banach X, con generador infinitesimal A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Q es diferenciable,*

(ii) *$Q(t)(X) \subseteq D(A)$ para todo $t > 0$.*

Si Q es diferenciable, entonces $Q\colon (0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ es diferenciable infinitas veces y $Q(t)(X) \subseteq D(A^\infty)$ para todo $t > 0$. Además,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n A^k Q(t) = A^{k+n} Q(t) \qquad \textit{para todo } t > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.74}$$

Demostración. Primero supongamos (i). Sean $t > 0$ y $x \in X$. Entonces existe el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{Q(t+\varepsilon)x - Q(t)x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{Q(\varepsilon)Q(t)x - Q(t)x}{\varepsilon},$$

es decir, $Q(t)x \in D(A)$.

Inversamente, sea cierto (ii). Si $t > 0$ y $x \in X$, escogemos $\varepsilon \in (0,t)$. Entonces $Q(t-\varepsilon)x \in D(A)$, y el Teorema 1.19(d) implica que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} Q(s)x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=\varepsilon} Q(s)Q(t-\varepsilon)x = AQ(\varepsilon)Q(t-\varepsilon)x = AQ(t)x.$$

En seguida, Q es diferenciable y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t)x = AQ(t)x \qquad \text{para todo } t > 0,\ x \in X. \tag{1.75}$$

Para demostrar las propiedades restantes, sea Q diferenciable. Primero afirmamos que

$$Q(t)(X) \subseteq D(A^\infty) \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.76}$$

Ya demostramos que $Q(t)(X) \subseteq D(A)$. Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se sabe que $Q(t)(X) \subseteq D(A^n)$, entonces para todo $x \in X$

$$A^n Q(t)x = Q(t/2)A^n Q(t/2)x \in D(A),$$

es decir, $Q(t)(X) \subseteq D(A^{n+1})$. Por inducción obtenemos (1.76).

Si $x \in X$, $t > 0$ y $\varepsilon \in (0,t)$, entonces por (1.76) $Q(\varepsilon)x \in D(A^\infty)$. Se sigue que $t \mapsto Q(t)x = Q(t-\varepsilon)Q(\varepsilon)x$ tiene derivada $AQ(t)x = AQ(t-\varepsilon)Q(\varepsilon)x = Q(t-\varepsilon)AQ(\varepsilon)x$. Ella es diferenciable otra vez, con derivada $Q(t-\varepsilon)A^2Q(\varepsilon)x = A^2Q(t)x$. Inductivamente se tiene que $t \mapsto A^kQ(t)x$ es diferenciable infinitas veces en $(0,\infty)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y que se cumple

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n A^k Q(t)x = A^{k+n} Q(t)x \qquad \text{para todo } x \in X,\ t > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.77}$$

Particularmente, todas estas funciones son continuas en $(0, \infty)$.

Luego afirmamos para $n \in \mathbb{N}_0$ que

$$A^n Q(t) \in \mathcal{L}(X) \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.78}$$

El caso $n = 0$ es una consecuencia de la definición de un C_0-semigrupo. Sea (1.78) cierto para un $n \in \mathbb{N}_0$. Consideremos sucesiones $x_k \to x$ y $A^{n+1} Q(t)x_k \to y$ convergentes en X. Como $A^n Q(t)$ es acotado, $A^n Q(t)x_k$ converge a $A^n Q(t)x$ en X. Como A es cerrado y $A(A^n Q(t)x_k) \to y$ convergente, $y = A^{n+1} Q(t)x$. Eso demuestra que $A^{n+1} Q(t)$ es cerrado. La ecuación (1.76) implica que $D(A^{n+1} Q(t)) = X$, es decir, $A^{n+1} Q(t)$ es acotado, por el teorema de la gráfica cerrada. Eso comprueba (1.78) por inducción.

Necesitamos demostrar que

$$t \mapsto A^n Q(t) \text{ es continuo en } (0, \infty) \tag{1.79}$$

respecto a la norma en $\mathcal{L}(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Fijamos $n \in \mathbb{N}_0$ y $0 < \tau_1 < \tau_2$. Ya sabemos que $A^{n+1} Q(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t > 0$. Como $t \mapsto A^{n+1} Q(t)$ es un mapeo fuertemente continuo, $M := \sup_{t \in [\tau_1, \tau_2]} \|A^{n+1} Q(t)\| < \infty$.

Para $x \in X$ y $\tau_1 \le t_1 \le t_2 \le \tau_2$ se tiene, por la continuidad de $s \mapsto A^{n+1} Q(s)x$ en $(0, \infty)$ y por (1.77)

$$A^n Q(t_2)x - A^n Q(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} A^{n+1} Q(s)x \,\mathrm{d}s \tag{1.80}$$

y entonces

$$\|A^n Q(t_2)x - A^n Q(t_1)x\| \le M\|x\|(t_2 - t_1).$$

Esta ecuación implica

$$\|A^n Q(t_2) - A^n Q(t_1)\| \le M(t_2 - t_1),$$

es decir, (1.79).

Finalmente hay que demostrar que $t \mapsto A^n Q(t)$ es diferenciable respecto a la norma en $\mathcal{L}(X)$. La ecuación (1.80) implica para $n \in \mathbb{N}$ que

$$A^n Q(t) = A^n Q(t_1) + \int_{t_1}^{t} A^{n+1} Q(s)\, \mathrm{d}s$$

para $0 < t_1 \leq t$. Por la continuidad del integrando como mapeo $[\tau_1, \tau_2] \to \mathcal{L}(X)$, esta expresión es diferenciable en t y la derivada es $A^{n+1}Q(t)$. Esto comprueba (1.74). $\square$

Lema 1.37. *Sea Q un C_0-semigrupo diferenciable en un espacio de Banach X con generador infinitesimal A. Entonces*

$$(1.81)\quad Q^{(n)}(t) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n Q(t) = \left(AQ\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(Q'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Para $n = 1$ esto está incluido en las afirmaciones del Teorema 1.36. Si (1.81) es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, y si $t \geq s$, entonces

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(t) = \left(AQ\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n &= \left(AQ\left(\frac{t-s}{n}\right)Q\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n \\ &= Q\left(\frac{t-s}{n}\right)^n \left(AQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = Q(t-s)\left(AQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

Derivar por t en ambos lados de esta igualdad implica

$$Q^{(n+1)}(t) = AQ(t-s)\left(AQ\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

Remplazar s por $nt/(n+1)$ demuestra (1.81). $\square$

Introducimos la siguiente notación:

$$(1.82)\qquad \Sigma(\alpha) := \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid |\mathrm{Arg}(z)| < \alpha\}$$

para $\alpha \in (0, \pi]$. Aquí Arg es la rama principal del argumento, es decir, la rama que toma valores en $(-\pi, \pi)$. Entonces $\Sigma(\alpha)$ es un sector abierto en $\mathbb{C}$ que contiene a $(0, \infty)$. Ponemos además

$$(1.83)\qquad \Sigma(\alpha; \gamma) := \gamma + \Sigma(\alpha)$$

si $\gamma \in \mathbb{C}$.

Definición 1.38. Sean X un espacio de Banach complejo, $\beta \in (0, \pi]$ y $Q : \Sigma(\beta) \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$ un mapeo que cumple

(i) Q es analítico en $\Sigma(\beta)$,

(ii) $Q(0) = I$ y
$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma(\beta)}} Q(z)x = x$$
para todo $x \in X$,

(iii) $Q(z_1 + z_2) = Q(z_1)Q(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \Sigma(\beta)$.

Entonces Q se llama un C_0-*semigrupo analítico de operadores acotados*.

Nota 1.39. La restricción de un C_0-semigrupo analítico a $\mathbb{R}_0^+$ es un C_0-semigrupo. Si un C_0-semigrupo Q tiene una extensión a un sector $\Sigma(\beta) \cup \{0\}$ con $\beta \in (0, \pi]$ que es analítica en $\Sigma(\beta)$ y tal que $Q(z) \to I$ fuertemente cuando $z \to 0$ en $\Sigma(\beta)$, entonces esa extensión es un C_0-semigrupo analítico, por continuación única de funciones analíticas. Diremos en ese caso que Q es un C_0-semigrupo analítico.

Proposición 1.40. *Sea A un operador lineal cerrado en un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) *Existen $\gamma \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que*

$$\lambda \in \rho(A) \qquad y \qquad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \gamma|} \quad \textit{para todo } \lambda \in [\operatorname{Re} \mu > \gamma]. \tag{1.84}$$

(ii) *Existen $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ y $M > 0$ tales que*

$$\lambda \in \rho(A) \qquad y \qquad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \gamma|} \quad \textit{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha; \gamma). \tag{1.85}$$

(iii) *Existen $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ y $M > 0$ tales que*

$$\text{(1.86)} \quad \lambda \in \rho(A) \qquad y \qquad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \textit{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha; \gamma).$$

Demostración. **(i) implica (ii):** Si Re $\lambda_0 > \gamma$ entonces $\lambda_0 \in \rho(A)$. Si además $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{|\lambda_0 - \gamma|}{2M} \leq \frac{1}{2\|R(\lambda_0; A)\|},$$

entonces por la discusión en sección 1.1 $\lambda \in \rho(A)$, y (1.2) implica que

$$\text{(1.87)} \qquad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|^{-1} - |\lambda - \lambda_0|} \leq \frac{1}{\frac{|\lambda_0 - \gamma|}{M} - |\lambda - \lambda_0|}.$$

En consecuencia, con

$$\alpha := \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{2M}\right)$$

se sigue que $\Sigma(\alpha; \gamma) \subseteq \rho(A)$.

Sea $\lambda = \gamma - \sigma + i\tau \in \Sigma(\alpha; \gamma)$ tal que $\sigma \geq 0$ y $\tau \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Eso implica que $\sigma \leq |\tau|/(2M)$. Con $\lambda_0 := \gamma + i\tau$ la continuidad de la resolvente y (1.87) implican que

$$\|R(\lambda; A)\||\lambda - \gamma| \leq \frac{\sigma + |\tau|}{\frac{|\tau|}{M} - \sigma} \leq \frac{(1 + \frac{1}{2M})|\tau|}{\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{2M}\right)|\tau|} = 1 + 2M.$$

Junto con (1.84) eso implica que

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1 + 2M}{|\lambda - \gamma|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha; \gamma).$$

(ii) implica (iii): Dado γ, α y M tal que se cumple (1.85) escogemos $\gamma' > \gamma$ y definimos

$$M' := \sup_{\lambda \in \Sigma(\alpha; \gamma')} \frac{M(1 + |\lambda|)}{|\lambda - \gamma|} < \infty.$$

Entonces se cumple (1.86) con M' y γ' en vez de M y γ.

(iii) implica (i): Suponiendo (1.86) definimos

$$M' := \sup_{\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)} \frac{M|\lambda - \gamma|}{1 + |\lambda|} < \infty.$$

Entonces se cumple (1.84) con M' en vez de M. □

Definición 1.41. Un operador A lineal cerrado y densamente definido en un espacio de Banach X es un *operador sectorial* si existen $\gamma \in \mathbb{R}$, $M > 0$ y $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ tales que

$$\Sigma(\alpha;\gamma) \subseteq \rho(A) \tag{1.88}$$

y

$$\|R(\lambda; A)\| \le \frac{M}{|\lambda - \gamma|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma). \tag{1.89}$$

La conexión entre operadores sectoriales y semigrupos analíticos es la siguiente:

Teorema 1.42. *Sea A un operador lineal en un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(i) *A es sectorial.*

(ii) *A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo Q diferenciable que cumple*

$$\limsup_{t \to 0+} \|AQ(t)\| t < \infty. \tag{1.90}$$

(iii) *A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo analítico.*

En ese caso, es decir, si A es sectorial, se tiene

$$\mathrm{ce}(A) = \omega(A). \tag{1.91}$$

Si $\mathrm{ce}(A) < 0$ *entonces*

$$\sup_{t>0} \|Q(t)\| < \infty \qquad y \qquad \sup_{t>0} t\|AQ(t)\| < \infty. \tag{1.92}$$

Demostración. **(i) implica (ii):** Sean $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ tales que $\Sigma(\alpha; \gamma) \subseteq \rho(A)$, y sea $M > 0$ tal que se cumple (1.89).

Primero demostremos (ii) bajo la hipótesis que $\gamma < 0$. Sean $\Gamma^{\pm} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ dados por

$$\Gamma^{\pm}(s) := s\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha},$$

y sea $\Gamma := \Gamma^+ - \Gamma^-$, entendido como una cadena de caminos de integración en $\mathbb{C}$. Si

$$|\Gamma| := \{\Gamma(s) \mid s \in \mathbb{R}\}, \tag{1.93}$$

entonces $|\Gamma| \subseteq \rho(A)$.

Sean $\delta > 0$ y $t \geq \delta$. Tenemos $\cos\alpha < 0$ y entonces

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{\Gamma^+(s)t} R(\Gamma^+(s); A)\dot{\Gamma}^+(s)\| &= \|\mathrm{e}^{ts\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} R(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}; A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\| \\ &\leq \mathrm{e}^{\delta s \cos\alpha} \frac{M}{\operatorname{dist}(\gamma, |\Gamma|)}, \end{aligned} \tag{1.94}$$

es decir, encontramos una dominante en $L^1(\mathbb{R}^+)$ que es independiente de $t \in [\delta, \infty)$. Una desigualdad análoga se obtiene para Γ^-. Estos hechos demuestran que existe

$$U(t) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A)\, \mathrm{d}\lambda \in \mathcal{L}(X) \tag{1.95}$$

para $t > 0$ y que la convergencia de la integral es absoluta y uniforme para t en intervalos de la forma $[\delta, \infty)$ con $\delta > 0$. En seguida, $U \colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es un mapeo continuo.

Análogamente se trata la integral sobre el integrando de (1.95), derivado respecto a t, y se obtiene:

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \lambda\mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A)\, \mathrm{d}\lambda \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.96}$$

El integrando tiene L^1-dominante en $[\delta, 0)$ para todo $\delta > 0$, independiente de t, y entonces es cierta la igualdad en (1.96).

Demostremos que $\|U(t)\|$ es acotada en $\mathbb{R}^+$. Para $t \geq 1$ las cotas en (1.94) demuestran que $\|U(t)\|$ es acotada en $[1, \infty)$.

Para tratar el caso $t \in (0, 1]$ definimos caminos $\Gamma_t^{\pm}(s) := \Gamma^{\pm}(s)$ para

$s \in [1/t, \infty)$ y

$$\Gamma_t^{\mathrm{c}}(s) := \frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha ts} \qquad \text{para } s \in [-1/t, 1/t].$$

Entonces $\Gamma_t := \Gamma_t^+ + \Gamma_t^{\mathrm{c}} - \Gamma_t^-$ es una cadena de caminos de integración en $\rho(A)$. La suma Λ_t de los caminos $\Gamma^+(s)$ y $-\Gamma^-(s)$ para $s \in [0, 1/t]$ y $-\Gamma_t^{\mathrm{c}}$ es un ciclo en $\rho(A)$ con número de giro cero respecto a todos puntos en $\sigma(A)$. Además, $\Gamma_t + \Lambda_t = \Gamma$. En seguida,

$$U(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_t} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A)\,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{para todo } t > 0. \tag{1.97}$$

Para cualquier $\eta \geq 0$ definimos

$$M_1(\eta) := \sup_{\lambda \in \overline{\Sigma(\alpha)}} \frac{M(|\lambda| + \eta)}{|\lambda - \gamma|} < \infty,$$

así que

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M_1(\eta)}{|\lambda| + \eta} \qquad \text{para todo } \lambda \in \overline{\Sigma(\alpha)}. \tag{1.98}$$

Calculamos para $t \in (0, 1]$ usando (1.98)

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Gamma_t^+} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A)\,\mathrm{d}\lambda \right\| &\leq \int_{1/t}^{\infty} \mathrm{e}^{ts\cos\alpha} \frac{M}{|\Gamma_t^+(s) - \gamma|}\,\mathrm{d}s \\ &\leq M_1(0)\int_{1/t}^{\infty} \mathrm{e}^{ts\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}s}{s} = M_1(0)\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{u\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{u} < \infty, \end{aligned} \tag{1.99}$$

independientemente de $t \in (0, 1]$. Una cota análoga es cierta para Γ_t^-. La parte restante de Γ_t la acotamos así:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\Gamma_t^{\mathrm{c}}} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A)\,\mathrm{d}\lambda \right\| = \left\| \int_{-1/t}^{1/t} \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha ts}) R(\Gamma_t^{\mathrm{c}}(s); A)\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha ts}\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq M_1(0)\int_{-1/t}^{1/t} \exp(\cos(\alpha ts))\alpha t\,\mathrm{d}s = M_1(0)\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(\cos(u))\,\mathrm{d}u < \infty, \end{aligned} \tag{1.100}$$

independientemente de $t \in (0, 1]$. La información contenida en las ecuaciones (1.97), (1.99) y (1.100) implica una cota uniforme para $\|U(t)\|$ para $t \in (0, 1]$.

Afirmamos que

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} U(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{1.101}$$

Primero notamos que la integral está bien definida porque $U\colon (0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ es una función continua y acotada. Con esta información los límites

$$\lim_{s\to 0+} \int_s^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} U(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \lim_{s\to\infty} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} U(t)\,\mathrm{d}t$$

existen por el mismo argumento que se usó en la demostración del inciso (f).

Para $\lambda, \eta > 0$ calculamos con (1.98)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty & \|\exp((\Gamma^+(s) - \lambda)t) R(\Gamma^+(s); A) \dot{\Gamma}^+(s)\|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \|\exp((s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \lambda)t) R(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}; A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&\le M_1(\eta) \int_0^\infty \int_0^\infty \exp((s\cos\alpha - \lambda)t) \frac{1}{s+\eta}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&= M_1(\eta) \int_0^\infty \frac{-1}{(s\cos\alpha - \lambda)(s+\eta)}\,\mathrm{d}s \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

usando que $\cos\alpha < 0$ y que el último integrando es acotado y decrece como $1/s^2$ en $\mathbb{R}^+$. Una cota análoga es cierta para Γ^-. Eso dice que está bien definida la integral en (1.101) y nos permite intercambiar integraciones en lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} U(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^\infty \int_\Gamma \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t} R(\mu; A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t} R(\mu; A)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \mu} R(\mu; A)\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Demostremos que

$$(1.103) \qquad \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - \mu} R(\mu; A)\, \mathrm{d}\mu = R(\lambda; A) \qquad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Fijemos $\lambda > 0$. Si $r > \lambda$ entonces definimos caminos $\Lambda_r^{\pm}(s) := \Gamma^{\pm}(s)$ para $s \in [0, r]$, y $\Lambda_r^{\mathrm{c}}(s) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ para $s \in [-\alpha, \alpha]$. Entonces $\Lambda_r := -\Lambda_r^+ + \Lambda_r^- + \Lambda_r^{\mathrm{c}}$ es un ciclo con número de giro cero respecto a todos puntos en $\sigma(A)$, y con número de giro uno respecto a λ, para todo $r > \lambda$. El teorema de Cauchy dice que

$$(1.104) \qquad \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Lambda_r} \frac{R(\mu; A)}{(\mu - \lambda)}\, \mathrm{d}\mu = R(\lambda; A).$$

Estimamos con (1.98) para $r \geq 2\lambda$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_r^{\mathrm{c}}} \frac{R(\mu; A)}{(\mu - \lambda)}\, \mathrm{d}\mu \right\| &= \left\| \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}; A)}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \lambda)} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq M_1(0) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \lambda|}\, \mathrm{d}s \leq 2M_1(0) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}s \to 0 \\ &\qquad \text{cuando } r \to \infty. \end{aligned}$$

Entonces (1.104) implica

$$\begin{aligned} R(\lambda; A) = \lim_{r \to \infty} R(\lambda; A) &= \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Lambda_r} \frac{R(\mu; A)}{(\mu - \lambda)}\, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\Gamma} \frac{R(\mu; A)}{(\mu - \lambda)}\, \mathrm{d}\mu, = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{R(\mu; A)}{(\lambda - \mu)}\, \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

es decir, (1.103). Juntando (1.102) y (1.103) obtenemos (1.101).

Como $\|U(t)\|$ es acotada en $\mathbb{R}^+$ independientemente de t, y como $\lambda > 0$, podemos derivar la integral en (1.101) respecto a λ infinitas veces. En la misma manera como en la demostración del Corolario 1.24, pero ahora respecto a la topología de $\mathcal{L}(X)$ y usando la cota para $\|U(t)\|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n\| &= \left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} U(t)\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\leq C \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{C}{\lambda^n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},\ \lambda > 0. \end{aligned}$$

El Teorema 1.23 ahora dice que A es el generador de un C_0-semigrupo Q que cumple $\|Q(t)\| \leq C$ para todo $t > 0$. Por el Teorema 1.19(f) sabemos que

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)x \, \mathrm{d}t \qquad \text{para todo } x \in X, \ \lambda > 0. \tag{1.105}$$

Sean $x \in X$ y $x' \in X'$ fijos. Entonces (1.101) y (1.105) implican que

$$0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} x'(U(t) - Q(t))x \, \mathrm{d}t \qquad \text{para todo } \lambda > 0.$$

La integral es un mapeo analítico en λ, debido a que Q y U son acotados. Como la integral es cero para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, el teorema de la continuación única para funciones holomorfas implica que la integral es cero para todo $\lambda \in [\operatorname{Re}\mu > 0]$. La inyectividad de la transformación de Laplace implica que $x'(U(t) - Q(t))x \equiv 0$ para todo $x' \in X'$ y $x \in X$. Entonces $Q(t) = U(t)$ para todo $t > 0$.

Ya vimos que Q es diferenciable. La ecuación (1.90) se sigue de (1.96) y del Teorema 1.36, además usando (1.98):

$$\begin{aligned} t\|AQ(t)\| = t\|Q'(t)\| &= t \left\| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A) \, \mathrm{d}\lambda \right\| \\ &\leq \frac{M_1(0)t}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{ts\cos\alpha} \, \mathrm{d}s = \frac{M_1(0)}{-\pi\cos\alpha} \end{aligned} \tag{1.106}$$

para todo $t > 0$. Eso termina la demostración en el caso $\gamma < 0$.

En el caso general, consideremos el operador $\widetilde{A} := A - (1+\gamma)I$, que cumple

$$\Sigma(\alpha; -1) \subseteq \rho(\widetilde{A})$$

y

$$\|R(\lambda; \widetilde{A})\| = \|R(\lambda + 1 + \gamma; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda + 1|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha; -1).$$

Entonces $\widetilde{A}$ es sectorial y la primera parte de esta demostración dice que $\widetilde{A}$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo diferenciable $\widetilde{Q}$ que cumple

$$\limsup_{t \to 0+} \|\widetilde{Q}'(t)\| t < \infty \tag{1.107}$$

y que además $\|\widetilde{Q}(t)\|$ es acotada para $t \in \mathbb{R}^+$. Entonces A es el generador del C_0-semigrupo $Q(t) := \mathrm{e}^{(1+\gamma)t}\widetilde{Q}(t)$, y este también es diferenciable y cumple

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0+}\|Q'(t)\|t &\le \limsup_{t\to 0+}\Big((1+\gamma)\|\widetilde{Q}(t)\| + \|\widetilde{Q}'(t)\|\Big)\mathrm{e}^{(1+\gamma)t}t \\ &= \limsup_{t\to 0+}\|\widetilde{Q}'(t)\|t < \infty.\end{aligned}$$

Eso termina la demostración de que (i) implica (ii).

Demostremos las propiedades (1.91) and (1.92). Por el Lema 1.31 sólo falta demostrar $\omega(A) \le \mathrm{ce}(A)$ para obtener (1.91). Sea $\varepsilon > 0$. Notamos que necesariamente $\gamma \ge \mathrm{ce}(A)$. Como $\Sigma(\alpha;\gamma) \subseteq \rho(A)$ y $[\mathrm{Re}\,\lambda > \mathrm{ce}(A)] \subseteq \rho(A)$, existe $\alpha' \in (\pi/2, \alpha]$ tal que para $\gamma' := \mathrm{ce}(A) + \varepsilon$ se tiene $\overline{\Sigma(\alpha';\gamma')} \subseteq \rho(A)$. Mostremos que existe $M' > 0$ tal que

$$\|R(\lambda;A)\| \le \frac{M'}{|\lambda-\gamma'|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha';\gamma'). \tag{1.108}$$

Si $|\lambda| \ge |\gamma| + 1$, entonces $|\lambda - \gamma| \ge 1$. Eso muestra que

$$\sup_{\substack{|\lambda|\ge|\gamma|+1\\ \lambda\in\Sigma(\alpha';\gamma')}} \|R(\lambda;A)\|\,|\lambda-\gamma'| \le \sup_{\substack{|\lambda|\ge|\gamma|+1\\ \lambda\in\Sigma(\alpha';\gamma')}} M\frac{|\lambda-\gamma'|}{|\lambda-\gamma|} < \infty.$$

Por otro lado, la continuidad del mapeo $\lambda \mapsto R(\lambda;A)$ implica que

$$\sup_{\substack{|\lambda|\le|\gamma|+1\\ \lambda\in\overline{\Sigma(\alpha';\gamma')}}} \|R(\lambda;A)\|\,|\lambda-\gamma'| < \infty.$$

Estos dos hechos prueban la existencia de $M' > 0$ tal que (1.108) se cumple.

Definimos $\widetilde{A} := A - (\gamma' + \varepsilon)I$ y $\widetilde{Q}$ el C_0-semigrupo analítico que tiene $\widetilde{A}$ como su generador. Mostramos arriba que $\|\widetilde{Q}(t)\|$ es acotada uniformemente para $t > 0$. Entonces $Q(t) = \mathrm{e}^{(\gamma'+\varepsilon)t}\widetilde{Q}(t)$ implica que $\omega(A) \le \gamma' + \varepsilon = \mathrm{ce}(A) + 2\varepsilon$. Como ε era arbitrariamente chico, $\omega(A) \le \mathrm{ce}(A)$, y (1.91) es cierto.

Para demostrar (1.92) supongamos que $\mathrm{ce}(A) < 0$. Como arriba existen $\alpha' \in (\pi/2, \alpha]$, $\gamma' \in (\mathrm{ce}(A), 0)$ y $M' > 0$ tales que $\Sigma(\alpha';\gamma') \subseteq \rho(A)$ y (1.108) se cumple. Por la discusión del caso de γ negativo, particularmente por la ecuación (1.106), obtenemos (1.92).

(ii) implica (iii): Como Q es diferenciable el Lema 1.37 y la hipótesis implican que existe $C > 1/\mathrm{e}$ tal que para todo $r > 0$ existe $n_0(r)$ tal que

$$\|Q^{(n)}(t)\| = \left\| Q'\left(\frac{t}{n}\right)^n \right\| \leq \left\| Q'\left(\frac{t}{n}\right) \right\|^n \leq \left(\frac{nC}{t}\right)^n \tag{1.109}$$

$$\text{para todo } n \geq n_0(r),\ t \in (0, r].$$

Además, existe $r_0 > 0$ tal que podemos tomar $n_0(r) = 1$ para $r \in (0, r_0]$. Se tiene

$$\frac{n^n}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = \mathrm{e}^n.$$

Entonces (1.109) implica que

$$\frac{1}{n!}\|Q^{(n)}(t)(z-t)^n\| \leq \left(\frac{C\mathrm{e}}{t}|z-t|\right)^n \tag{1.110}$$

$$\text{para todo } n \geq n_0(r),\ t \in (0, r],$$

es decir, para $t > 0$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{C\mathrm{e}}{t}|z-t| < 1$$

converge absolutamente la serie

$$Q(z) := Q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

En otras palabras, Q tiene para todo $t > 0$ una extensión analítica a $B_{t/(C\mathrm{e})}(t)$. La unión de estas bolas forma el cono $\Sigma(\beta')$ con $\beta' := \arcsin 1/(C\mathrm{e})$. Como en el caso de funciones escalares se obtiene que Q tiene una y sólo una extensión holomorfa a $\Sigma(\beta')$.

Tomemos $\beta := \arctan 1/(2C\mathrm{e}) < \beta'$. Afirmamos que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma(\beta)}} Q(z)x = x \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{1.111}$$

Primero observamos que si $z \in \Sigma(\beta)$ cumple $t := \operatorname{Re} z \in (0, r_0]$ entonces $|z-t| \leq t/(2C\mathrm{e})$ y luego (1.110) implica que

$$\|Q(z)\| \leq \|Q(t)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|Q^{(n)}(t)\|}{n!}|z-t|^n$$
$$\leq \|Q(t)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \|Q(t)\| + 1,$$

es decir, $\|Q(z)\|$ es acotada en $\Sigma(\beta) \cap B_{r_0}(0)$. En seguida, es suficiente demostrar (1.111) para $x \in D(A)$. Si $x \in D(A)$ y $t = \operatorname{Re} z$ entonces diferenciación en la serie que define $Q(z)$ da

$$Q'(z)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(t)x}{(n-1)!}(z-t)^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n-1)}(t)Ax}{(n-1)!}(z-t)^{n-1} = Q(z)Ax.$$

Como $\|Q(z)\|$ es acotada en $\Sigma(\beta) \cap B_{r_0}(0)$, obtenemos una constante $M > 0$ tal que

$$\|Q'(z)x\| \leq M \qquad \text{para todo } z \in \Sigma(\beta) \cap B_{r_0}(0).$$

Con eso estimamos

$$\|Q(z)x - Q(t)x\| = \left\| \int_t^z Q'(\lambda)x \, \mathrm{d}\lambda \right\|$$
$$= \left\| \int_0^1 Q'(t + s(z-t))x(z-t) \, \mathrm{d}s \right\| \leq M|z-t| \leq \frac{Mt}{2C\mathrm{e}}.$$

En la última desigualdad usamos la definición de β. Esto implica que

$$\|Q(z)x - x\| \leq \|Q(z)x - Q(t)x\| + \|Q(t)x - x\|$$
$$\leq \frac{Mt}{2C\mathrm{e}} + \|Q(t)x - x\| \to 0$$

cuando $z \to 0$ en $\Sigma(\beta)$ para $x \in D(A)$, porque además $t = \operatorname{Re} z \to 0$ y porque Q es un C_0-semigrupo.

Una aplicación de la Nota 1.39 muestra que Q es un semigrupo analítico.

(iii) implica (i): Sea Q un C_0-semigrupo analítico en $\Sigma(\beta)$, con $\beta \in (0, \pi/2)$. Como $Q(z) \to I$ fuertemente cuando $z \to 0$ en $\Sigma(\beta)$, el mismo argumento usado en la demostración del Teorema 1.19(a) implica que existen

$C \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que

$$\|Q(z)\| \leq C\mathrm{e}^{\omega|z|} \qquad \text{para todo } z \in \Sigma(\beta). \tag{1.112}$$

La única diferencia es que aquí permitimos argumentos complejos.

Sea $\gamma > \omega$, y escojamos $\delta \in (0, \beta)$ tal que

$$\omega - \gamma \cos\delta < 0. \tag{1.113}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ cumple $\operatorname{Re}\lambda \geq \gamma$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ por el Teorema 1.19 y se cumple

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.114}$$

La integral está bien definida porque $Q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es continua y porque el integrando es acotado por la función $C\exp((\omega-\gamma)t)$, véase (1.112). Afirmamos que existe $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \gamma|} \qquad \text{para todo } \lambda \in [\operatorname{Re}\mu > \gamma]. \tag{1.115}$$

Sea primero $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\tau$ con $\sigma > \gamma$ y $\tau \geq 0$. Para $r > 0$ definimos caminos $\Lambda_r^1(s) := s$ y $\Lambda_r^2(s) := s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$ para $s \in [0, r]$, y $\Lambda_r^{\mathrm{c}}(s) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ para $s \in [-\delta, 0]$. Se sigue que $\Lambda_r^2 + \Lambda_r^{\mathrm{c}} - \Lambda_r^1$ es un ciclo en $\Sigma(\beta) \cup \{0\}$. Como Q es holomorfo en $\Sigma(\beta)$ y acotado cerca de 0, eso implica que

$$\int_{\Lambda_r^2} \mathrm{e}^{-\lambda z} Q(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Lambda_r^{\mathrm{c}}} \mathrm{e}^{-\lambda z} Q(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Lambda_r^1} \mathrm{e}^{-\lambda z} Q(z)\,\mathrm{d}z. \tag{1.116}$$

Nuevamente las integrales están bien definidas porque los integrandos son funciones continuas y acotadas. Usamos (1.112), $\gamma > \omega \geq 0$, $\tau \operatorname{sen} s \leq 0$ para $s \in [-\delta, 0]$ y $\cos(-\delta) = \cos(\delta)$ para estimar la integral sobre Λ_r^{c}:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda_r^{\mathrm{c}}} \mathrm{e}^{-\lambda z} Q(z)\,\mathrm{d}z \right\| &= \left\| \int_{-\delta}^0 \exp(-\lambda r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) Q(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq Cr \int_{-\delta}^0 \exp(r(\omega - \sigma\cos s + \tau \operatorname{sen} s))\,\mathrm{d}s \\
&\leq Cr \int_{-\delta}^0 \exp(r(\omega - \gamma\cos\delta))\,\mathrm{d}s \\
&= Cr\delta \exp(r(\omega - \gamma\cos\delta))
\end{aligned}$$

$$\to 0$$

cuando $r \to \infty$ por (1.113). Como

$$\omega - \sigma \cos \delta - \tau \operatorname{sen} \delta \leq \omega - \gamma \cos \delta < 0$$

por (1.113), (1.114) y (1.116) implican

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda; A)\| &= \left\| \lim_{r \to \infty} \int_{\Lambda_r^2} \mathrm{e}^{-\lambda z} Q(z)\, \mathrm{d}z \right\| \\
&= \left\| \int_0^\infty \exp(-\lambda s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}) Q(s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq C \int_0^\infty \exp(s(\omega - \sigma \cos \delta - \tau \operatorname{sen} \delta))\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{C}{\sigma \cos \delta + \tau \operatorname{sen} \delta - \omega} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda - \gamma|},
\end{aligned}$$

donde definimos

$$M := \sup_{\sigma > \gamma, \tau \geq 0} \frac{C\,|\sigma + \mathrm{i}\tau - \gamma|}{\sigma \cos \delta + \tau \operatorname{sen} \delta - \omega}. \tag{1.117}$$

para la existencia del límite cuando $r \to \infty$ de la integral sobre Λ_r^2 usamos que el integrando es continuo y acotado por $C \exp((\omega - \gamma)|z|)$. Mostremos que el supremo en (1.117) es finito: para $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\tau$ con $|\lambda| \leq 1$ obtenemos una cota superior usando que

$$\sigma \cos \delta + \tau \operatorname{sen} \delta - \omega \geq \gamma \cos \delta - \omega > 0,$$

lo cual es una consecuencia de $\sigma > \gamma$, $\cos \delta > 0$, $\operatorname{sen} \delta > 0$ y de (1.113). Y para λ con $|\lambda| \geq 1$ obtenemos una cota superior usando

$$\begin{aligned}
\sigma \cos \delta + \tau \operatorname{sen} \delta = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix} &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \cos \alpha \\
&\geq \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\, \min \left\{ \cos \delta, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right\} > 0,
\end{aligned}$$

donde α es el ángulo entre los vectores (σ, τ) y $(\cos \delta, \operatorname{sen} \delta)$ en $\mathbb{R}^2$.

El caso de $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$ se trata de manera análoga, usando los caminos $\Lambda_r^2(s) := s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ para $s \in [0, r]$ y $\Lambda_r^{\mathrm{c}}(s) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ para $s \in [0, \delta]$. Eso demuestra (1.115). Junto con la Proposición 1.40 (1.115) implica que A es sectorial. $\square$

Para demostrar resultados sobre perturbación de operadores sectoriales, necesitaremos el siguiente

Lema 1.43. *Sea A un operador lineal cerrado y densamente definido en un espacio de Banach X.*

(a) *Si A es sectorial con constantes $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $\Sigma(\alpha;\gamma) \subseteq \rho(A)$ y*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma),$$

entonces $\|AR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + M$ y $\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))} \leq 1 + 2M$ para todo $\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)$.

(b) *Si existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $[\operatorname{Re}\mu > \gamma] \subseteq \rho(A)$ y $\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}$ es acotado para $\lambda \in [\operatorname{Re}\mu > \gamma]$, entonces A es sectorial.*

Demostración. **(a):** Calculamos

$$\begin{aligned}\|AR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(A - \lambda I + \lambda I)R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 1 + |\lambda|\,\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + \frac{M|\lambda|}{1 + |\lambda|} \leq 1 + M\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))} &= \|AR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} + \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 1 + M + \frac{M}{1 + |\lambda|} \leq 1 + 2M.\end{aligned}$$

(b): Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$. Se tiene

$$\begin{aligned}\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \frac{1}{|\lambda|}\|(\lambda I - A + A)R(\lambda; A)_{\mathcal{L}(X)}\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \|AR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}\right).\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.40 eso implica que A es sectorial. $\square$

Teorema 1.44. *Sea A un operador sectorial en un espacio de Banach X con constantes $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $\Sigma(\alpha;\gamma) \subseteq \rho(A)$ y*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma).$$

Entonces se cumple: si L es un operador lineal en X con $D(A) \subseteq D(L)$ y si existen $a \in [0, 1/(3(1+M))]$ y $b \geq 0$ tales que

$$\|Lx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \qquad \text{para todo } x \in D(A) \tag{1.118}$$

entonces $A + L$ es sectorial con $\Sigma(\alpha;\gamma') \subseteq \rho(A+L)$ y

$$\|R(\lambda; A+L)\| \leq \frac{M'}{1+|\lambda|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma'). \tag{1.119}$$

Las constantes γ' y M' solamente dependen de α, γ, b y M.

Demostración. Sea $\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)$ tal que $|\lambda| \geq 3bM$. Entonces $R(\lambda; A)(X) \subseteq D(A)$ implica por el Lema 1.43(a)

$$\begin{aligned}\|LR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq a\|AR(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} + b\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq a(1+M) + \frac{bM}{1+|\lambda|} \leq \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Entonces $I - LR(\lambda; A)$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$. La identidad

$$(\lambda I - (A+L)) = (I - LR(\lambda; A))(\lambda I - A)$$

vale en $D(A)$ y da $\lambda \in \rho(A+L)$ y

$$\|R(\lambda; A+L)\| = \left\| R(\lambda; A) \sum_{n=0}^{\infty} (LR(\lambda; A))^n \right\| \leq \frac{\|R(\lambda; A)\|}{1 - \|LR(\lambda; A)\|} \leq \frac{3M}{1+|\lambda|}$$

para todo $\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)$ tal que $|\lambda| \geq 3bM$. Escogiendo $\gamma' \geq \gamma$ tal que $\Sigma(\alpha;\gamma') \subseteq \Sigma(\alpha;\gamma) \setminus \overline{B_{3bM}(0)}$ eso implica la afirmación. $\square$

Nota 1.45. En el Teorema 1.44, si L es un operador acotado entonces se cumple (1.118) y $A + L$ es sectorial.

Recordemos que un operador lineal L entre espacios normados X y Y se llama *compacto* si $\overline{L(B_1(0;X))}$ es compacto en Y.

Teorema 1.46. *Sea A un operador sectorial en un espacio de Banach X y sea $L\colon D(A) \to X$ lineal y compacto respecto a la norma de la gráfica de A en $D(A)$. Entonces $A + L$ es sectorial.*

Demostración. Escogemos constantes α, γ y M como en la Definición 1.41. Sea $K := \overline{L(B_1(0; D(A)))}$. Entonces K es compacto en X. Para $\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)$ definimos $f_\lambda\colon K \to \mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(y) := \|R(\lambda;A)y\|_{D(A)}.$$

Tenemos

$$|f_\lambda(y_1) - f_\lambda(y_2)| \leq \|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}\|y_1 - y_2\|_X$$

para todo $y_1, y_2 \in K$. El Lema 1.43 dice que la familia (f_λ) es uniformemente acotada y equicontinua, es decir, relativamente compacta en $C(K)$ por el teorema de Arzelá-Ascoli.

Si $x \in D(A)$, entonces

$$\begin{aligned}\|AR(\lambda;A)x\|_X &= \|R(\lambda;A)Ax\|_X \\ &\leq \|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax\|_X \leq \frac{M}{|\lambda-\gamma|}\|Ax\|_X \to 0\end{aligned}$$

cuando $\lambda \to \infty$ en $\Sigma(\alpha;\gamma)$. Por lo tanto, también $\|R(\lambda;A)x\|_{D(A)} \to 0$. Como $\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}$ es uniformemente acotada en $\Sigma(\alpha;\gamma)$ eso implica por el teorema de Banach-Steinhaus que $\|R(\lambda;A)x\|_{D(A)} \to 0$ para todo $x \in X$ cuando $\lambda \to \infty$ in $\Sigma(\alpha;\gamma)$. Particularmente, $f_\lambda \to 0$ en $C(K)$ por la compacidad relativa de la familia. En seguida existe $\lambda_0 > 0$ tal que si $|\lambda| \geq \lambda_0$ y $\lambda \in \Sigma(\alpha;\gamma)$ entonces tenemos para todo $x \in D(A)\backslash\{0\}$: $Lx/\|x\|_{D(A)} \in K$ y

$$\begin{aligned}\|R(\lambda;A)Lx\|_{D(A)} &= \left\|R(\lambda;A)\frac{Lx}{\|x\|_{D(A)}}\right\|_{D(A)}\|x\|_{D(A)} \\ &= f_\lambda\left(\frac{Lx}{\|x\|_{D(A)}}\right)\|x\|_{D(A)} \leq \frac{1}{2}\|x\|_{D(A)},\end{aligned}$$

es decir, $\|R(\lambda;A)L\|_{\mathcal{L}(D(A))} \le \frac{1}{2}$. El operador

$$(\lambda I - (A+L)) = (\lambda I - A)(I - R(\lambda;A)L)$$

tiene inversa en $\mathcal{L}(X, D(A))$:

$$\begin{aligned}
&\|R(\lambda;A+L)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}\\
&\qquad = \|(I-R(\lambda;A)L)^{-1}R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}\\
&\qquad \le \|(I-R(\lambda;A)L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(D(A))}\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}\\
&\qquad \le 2\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}.
\end{aligned}$$

Escogemos $\gamma' \ge \gamma$ tal que $\Sigma(\alpha;\gamma') \subseteq \Sigma(\alpha;\gamma) \cap [|\mu| \ge \lambda_0]$. La cota uniforme para $\|R(\lambda;A)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}$ implica que $\|R(\lambda;A+L)\|_{\mathcal{L}(X,D(A))}$ es acotado en $\Sigma(\alpha;\gamma')$, es decir, $A+L$ es sectorial por el Lema 1.43(b). □

Sea $\mathcal{K}(X)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X)$ de los operadores compactos.

Teorema 1.47. *Sea A un operador sectorial en un espacio de Banach X tal que $R(\lambda_0;A)$ es compacto para un $\lambda_0 \in \rho(A)$. Si Q es el C_0-semigrupo analítico que tiene A como generador infinitesimal entonces $Q(t) \in \mathcal{K}(X)$ para todo $t > 0$.*

Demostración. Sean α, γ y M como en la Definición 1.41. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\gamma < 0$, porque multiplicación de Q por una función exponencial no influye la compacidad. Usando la identidad de la resolvente (1.5) obtenemos para todo $\lambda \in \rho(A)$ que

$$R(\lambda;A) - R(\lambda_0;A) = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda)R(\lambda_0)$$

es compacto, porque la composición de un operador compacto con un operador acotado es compacta. Eso demuestra que $R(\lambda;A)$ es compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Ponemos $\Gamma^{\pm}(s) := s\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}$ para $s \in \mathbb{R}_0^+$ y $\Gamma := \Gamma^+ - \Gamma^-$. Se tiene para $t > 0$

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda;A)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{1.120}$$

Para todo $r > 0$

$$\int_0^r \exp(tse^{i\alpha})R(se^{i\alpha}; A)e^{i\alpha}\, ds \in \mathcal{K}(X)$$

porque el integrando es compacto para todo $s \in [0, r]$, porque $\mathcal{K}(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X)$ y por (1.15). Dejar $r \to \infty$ y usar que $\mathcal{K}(X)$ es cerrado da

$$\int_{\Gamma+} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda = \int_0^\infty \exp(tse^{i\alpha})R(se^{i\alpha}; A)e^{i\alpha}\, ds \in \mathcal{K}(X),$$

y una contención análoga para la integral sobre Γ^-. Enconsecuencia, (1.120) implica la afirmación. □

1.4 EDPs elípticas con valores en la frontera

Aquí demostraremos que Δ se puede realizar como operador sectorial en varios espacios de funciones sobre un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$ y que eso implica la existencia de la solución de la ecuación del calor.

Primero necesitamos un resultado técnico.

Definición 1.48. Sea A un operador lineal cerrado en un espacio de Banach X. Entonces el *rango numérico* de A es el conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{rn}(A) := \{\langle x', Ax\rangle \mid \\ x \in D(A),\ \|x\| = 1,\ x' \in X',\ \|x'\|_{X'} = 1,\ \langle x', x\rangle = 1\}. \end{aligned}$$

Aquí usamos la notación $\langle x', x\rangle := x'(x)$.

Lema 1.49. *Sea A un operador lineal cerrado y densamente definido en un espacio de Banach X. Sea Σ el complemento de $\overline{\mathrm{rn}(A)}$ en $\mathbb{C}$. Si Σ_0 es una componente conexa de Σ tal que $\Sigma_0 \cap \rho(A) \neq \varnothing$ entonces $\Sigma_0 \subseteq \rho(A)$ y*

$$\|R(\lambda; A)\| \le \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \overline{\mathrm{rn}(A)})} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_0. \tag{1.121}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \Sigma_0 \cap \rho(A)$. Si $x \in D(A)$ cumple $\|x\|_X = 1$, si $x' \in X'$ cumple $\|x'\|_{X'} = 1$ y si $\langle x', x\rangle = 1$ entonces

$$0 < \mathrm{dist}(\lambda, \overline{\mathrm{rn}(A)}) \le |\lambda - \langle x', Ax\rangle| = |\langle x', \lambda x - Ax\rangle| \le \|\lambda x - Ax\|. \tag{1.122}$$

Por lo tanto

$$\|R(\lambda; A)\| \leq 1/\operatorname{dist}(\lambda, \overline{\operatorname{rn}(A)}). \tag{1.123}$$

El conjunto $\rho(A) \cap \Sigma_0$ es abierto en Σ_0 porque $\rho(A)$ es abierto. Demostremos que $\rho(A) \cap \Sigma_0$ es cerrado en Σ_0. Sea $(\lambda_n) \subseteq \rho(A) \cap \Sigma_0$ convergente a un $\lambda^* \in \Sigma_0$. Cuando n es suficientemente grande, $|\lambda^* - \lambda_n| < \operatorname{dist}(\lambda_n, \overline{\operatorname{rn}(A)})$, porque $\operatorname{dist}(\lambda_n, \overline{\operatorname{rn}(A)}) \to \operatorname{dist}(\lambda^*, \overline{\operatorname{rn}(A)}) > 0$. Entonces (1.123) implica que $|\lambda^* - \lambda_n| < 1/\|R(\lambda_n; A)\|$. Por la discusión en la sección 1.1 obtenemos que $\lambda^* \in \rho(A) \cap \Sigma_0$. Eso muestra que $\rho(A) \cap \Sigma_0$ es cerrado en Σ_0. Por ser Σ_0 componente conexa de Σ, $\rho(A) \cap \Sigma_0 = \Sigma_0$, es decir, $\Sigma_0 \subseteq \rho(A)$. La ecuación (1.121) ahora es una consecuencia de (1.123), una cota que vale para todo $\lambda \in \Sigma_0 \cap \rho(A) = \Sigma_0$. □

Como en ecuaciones diferenciales muchas veces estamos interesados en soluciones tomando valores reales exclusivamente, pero la teoría de C_0-semigrupos está formulada en espacios de Banach complejos, tenemos que analizar la relación entre un operador que actúa sobre funciones reales y el C_0-semigrupo que genera su complejificación.

Proposición 1.50. *Sea A un operador lineal en un espacio de Banach X real. Si la complejificación $A_{\mathbb{C}}$ de A es el generador de un C_0-semigrupo Q en $X_{\mathbb{C}}$ entonces $Q(t)(X) \subseteq X$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ el operador $(I - \varepsilon A_{\mathbb{C}})$ tiene X y $\mathrm{i}X$ como subespacios invariantes de $X_{\mathbb{C}}$. En seguida, lo mismo se cumple para $\operatorname{Yos}(\varepsilon; A_{\mathbb{C}}) = A_{\mathbb{C}}(I - \varepsilon A_{\mathbb{C}})^{-1}$ si ε es suficientemente chico. Como $\operatorname{Yos}(\varepsilon; A_{\mathbb{C}}) \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}})$,

$$\exp(t \operatorname{Yos}(\varepsilon; A_{\mathbb{C}})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t \operatorname{Yos}(\varepsilon; A_{\mathbb{C}}))^n$$

y este operador tiene X y $\mathrm{i}X$ como subespacios invariantes, porque son subespacios cerrados de $X_{\mathbb{C}}$. Este hecho implica que los mismos subespacios también son invariantes bajo Q, porque

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0} \exp(t \operatorname{Yos}(\varepsilon; A_{\mathbb{C}}))x \qquad \text{para todo } x \in X_{\mathbb{C}}.$$

□

Este resultado nos permite escribir $u(t) = Q(t)u_0$ para la solución de $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)u(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$ en un espacio de Banach real.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ una región acotada con frontera lisa. Para $p \geq 1$ denotemos por $L^p(\Omega; \mathbb{K})$ el $\mathbb{K}$-espacio de Lebesgue correspondiente al exponente p de funciones Lebesgue medibles en Ω tomando valores en $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las normas correspondientes las denotamos por $|u|_p$. Introducimos para $n \in \mathbb{N}$ ciertos espacios de Sobolev: $W^{n,p}(\Omega; \mathbb{K})$ es el $\mathbb{K}$-espacio formado por funciones $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{K})$ que tienen derivadas parciales débiles hasta el orden n que están además en $L^p(\Omega; \mathbb{K})$. Con la norma

$$\|u\|_{n,p} := \left(\sum_{|\mu|_1 \leq n} |\partial^\mu u|_p^p \right)^{1/p}$$

$W^{n,p}(\Omega; \mathbb{K})$ es un espacio de Banach.

Para $p = 2$ denotemos el producto escalar en $L^2(\Omega; \mathbb{K})$ por

$$(u, v)_2 := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

La norma $\|\cdot\|_{n,2}$ está generada por el producto escalar

$$(\!(u, v)\!)_{n,2} := \sum_{|\mu|_1 \leq n} (\partial^\mu u, \partial^\mu v)_2.$$

Se acostumbra escribir en este caso $H^n(\Omega; \mathbb{K}) := W^{n,2}(\Omega; \mathbb{K})$.

Resulta que $W^{n,p}(\Omega, \mathbb{C}) \doteq (W^{n,p}(\Omega, \mathbb{R}))_{\mathbb{C}}$. Definimos $W_0^{n,p}(\Omega; \mathbb{K})$ como la cerradura de $C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$ en $W^{n,p}(\Omega, \mathbb{K})$, y $H_0^1(\Omega; \mathbb{K}) := W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{K})$.

Consideramos el operador $A := -\Delta$ y sus realizaciones $A_{p;\mathbb{K}}$ en $L^p(\Omega; \mathbb{K})$ dadas por

$$D(A_{p;\mathbb{K}}) := W^{2,p}(\Omega; \mathbb{K}) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{K}), \qquad A_{p;\mathbb{K}}u := Au \quad \text{para todo } u \in D(A_{p;\mathbb{K}}).$$

Como A tiene coeficientes reales, $(A_{p;\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = A_{p;\mathbb{C}}$. Por lo tanto, y por la Proposición 1.50, en lo que sigue suprimimos el índice $\mathbb{K}$ y consideramos todo espacios de funciones como espacios complejos. Los C_0-semigrupos para funciones reales son las restricciones de C_0-semigrupos complejos al subespacio real. Normalmente también suprimimos el índice p en A_p, porque estas realizaciones solamente difieren en los dominios.

Teorema 1.51. *El operador $-A_2$ es sectorial en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Denotemos

$$X := L^2(\Omega),$$
$$Y := \{\varphi|_\Omega \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}$$

y

$$Z := \{\varphi|_\Omega \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Como Ω tiene frontera lisa se sabe que Y es denso en $H^2(\Omega)$ y que $Y \cap H_0^1(\Omega) = Z$. Como $C_c^\infty(\Omega) \subseteq Z$, Z es denso en $H_0^1(\Omega)$. Estos hechos muestran que Z es denso en $D(A_2)$ respecto a la norma $\|\cdot\|_{2,2}$.

Para todo $\varphi, \psi \in Z$ se tiene

$$(\varphi, A\psi)_2 = -\int_\Omega \varphi\Delta\overline{\psi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\overline{\psi}\,\mathrm{d}x = (\!(\varphi,\psi)\!)_{1,2} - (\varphi,\psi)_2.$$

Aproximando $u, v \in D(A_2)$ por funciones en Z respecto a la norma $\|\cdot\|_{2,2}$, esta identidad implica:

$$(u, Au)_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad (u, (I + A)v)_2 = (\!(u, v)\!)_{1,2} \quad \text{para todo } u, v \in D(A_2). \tag{1.124}$$

El teorema de Frechét-Riesz identifica X con su dual. Si $u, v \in X$ cumplen $|u|_2 = |v|_2 = (u, v)_2 = 1$, entonces $u = v$. Por lo tanto (1.124) implica que

$$\mathrm{rn}(A_2) = \{(u, Au)_2 \mid u \in D(A_2),\ |u|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}_0^+$$

y luego que $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{rn}(A_2)}$ es conexo. Si $f \in X$, entonces $u \mapsto (u, f)_2$ es una función lineal acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de Frechét-Riesz existe un y sólo un $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $(u, f)_2 = (\!(u, v)\!)_{1,2}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. En otras palabras, v es solución débil de $(I + A)v = f$ en Ω, $v = 0$ en $\partial\Omega$. La teoría de regularidad para operadores elípticos de forma divergencia dice que $v \in D(A_2)$, es decir, por (1.124) y porque $D(A_2)$ es denso en X, $(I + A)v = f$ en el sentido explícito y $I + A\colon D(A_2) \to X$ es biyectivo.

Además,

$$|v|_2^2 \le \|v\|_{1,2}^2 = (v, f)_2 \le |v|_2 |f|_2$$

implica que $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Estos hechos demuestran que $-1 \in \rho(A)$. Como $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{rn}(A)}$ es conexo y $-1 \in (\mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{rn}(A)}) \cap \rho(A)$, el Lema 1.49 implica que $\Sigma(\alpha) \subseteq \rho(-A)$ para cualquier $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Para $\lambda \in [\mathrm{Re}\, \mu \ge 0]$ tenemos

$$\mathrm{dist}(\lambda, \overline{\mathrm{rn}(-A)}) \ge |\lambda|. \tag{1.125}$$

Para $\lambda \in [\mathrm{Re}\, \mu \le 0]$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\lambda, \overline{\mathrm{rn}(-A)}) &\ge \mathrm{dist}(\lambda, \mathbb{R}_0^-) \\ &= |\lambda| \cos(\mathrm{Arg}(\lambda) - \pi/2) \ge |\lambda| \cos(\alpha - \pi/2). \end{aligned} \tag{1.126}$$

Como $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, las ecuaciones (1.125) y (1.126) dicen, junto con el Lema 1.49, que existe $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda; -A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{|\lambda|} \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma(\alpha).$$

□

Más generalmente, trataremos los operadores A_p.

Teorema 1.52 (Cotas *a priori*; véase Teorema 9.14 en [12])**.** *Para $p \in (1, \infty)$ existe $C > 0$ que solamente depende de p y Ω tal que*

$$\|u\|_{2,p} \le C(|A_p u|_p + |u|_p) \qquad \textit{para todo } u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.127}$$

Teorema 1.53. *El operador $-A_p$ es sectorial en $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Primero demostraremos que la realización A_p de A en $L^p(\Omega)$ es un operador cerrado. Como $|A_p u|_p + |u|_p \le C'\|u\|_{2,p}$ para todo $u \in D(A_p)$, el Teorema 1.52 implica que son equivalentes las normas $\|\cdot\|_{2,p}$ y $\|\cdot\|_{D(A_p)}$ en $D(A_p)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$ y por la inyección continua $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $D(A_p)$ es un subespacio cerrado de $W^{2,p}(\Omega)$, es decir, es completo respecto a la norma $\|\cdot\|_{2,p}$. Por la equivalencia de normas, $D(A_p)$ es también completo respecto a la norma de la gráfica de A_p. El Lema 1.1 implica que A_p es un operador cerrado.

Sea $q := p/(p-1)$ el exponente conjugado a p. Denotemos por

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega uv = \langle v, u\rangle, \qquad \text{para todo } u \in L^p(\Omega),\ v \in L^q(\Omega),$$

el emparejamiento entre $L^p(\Omega)$ y su espacio dual $L^q(\Omega)$. Para cualquier $u \in L^p(\Omega)$ la función $|u|^{p-2}\overline{u}$ está en $L^q(\Omega)$ y tiene norma $||u|^{p-2}\overline{u}|_q = |u|_p^{p-1}$. Si además $|u|_p = 1$, entonces $v := |u|^{p-2}\overline{u}$ cumple $|v|_q = 1$ y $\langle u, v\rangle = 1$. Demostremos que este v es el único elemento que tiene esas propiedades: Sean $v_1, v_2 \in L^q(\Omega)$ tales que $|v_i|_q = 1$ y $\langle u, v_i\rangle = 1$ para $i = 1, 2$. Supongamos por contradicción que $v_1 \neq v_2$. Entonces $v^* := (v_1 + v_2)/2$ cumple $1 = \langle u, v^*\rangle \leq |u|_p|v^*|_q = |v^*|_q$. Por otro lado, la convexidad estricta de $L^q(\Omega)$ implica que $|v^*|_q < 1$, una contradicción.

Usaremos el espacio Z definido en la demostración del Teorema 1.51. Resulta que Z es denso en $D(A_p)$ respecto a la norma $\|\cdot\|_{2,p}$, como en el caso $p = 2$. Si $u \in D(A_p)$ entonces existe una sucesión $(\varphi_n) \subseteq Z$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{2,p}(\Omega)$. Es fácil ver que $|\varphi_n|^{p-2}\overline{\varphi_n} \to |u|^{p-2}\overline{u}$ en $L^q(\Omega)$. Se sigue para todo n que

$$\begin{aligned}
\langle A_p\varphi_n, |\varphi_n|^{p-2}\overline{\varphi_n}\,\rangle &= -\int_\Omega (\Delta\varphi_n)|\varphi_n|^{p-2}\overline{\varphi_n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_n \cdot \nabla(|\varphi_n|^{p-2}\overline{\varphi_n})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi_n \cdot \overline{\nabla(|\varphi_n|^{p-2}\varphi_n)}\,\mathrm{d}x \\
&= (p-1)\int_\Omega |\varphi_n|^{p-2}\nabla\varphi_n \cdot \overline{\nabla\varphi_n}\,\mathrm{d}x \\
&= (p-1)\int_\Omega |\varphi_n|^{p-2}|\nabla\varphi_n|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Dejando $n \to \infty$ obtenemos

$$\langle A_p u, |u|^{p-2}\overline{u}\,\rangle \geq 0 \qquad \text{para todo } u \in D(A_p). \tag{1.128}$$

Sean $u \in D(A_p)$, y $v \in L^q(\Omega)$ tales que $|u|_p = 1$, $|v|_q = 1$ y $\langle u, v\rangle = 1$. Lo que demostramos antes implica que $v = |u|^{p-2}\overline{u}$. Entonces $\langle A_p u, v\rangle \geq 0$

por (1.128). Eso demuestra que

$$\mathrm{rn}(A_p) \subseteq \mathbb{R}_{\mathbf{0}}^{+}. \tag{1.129}$$

El Teorema 9.15 en [12] implica que $I + A_p \colon D(A_p) \to L^p(\Omega)$ es biyectivo. Como $I + A_p$ es cerrado, eso implica que $-1 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{rn}(A_p)$. Como en la demostración del Teorema 1.51 se sigue que A_p es sectorial. $\square$

Capítulo 2

El operador de evolución

En este capítulo nos basamos principalmente en los libros [3, 8]

Con la teoría desarrollada en el Capítulo 1 demostramos la existencia de soluciones

$$u \in C([0,\infty), X) \cap C^1((0,\infty), D(A))$$

del problema de Cauchy $\dot{u} = -Au$, $u(0) = u_0$ si $-A$ es un operador sectorial. Ahora trataremos *problemas de Cauchy lineales no autónomos* de la forma abstracta

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t), & t \in (s, T], \\ u(s) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

en un espacio de Banach X, donde $s \in [0, T)$, $u_0 \in X$ y $f \in C([s, T], X)$ son el *tiempo inicial*, el *valor inicial* y la *inhomogenidad*. La meta es construir soluciones por la fórmula de la *variación de parámetros*

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [s, T], \tag{2.2}$$

y para ello tenemos que construir el operador de evolución $U(t, s)$ relacionado con la familia de operadores $(A(t))$. Eso se efectuará mediante una forma de ecuaciones integrales de Volterra que analizaremos en la siguiente sección.

2.1 Ecuaciones lineales de Volterra

Si $T > 0$ entonces usaremos la notación

$$\begin{aligned}\Delta_T &:= \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s \le t \le T\} \\ \dot{\Delta}_T &:= \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s < t \le T\}.\end{aligned}$$

Recordemos la definición

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{r-1}\,\mathrm{d}s \qquad \text{para todo } r > 0.$$

Lema 2.1. *Sean X un espacio de Banach,*

$$\dot{\Lambda}_T := \{(t,\tau,s) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le s < \tau < t \le T\}$$

y $a \in C(\dot{\Lambda}_T, X)$. Supóngase que existen $c_0 > 0$ y $\alpha, \beta \in (-\infty, 1)$ tales que

$$\|a(t,\tau,s)\|_X \le c_0 (t-\tau)^{-\alpha}(\tau - s)^{-\beta} \qquad \text{para todo } (t,\tau,s) \in \dot{\Lambda}_T. \tag{2.3}$$

Entonces

$$v(t,s) := \int_s^t a(t,\tau,s)\,\mathrm{d}\tau$$

está bien definida para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$. Se tiene que $v \in C(\dot{\Delta}_T, X)$ y

$$\|v(t,s)\|_X \le c_0 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}(t-s)^{1-\alpha-\beta} \qquad \text{para todo } (t,s) \in \dot{\Delta}_T. \tag{2.4}$$

Si $\alpha + \beta < 1$ entonces v tiene una extensión continua a Δ_T, tal que $v(t,t) = 0$ si $t \in [0, T]$.

Demostración. Calculamos para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$:

$$\begin{aligned}\int_s^t \|a(t,\tau,s)\|\,\mathrm{d}\tau &\le c_0 \int_s^t (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}\tau \\ &= c_0 (t-s)^{1-\alpha-\beta} \int_s^t \left(\frac{t-\tau}{t-s}\right)^{-\alpha} \left(\frac{\tau-s}{t-s}\right)^{-\beta} \frac{\mathrm{d}\tau}{t-s} \\ &= c_0 (t-s)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha} \eta^{-\beta}\,\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

$$= c_0 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}(t-s)^{1-\alpha-\beta}.$$

En esto hemos usado la sustitución $\eta := (\tau - s)/(t - s)$ y una fórmula bien conocida entre la función Γ y la llamada función "beta":

$$\mathbf{B}(x, y) := \int_0^1 (1-\eta)^{x-1}\eta^{y-1}\,\mathrm{d}\eta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{para todo } x, y > 0.$$

Se sigue que v está bien definida y que se cumple (2.4).

Para $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto compacto

$$\Delta_T^\varepsilon := \{(t, s) \in \Delta_T \mid t - s \geq \varepsilon\}.$$

Fijamos $\delta > 0$ y definimos para $\varepsilon \in (0, \delta/2]$ y $(t, s) \in \Delta_T^\delta$

$$v_\varepsilon(t, s) := \int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} a(t, \tau, s)\,\mathrm{d}\tau.$$

Como $\Delta_T^\delta \subseteq \Delta_T^{2\varepsilon}$ se tiene que $s+\varepsilon \leq t-\varepsilon$ en esta definición. Si $(t, s) \in \Delta_T^\delta$ y $\tau \in [s, s+\varepsilon]$ entonces $t-\tau \geq t-s-\varepsilon \geq \delta-\varepsilon$ y luego $(t-\tau)^{-\alpha} \leq (\delta-\varepsilon)^{-\alpha}$. Similarmente, $(\tau-s)^{-\beta} \leq (\delta-\varepsilon)^{-\beta}$ para $\tau \in [t-\varepsilon, t]$. Estos hechos implican que

$$\begin{aligned}
&\|v_\varepsilon(t, s) - v(t, s)\|_X \\
&\quad\leq c_0 \int_s^{s+\varepsilon} (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}\tau + c_0 \int_{t-\varepsilon}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad\leq c_0 \left(\frac{1}{1-\beta}(\delta-\varepsilon)^{-\alpha}\varepsilon^{1-\beta} + \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}(\delta-\varepsilon)^{-\beta} \right),
\end{aligned}$$

es decir, $v_\varepsilon \to v$ uniformemente en Δ_T^δ cuando $\varepsilon \to 0$.

Demostremos que v_ε es continua en Δ_T^δ para $\varepsilon \in (0, \delta/2]$ fijo. Sea $((t_n, s_n))_n \subseteq \Delta_T^\delta$ tal que $(t_n, s_n) \to (t^*, s^*)$ cuando $n \to \infty$. Definimos $g_n, g\colon [0, T] \to X$ por

$$g_n(\tau) := \begin{cases} a(t_n, \tau, s_n) & \text{si } s_n + \varepsilon \leq \tau \leq t_n - \varepsilon \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$g(\tau) := \begin{cases} a(t^*, \tau, s^*) & \text{si } s^* + \varepsilon \le \tau \le t^* - \varepsilon \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por la continuidad de a se tiene que $g_n \to g$ en c.t.p. en $[0, T]$. Además,

$$\|g_n(\tau)\| \le c_0(t_n - \tau)^{-\alpha}(\tau - s_n)^{-\beta} \le c_0\varepsilon^{-\alpha}\varepsilon^{-\beta}$$

para $\tau \in [s_n+\varepsilon, t_n-\varepsilon]$. Como $g_n(\tau) = 0$ para los demás τ en $[0, T]$, $\|g_n(\tau)\| \le c_0\varepsilon^{-\alpha}\varepsilon^{-\beta}$ en todo $[0, T]$. Análogamente se muestra que $\|g(\tau)\| \le c_0\varepsilon^{-\alpha}\varepsilon^{-\beta}$ en todo $[0, T]$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\|v_\varepsilon(t_n, s_n) - v_\varepsilon(t^*, s^*)\| \le \int_0^T \|g_n(\tau) - g(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \to 0$$

cuando $n \to \infty$, es decir, v_ε es continua en Δ_T^δ.

Por la convergencia uniforme de v_ε a v en Δ_T^δ cuando $\varepsilon \to 0$ se sigue que v es continua en Δ_T^δ. Como $\delta > 0$ era arbitrario, v es continua en $\dot{\Delta}_T$.

La última afirmación del actual lema se sigue de la cota (2.3). □

Si X es un espacio de Banach entonces consideramos las *ecuaciones lineales de Volterra*

$$(2.5) \qquad \forall x \in X: \qquad u(t, s)x = a(t, s)x + \int_s^t u(t, \tau)k_1(\tau, s)x \,\mathrm{d}\tau$$

y

$$(2.6) \qquad \forall x \in X: \qquad v(t, s)x = b(t, s)x + \int_s^t h_1(t, \tau)v(\tau, s)x \,\mathrm{d}\tau$$

para funciones incógnitas $u, v \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_\mathrm{s}(X))$ y funciones dadas $a, b, k_1, h_1 \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_\mathrm{s}(X))$.

Para buscar soluciones a estas ecuaciones definimos para $\alpha \in [0, 1)$ el espacio lineal

$$(2.7) \quad \mathfrak{K}(X; \alpha) := \left\{ u \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_\mathrm{s}(X)) \;\middle|\; \sup_{(t,s)\in\dot{\Delta}_T} (t - s)^\alpha \|u(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty \right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)} := \sup_{(t,s)\in\dot{\Delta}_T} (t-s)^{\alpha}\|u(t,s)\|. \tag{2.8}$$

Lema 2.2. *El espacio $\mathfrak{K}(X;\alpha)$ es completo.*

Demostración. Sea $(u_n) \subseteq \mathfrak{K}(X;\alpha)$ una sucesión de Cauchy. Eso implica que

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m,n \geq n_0\ \forall (t,s) \in \dot{\Delta}_T\ \forall x \in X:&\\ \|u_m(t,s)x - u_n(t,s)x\|_X &\leq \|u_m - u_n\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)}(t-s)^{-\alpha}\|x\|_X\\ &\leq \varepsilon(t-s)^{-\alpha}\|x\|_X.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Entonces $(u_n(t,s)x)_n$ es una sucesión de Cauchy en X para (t,s) y x fijo. Como X es completo, eso nos permite definir

$$u(t,s)x := \lim_{n\to\infty} u_n(t,s)x \qquad \text{para todo } (t,s) \in \dot{\Delta}_T,\ x \in X.$$

Dejando $m \to \infty$ en (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall (t,s) \in \dot{\Delta}_T\ \forall x \in X:\\ &\qquad \|u(t,s)x - u_n(t,s)x\|_X \leq \varepsilon(t-s)^{-\alpha}\|x\|_X.\end{aligned} \tag{2.10}$$

En seguida, para todo $x \in X$ la sucesión $u_n(\cdot,\cdot)x$ de funciones continuas $\dot{\Delta}_T \to X$ converge localmente uniformemente a $u(\cdot,\cdot)x$. Se sigue que $u(\cdot,\cdot)x$ es continua para todo $x \in X$ y luego $u \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_s(X))$. Multiplicando por $(t-s)^{\alpha}$ y tomando los supremos en (2.10) respecto a x y luego a $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$ obtenemos que $u \in \mathfrak{K}(X;\alpha)$ y $u_n \to u$ en $\mathfrak{K}(X;\alpha)$. Eso demuestra que $\mathfrak{K}(X;\alpha)$ es un espacio de Banach. □

Teorema 2.3. *Sean $\alpha, \beta \in [0,1)$, $a, b \in \mathfrak{K}(X;\alpha)$ y $k_1, h_1 \in \mathfrak{K}(X;\beta)$. Entonces existen* kerneles integrales resolventes $k, h \in \mathfrak{K}(X;\beta)$ *tales que u y v, dadas por*

$$u(t,s)x := a(t,s)x + \int_s^t a(t,\tau)k(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \tag{2.11}$$

y

$$v(t,s)x := b(t,s)x + \int_s^t h(t,\tau)b(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.12}$$

son las únicas soluciones de (2.5) *y* (2.6) *en* $\mathfrak{K}(X;\alpha)$.

Si $a, k_1 \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$ *entonces* $u \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$. *Si* $a \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$ *entonces* $u \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$. *Si* $a, k_1 \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(X))$ *entonces* $u \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(X))$. *Afirmaciones similares son ciertas para* b, h_1 *y* v.

Se tiene que

$$\|k\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)}, \|h\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)} \le C \tag{2.13}$$

donde C *sólo depende de* $\|k_1\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)}$, $\|h_1\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)}$, β *y* T, *y* C *crece monótonamente en* T.

Demostración. Nos restringimos al caso de (2.5), el otro siendo similar.

Ponemos $\gamma := 1-\alpha$ y $\rho := 1-\beta$, así que $\gamma, \rho \in (0,1]$. También ponemos $c_0 := \|k_1\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)}$. Para $u \in \mathfrak{K}(X;\alpha)$, $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$ y $x \in X$ fijos definimos

$$c(t,\tau,s) := u(t,\tau)k_1(\tau,s)x \qquad \text{para } 0 \le s < \tau < t \le T.$$

Entonces c es continuo en τ como mapeo tomando valores en X por la Proposición 1.14(a), y

$$\|c(t,\tau,s)\|_X \le c_0\|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)}\|x\|_X(t-\tau)^{-\alpha}(\tau-s)^{-\beta}.$$

En seguida, el Lema 2.1 implica que

$$(Qu)(t,s)x := \int_s^t u(t,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau$$

está bien definida y continua en $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$. Además,

$$\|(Qu)(t,s)x\|_X \le \frac{c_0\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)}\|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)}\|x\|_X(t-s)^{\rho-\alpha}.$$

Entonces $(Qu)(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ y

$$\|(Qu)(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_0 \Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} \|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)} (t-s)^{\rho-\alpha}. \tag{2.14}$$

La continuidad de $(t,s) \mapsto (Qu)(t,s)x$ para todo $x \in X$ implica que $Qu \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$. Además, por (2.14) encontramos

$$\|Qu\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)} \leq \frac{c_0 \Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} T^{\rho} \|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)}.$$

Como $Q \colon \mathfrak{K}(X;\alpha) \to \mathfrak{K}(X;\alpha)$ es lineal, la última cota implica que $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))$.

La ecuación (2.5) puede ser escrita

$$(I - Q)u = a \tag{2.15}$$

en $\mathfrak{K}(X;\alpha)$. Para invertir $I - Q$ trataremos de demostrar que converge la serie de Neumann de Q, aunque no necesariamente se cumple $\|Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))} < 1$.

Si $k_m \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$ ya está definido y cumple

$$\|k_m(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{(c_0 \Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)} (t-s)^{m\rho-1} \tag{2.16}$$

(eso es cierto para $m = 1$), entonces ponemos para $x \in X$

$$k_{m+1}(t,s)x := \int_s^t k_m(t,\tau) k_1(\tau,s)x \, \mathrm{d}\tau. \tag{2.17}$$

La hipótesis de inducción y el Lema 2.1 (con sus propios $\alpha := 1 - m\rho$ y $\beta := 1 - \rho$) nos dan $k_{m+1} \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$ y

$$\begin{aligned}\|k_{m+1}(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{c_0 (c_0 \Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)} \frac{\Gamma(m\rho)\Gamma(\rho)}{\Gamma((m+1)\rho)} (t-s)^{(m+1)\rho-1} \\ &= \frac{(c_0 \Gamma(\rho))^{m+1}}{\Gamma((m+1)\rho)} (t-s)^{(m+1)\rho-1},\end{aligned}$$

es decir, (2.16) con m reemplazado por $m+1$. Por inducción, para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos $k_m \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$ por (2.17), es decir, se cumple (2.16).

Demostremos por inducción que para $u \in \mathfrak{K}(X;\alpha)$ y $x \in X$ se cumple

$$(Q^m u)(t,s)x = \int_s^t u(t,\tau)k_m(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.18}$$

Supongamos que (2.18) es cierto. Sean $u \in \mathfrak{K}(X;\alpha)$, $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$, $x \in X$ y $x' \in X'$. Sea χ la función indicadora del triángulo

$$\left\{(\eta,\tau) \in \mathbb{R}^2 \mid s < \tau < \eta < t\right\}.$$

Como $k_1 \in \mathfrak{K}(X;\beta)$, (2.16) y el Lema 2.1 implican que

$$\begin{aligned}
\int_s^t \int_s^t \chi(\eta,\tau)&|x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x|\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \int_\tau^t |x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x|\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau \\
&\le C\int_s^t \int_\tau^t (t-\eta)^{-\alpha}(\eta-\tau)^{m\rho-1}(\tau-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau \\
&= C\int_s^t (t-\tau)^{m\rho-\alpha}(\tau-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}\tau \\
&= C(t-s)^{m\rho+1-\alpha-\beta} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por el teorema de Tonelli, la función continua

$$(\eta,\tau) \mapsto \chi(\eta,\tau)x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x$$

es una función integrable en $(s,t)\times(s,t)$. Entonces el teorema de Fubini implica que

$$\begin{aligned}
x'(Q^{m+1}u)(t,s)x &= \int_s^t x'Q^m u(t,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \int_\tau^t x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \int_s^t \chi(\eta,\tau)x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_s^t \int_s^t \chi(\eta,\tau)x'u(t,\eta)k_m(\eta,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_s^t \int_s^\eta x' u(t,\eta) k_m(\eta,\tau) k_1(\tau,s) x \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}\eta \\
&= x' \int_s^t u(t,\eta) \left(\int_s^\eta k_m(\eta,\tau) k_1(\tau,s) \,\mathrm{d}\tau \right) x \,\mathrm{d}\eta \\
&= x' \int_s^t u(t,\eta) k_{m+1}(\eta,s) x \,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

Como $x' \in X'$ era arbitrario, (2.18) es cierto.

Para estimar $\|Q^m\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))}$ usamos (2.18), (2.16) y el Lema 2.1 (con sus propios $\alpha := 1-\gamma$ y $\beta := 1-m\rho$):

$$
\begin{aligned}
&\|(Q^m u)(t,s)x\|_X \\
&\qquad \leq \frac{(c_0 \Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(m\rho)}{\Gamma(\gamma+m\rho)} (t-s)^{m\rho-\alpha} \|u\|_{\mathfrak{K}(X;\alpha)} \|x\|_X.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Recordemos la Formula de Stirling para Γ:

$$
\lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(r)}{\sqrt{2\pi}\, r^{r-1/2} \mathrm{e}^{-r}} = 1. \tag{2.20}
$$

Para m grande y $r := \gamma + m\rho$ se tiene

$$
\frac{\Gamma(r)}{\sqrt{2\pi}\, r^{r-1/2} \mathrm{e}^{-r}} \geq \frac{1}{2}
$$

y luego por (2.19)

$$
\begin{aligned}
\|Q^m\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))} &\leq \frac{\Gamma(\gamma)(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(\gamma+m\rho)} T^{m\rho} \\
&\leq \frac{2\Gamma(\gamma)(c_0\Gamma(\rho))^m}{\sqrt{2\pi}(\gamma+m\rho)^{\gamma+m\rho-1/2}\mathrm{e}^{-\gamma-m\rho}} T^{m\rho}.
\end{aligned}
$$

Se sigue que $\lim_{m\to\infty} \|Q^m\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))}^{1/m} = 0$ y luego $\|Q^m\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))} \leq (1/2)^m$ para m grande. En consecuencia, $I - Q$ tiene inversa en $\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))$ y ella tiene la representación

$$
(I-Q)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m \tag{2.21}
$$

con convergencia en $\mathcal{L}(\mathfrak{K}(X;\alpha))$.

Tratamos de representar $(I-Q)^{-1}$ con un kernel integral. Sean $\varepsilon>0$ y $(t,s)\in\Delta_T^\varepsilon$. Se tiene por (2.16)

$$\|k_m(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)}T^{(m-1)\rho}(t-s)^{-\beta} \le \frac{(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)}T^{(m-1)\rho}\varepsilon^{-\beta}.$$

Eso demuestra para $x\in X$ que converge la serie

$$k(t,s)x := \sum_{m=1}^{\infty} k_m(t,s)x \tag{2.22}$$

en X, uniformemente para $(t,s)\in\Delta_T^\varepsilon$, que $k(\cdot,\cdot)x$ es continua en Δ_T^ε y

$$\|k(t,s)\| \le C_1(t-s)^{-\beta} \tag{2.23}$$

para $(t,s)\in\Delta_T^\varepsilon$, donde

$$C_1 := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(m\rho)}T^{(m-1)\rho}.$$

Dejando $\varepsilon\to 0$ obtenemos que $k\in C(\dot{\Delta}_T,\mathcal{L}_s(X))$ y que se cumple (2.23) para todo $(t,s)\in\dot{\Delta}_T$. Eso muestra que

$$k\in\mathfrak{K}(X;\beta) \qquad \text{y} \qquad \|k\|_{\mathfrak{K}(X;\beta)}\le C_1. \tag{2.24}$$

Sean $a\in\mathfrak{K}(X;\alpha)$, $(t,s)\in\dot{\Delta}_T$, $x\in X$ y $x'\in X'$. Calculamos como cuando obtuvimos (2.19): Lema 2.1:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\int_s^t |x'a(t,\tau)k_m(\tau,s)x|\,\mathrm{d}\tau &\le C\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma)(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(\gamma+m\rho)}(t-s)^{m\rho-\alpha}\\ &\le C(t-s)^{-\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma)(c_0\Gamma(\rho))^m}{\Gamma(\gamma+m\rho)}T^{m\rho}\\ &<\infty,\end{aligned}$$

por los argumentos aplicados arriba. El Teorema 1.38 de [15] permite intercambiar integración y sumación en el siguiente cálculo, donde también usamos

(2.18), (2.21) y (2.22):

$$\begin{aligned}
x'((I-Q)^{-1}a)(t,s)x &= x'a(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} x'(Q^m a)(t,s)x \\
&= x'a(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_s^t x'a(t,\tau)k_m(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= x'a(t,s) + \int_s^t x'a(t,\tau) \sum_{m=1}^{\infty} k_m(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= x'a(t,s) + x' \int_s^t a(t,\tau)k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Como $x' \in X'$ era arbitrario, obtenemos la representación (2.11).

Si $a, k_1 \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$, entonces usando (2.24) y el Lema 2.1 se sigue que

$$\tilde{u}(t,s) := a(t,s) + \int_s^t a(t,\tau)k(\tau,s) \,\mathrm{d}\tau \tag{2.25}$$

está bien definida y $\tilde{u} \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$. Por las definiciones de u y $\tilde{u}$ tenemos $u(t,s)x = \tilde{u}(t,s)x$ para todo $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$ y $x \in X$, es decir, $\tilde{u}$ y u coinciden. Eso demuestra la afirmación de que $u \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$ si $a \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X))$.

Si $a \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$ entonces $a \in \mathfrak{K}(X;0)$. Como $\beta < 1$, el Lema 2.1 implica que el mapeo

$$(t,s) \mapsto \int_s^t a(t,\tau)k(\tau,s)x \,\mathrm{d}\tau$$

tiene extensión continua a Δ_T, para todo $x \in X$. Por (2.11) también $u(\cdot,\cdot)x$ tiene extensión continua para todo $x \in X$, es decir, $u \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X))$. La afirmación para $a \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(X))$ se sigue combinando estas argumentaciones. $\square$

2.2 Existencia del operador de evolución

Nota 2.4. Si X es un subconjunto de un espacio normado, Y un espacio de Banach y $\alpha \in (0,1]$, entonces $f: X \to Y$ es *Hölder continuo* con exponente

α si

$$[f]_\alpha := \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|^\alpha} < \infty.$$

En el caso de $\alpha = 1$ decimos que f es *Lipschitz continuo*. El espacio $C^{0,\alpha}(X, Y)$ de las funciones acotadas y Hölder continuas entre X y Y con la norma

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \in X} \|f(x)\| + [f]_\alpha$$

es un espacio de Banach. Para $\alpha < 1$ se acostumbra escribir $C^\alpha(X, Y)$ en vez de $C^{0,\alpha}(X, Y)$. Para $\alpha = 1$, es decir, para funciones Lipschitz continuas eso no se suele hacer porque causaría confusión con el espacio de las funciones continuamente diferenciables.

Sean $X_1 \overset{d}{\hookrightarrow} X_0$ espacios de Banach con inyección densa. Denotemos sus normas por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_0$. Fijamos $T > 0$ y consideramos una familia $(A(t))_{t \in [0,T]}$ de operadores lineales cerrados en X_0 que satisfacen

(A1) $D(A(t)) = X_1$ para todo $t \in [0, T]$.

(A2) Para todo $t \in [0, T]$ se cumple $[\operatorname{Re} \mu \geq 0] \subseteq \rho(-A(t))$. Existe $M > 0$, independiente de $t \in [0, T]$, tal que

$$\|R(\lambda; -A(t))\|_0 \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \qquad \text{para todo } (\lambda, t) \in [\operatorname{Re} \mu \geq 0] \times [0, T].$$

(A3) Existe $\rho \in (0, 1)$ tal que

$$A \in C^\rho([0, T], \mathcal{L}(X_1, X_0)).$$

Nota 2.5. (a) En las demostraciones del Teorema 1.42 y de la Proposición 1.40 vimos que existen $C > 0$ y $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ tales que

$$\|R(\lambda; -A(t))\|_0 \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \qquad \text{para todo } (\lambda, t) \in \Sigma(\alpha) \times [0, T].$$

Esto implica que $-A(t)$ es un operador sectorial para todo $t \in [0, T]$, uniformemente en t. Además, $\operatorname{ce}(-A(t)) < 0$. Además, como $0 \in \rho(A(t))$ para todo $t \in [0, T]$, la norma de la gráfica de $A(t)$ es equivalente a la norma $\|A(t)\cdot\|_0$, véase la Equación (1.1).

(b) El mapeo que manda un isomorfismo de X_1 en X_0 a su inversa es analítico. En seguida

$$A^{-1} \in C^{\alpha}(X_0, X_1). \tag{2.26}$$

Si

$$C_1 := \sup_{t\in[0,T]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)} \tag{2.27}$$

y

$$C_2 := \sup_{t\in[0,T]} \|A^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)}, \tag{2.28}$$

entonces para todo $x \in X_1$ y $t \in [0,T]$ se tiene

$$\|A(t)x\|_0 \le C_1\|x\|_1$$

y

$$\|x\|_1 = \|A^{-1}(t)A(t)x\|_1 \le C_2\|A(t)x\|_0.$$

En seguida, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|A(t)\cdot\|_0$ son equivalentes en X_1, independientemente de t.

Definición 2.6. Un *operador de evolución* para la familia $(A(t))$ es un mapeo

$$U\colon \Delta_T \to \mathcal{L}(X_0)$$

que tiene las siguientes propiedades:

(U1) $U \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X_0)) \cap C(\Delta_T, \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(X_1)) \cap C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X_0, X_1))$.

(U2) $U(t,t) = I_{X_0}$ y $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$ para todo $0 \le s \le \tau \le t \le T$.

(U3) El mapeo $(t,s) \mapsto A(t)U(t,s)$ está en $C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X_0))$ y

$$\sup_{(t,s)\in\dot{\Delta}_T} (t-s)\|A(t)U(t,s)\|_{\mathcal{L}(X_0)} < \infty. \tag{2.29}$$

(U4) $U(\cdot,s) \in C^1((s,T], \mathcal{L}(X_0))$ para todo $s \in [0,T)$, y

$$\partial_1 U(t,s) = -A(t)U(t,s) \qquad \text{para todo } t \in (s,T].$$

$U(t,\cdot) \in C^1([0,t), \mathcal{L}_s(X_1, X_0))$ para todo $t \in (0,T]$, y

$$\partial_2 U(t,s)x = U(t,s)A(s)x \qquad \text{para todo } s \in [0,t),\ x \in X_1.$$

Proposición 2.7. *Si $-A$ es un operador sectorial tal que* $\mathrm{ce}(-A) < 0$*, entonces el mapeo constante $t \mapsto A$ satisface las condiciones* (A1)–(A3)*. Sea Q el C_0-semigrupo analítico generado por $-A$, y sea U el operador de evolución generado por A. Entonces $U(t,s) = Q(t-s)$ para todo $t \geq s \geq 0$.*

Demostración. **(U1):** Como Q es un C_0-semigrupo, $Q \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{L}_s(X_0))$. Como Q es diferenciable (Teorema 1.36 y Teorema 1.42(ii)), la Equación (1.74) implica que $AQ \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X_0))$. Para $x \in X_0$ y $t_n \to t^*$ en $\mathbb{R}^+$ obtenemos con la Nota 2.5(a) que

$$\begin{aligned}\|(Q(t_n) - Q(t^*))x\|_1 &\leq C\|A(Q(t_n) - Q(t^*))x\|_0 \\ &\leq C\|A(Q(t_n) - Q(t^*))\|_{\mathcal{L}(X_0)}\|x\|_0,\end{aligned}$$

es decir,

$$\|(Q(t_n) - Q(t^*))\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} \leq C\|A(Q(t_n) - Q(t^*))\|_{\mathcal{L}(X_0)} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Eso muestra que $Q \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X_0, X_1))$. Falta demostrar que $Q \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{L}_s(X_1))$. Para ello sean $x \in X_1$ y $t_n \to t^*$ en $\mathbb{R}_0^+$. Como arriba tenemos que

$$\begin{aligned}\|(Q(t_n) - Q(t^*))x\|_1 &\leq C\|A(Q(t_n) - Q(t^*))x\|_0 \\ &= C\|(Q(t_n) - Q(t^*))Ax\|_0 \to 0\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que $Q \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{L}_s(X_0))$. Como $x \in X_1$ era arbitrario, eso muestra la afirmación.

(U2): Trivial por las propiedades de Q.

(U3): Es una consecuencia del Teorema 1.36 y del Teorema 1.42(ii).

(U4): Una consecuencia de la diferenciabilidad de Q es que $Q \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(X_0))$. Además, para $s \geq 0$ fijo el Teorema 1.36 implica que $\mathrm{d}Q(t-s)/\mathrm{d}t = -AQ(t-s)$ para $t > s$. Esto muestra las primeras dos afirmaciones.

Sean ahora $x \in X_1$ y $t > 0$ fijos. Se sigue que la derivada del mapeo $s \mapsto Q(t-s)x$ es $AQ(t-s)x = Q(t-s)Ax$ para $s \in [0,t)$. Además, el mapeo $s \mapsto Q(t-s)Ax$ es continuo de $[0,t)$ en X_0. Esto muestra las afirmaciones faltantes. □

Nota 2.8. La propiedad (U3) y la Nota 2.5(b) implican que

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} \le C(t-s)^{-1} \qquad \text{para todo } (t,s) \in \dot{\Delta}_T. \tag{2.30}$$

Aquí la constante C solamente depende de las constantes C_1 y C_2 de la Nota 2.5(b) y del valor del supremo en (2.29).

Definición 2.9. Una *solución* de (2.1) es una función

$$u \in C([s,T], X_0) \cap C^1((s,T], X_0)$$

tal que $u(t) \in X_1$ para todo $t \in (s,T]$ y tal que se cumple (2.1).

Proposición 2.10. *Si U es un operador de evolución para $(A(t))$ y u una solución de* (2.1)*, entonces*

$$u \in C((s,T], X_1) \tag{2.31}$$

y vale la representación de u por la fórmula de variación de parámetros

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \textit{para todo } t \in [s,T]. \tag{2.32}$$

Demostración. Supongamos que $t_n \to t^*$ en $(s,T]$. Como $\dot{u} + Au = f$, el mapeo Au es continuo de $(s,T]$ en X_0. Usamos esto, (A3) y la Nota 2.5(b) para calcular

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(t^*)\|_1 &\le C\|A(t_n)u(t_n) - A(t_n)u(t^*)\|_0 \\ &\le C\left(\|A(t_n)u(t_n) - A(t^*)u(t^*)\|_0 + \|A(t^*)u(t^*) - A(t_n)u(t^*)\|_0\right) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Eso demuestra (2.31).

Sean $s < \tau < t \le T$. Mostremos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} U(t,\tau)u(\tau) = U(t,\tau)A(\tau)u(\tau) + U(t,\tau)\dot{u}(\tau). \tag{2.33}$$

Escogemos una sucesión $(h_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $h_n \to 0$. Se tiene que

$$B_n := \frac{U(t,\tau+h_n) - U(t,\tau)}{h_n} \to U(t,\tau)A(\tau) \tag{2.34}$$

en $\mathcal{L}_s(X_1, X_0)$ cuando $n \to \infty$ por (U4). Por el principio de acotación uniforme B_n es una sucesión acotada. Es fácil ver que luego $u(\tau + h_n) \to u(\tau)$ en X_1 implica que

$$\frac{(U(t,\tau+h_n) - U(t,\tau))u(\tau+h_n)}{h_n} \to U(t,\tau)A(\tau)u(\tau) \tag{2.35}$$

en X_0 cuando $n \to \infty$. Por otro lado

$$U(t,\tau)\frac{u(\tau+h_n) - u(\tau)}{h_n} \to U(t,\tau)\dot{u}(\tau) \tag{2.36}$$

en X_1 cuando $n \to \infty$ ya que $u \in C^1((s,T], X_0)$ y $U(t,\tau) \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$. Juntando (2.35) y (2.36) obtenemos (2.33).

Ahora obtenemos de (2.33) que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(t,\tau)u(\tau) &= U(t,\tau)A(\tau)u(\tau) + U(t,\tau)\dot{u}(\tau)\\ &= U(t,\tau)f(\tau),\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}u(t) - U(t,s)u(s) = U(t,t)u(t) - U(t,s)u(s) &= \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Esta ecuación comprueba (2.32). □

La proposición anterior muestra que la Definición 2.6 es suficiente para representar soluciones de (2.1). Falta ver la existencia del operador de evolución y que (2.32) define una solución de (2.1).

Teorema 2.11. *Existe un y sólo un operador de evolución U para la familia $(A(t))$.*

Idea de la demostración. Si $s \in [0,T)$ entonces escribimos Q_s para el C_0-

semigrupo generado por el operador sectorial $-A(s)$, y $V_s(t,\tau) := Q_s(t-\tau)$, el operador de evolución de la familia constante $t \mapsto A(s)$ de operadores sectoriales según la Proposición 2.7. Si U es un operador de evolución para la familia $(A(t))$, para todo $x \in X_0$ el mapeo

$$\tau \mapsto U(t,\tau)V_s(\tau,s)x$$

está en $C([s,T],X_0) \cap C^1((s,T],X_0)$. Esto es una consecuencia de la validez de (U1), (U4) para U y V_s. Véase también la demostración de la Proposición 2.10 para la diferenciabilidad de ese mapeo. Se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(t,\tau)V_s(\tau,s)x = U(t,\tau)\big(A(\tau)-A(s)\big)V_s(\tau,s)x \qquad \text{para todo } 0 \le s < \tau < t \le T\ x \in X_0. \tag{2.37}$$

Con la definición

$$k_1(t,s) := -\big(A(t)-A(s)\big)V_s(t,s)$$

obtenemos que $k_1 \in C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X_0))$. Estimamos para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$, usando (A3) y la Nota 2.8:

$$\begin{aligned}\|k_1(t,s)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \le \|A(t)-A(s)\|_{\mathcal{L}(X_1,X_0)}\|V_s(t,s)\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)}& \\ \le C(t-s)^{\rho-1}&.\end{aligned}$$

En seguida, $k_1 \in \mathfrak{K}(X_0; 1-\rho)$ con $1-\rho < 1$.

Podemos escribir mediante una integración de (2.37):

$$U(t,s)x = V_s(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)k_1(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{para todo } (t,s) \in \dot{\Delta}_T,\ x \in X_0. \tag{2.38}$$

Como $V_s \in \mathfrak{K}(X_0;0)$, el Teorema 2.3 implica que esta ecuación tiene a lo más una solución en $\mathfrak{K}(X_0;0)$, es decir, U es el único operador de evolución de A.

Inversamente, el Teorema 2.3 implica la existencia de una solución U de (2.38) en $\mathfrak{K}(X_0;0) \cap C(\dot{\Delta}_T, \mathcal{L}(X_0))$. La demostración de que esa solución es un operador de evolución de la familia $(A(t))_t$ es muy larga, y por ello la saltamos. Una demostración detallada se encuentra, por ejemplo, en [14, Theorem 5.6.1]. □

Ejemplos 2.12. (a) Sea $-A$ sectorial y $k \in C([0,T], \mathbb{R}_0^+)$ continuo. Entonces la familia dada por $A(t) := k(t)A$ tiene el operador de evolución

$$U(t,s) := \exp\left(-\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{2.39}$$

(b) Si $A \in C([0,T], \mathcal{L}(X_0))$, y si existe un operador de evolución para $(A(t))$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} U(\tau,s)x = -A(\tau)U(\tau,s)x$$

y luego

$$U(t,s)x = x - \int_s^t A(\tau)U(\tau,s)x\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{para todo } (t,s) \in \Delta_T,\ x \in X_0.$$

El Teorema 2.3 implica que en este caso (U1)–(U4) se cumplen en la topología uniforme de $\mathcal{L}(X_0)$.

La fórmula (2.39) no valdría en este caso porque los exponenciales no conmutarían.

Teorema 2.13. *Si $f \in C^\alpha([s,T], X_0)$, $X = X_0$, entonces* (2.1) *tiene una y sólo un solución.*

Idea de la demostración. Uno define la función u por la fórmula de variación de parámetros (2.32) y luego demostrar que u suficientemente regular y una solución de (2.1). Informalmente es fácil ver que u es una solución una vez demostrada la regularidad. Pero ella requiere de mucho trabajo, similarmente como la demostración de las propiedades de operadores de evolución, así que no la damos aquí. En este texto solo nos preocuparemos con soluciones dadas en la forma (2.32). □

2.3 Interpolación de espacios

En problemas no lineales resulta ser necesario considerar situaciones abstractas aún más complicadas. En problemas de Cauchy abstractos del tipo

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), & t \in (s, T], \\ u(s) = u_0, \end{cases} \tag{2.40}$$

donde $-A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ es sectorial en X_0 como en la Nota 2.8, las aplicaciones demandan considerar no linealidades $f: Z \to X_0$ para un espacio de Banach Z que cumple $X_1 \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} Z \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} X_0$. Obtendremos los espacios Z mediante interpolación entre los espacios X_1 y X_0.

Si u es una solución de (2.40) en un cierto sentido y si U es el operador de evolución de A, entonces u cumple

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau) f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [s, T]. \tag{2.41}$$

Buscar soluciones será equivalente a buscar soluciones de (2.41) mediante un teorema de punto fijo. En esto necesitaremos conocimiento del comportamiento de U como mapeo entre los espacios X_0, X_1 y también Z.

Para espacios de Banach X, Y denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathrm{iso}}(X, Y)$ los isomorfismos entre X y Y. Una pareja $\overline{E} = (E_0, E_1)$ de espacios de Banach con $E_1 \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} E_0$ es una *B-pareja*. Denotaremos la colección de los espacios de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$ por $\mathcal{B}_1$, y la colección de las B-parejas por $\mathcal{B}_2$. Un *morfismo de B-parejas* $T: \overline{E} \to \overline{F}$ es un mapeo $T \in \mathcal{L}(E_0, F_0) \cap \mathcal{L}(E_1, F_1)$. Un morfismo $T: \overline{E} \to \overline{F}$ es un *isomorfismo* si $T \in \mathcal{L}_{\mathrm{iso}}(E_0, F_0)$. Denotaremos por $\mathcal{L}(\overline{E}, \overline{F})$ y por $\mathcal{L}_{\mathrm{iso}}(\overline{E}, \overline{F})$ las colecciones de morfismos y isomorfismos entre $\overline{E}$ y $\overline{F}$. Escribimos $\mathcal{L}(\overline{E}) := \mathcal{L}(\overline{E}, \overline{E})$ y $\mathcal{L}_{\mathrm{iso}}(\overline{E}) := \mathcal{L}_{\mathrm{iso}}(\overline{E}, \overline{E})$.

Un espacio de Banach X con $E_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow E_0$ es un *espacio intermedio* de $\overline{E}$. Aquí, la segunda inyección es densa automáticamente, pero la primera inyección no necesariamente lo es. Una pareja (X, Y) de espacios de Banach es una *I-pareja para la pareja $(\overline{E}, \overline{F})$ de B-parejas* si se cumplen

(i) X es un espacio intermedio para $\overline{E}$ y Y es un espacio intermedio para $\overline{F}$.

(ii) Si $T \in \mathcal{L}(\overline{E}, \overline{F})$, entonces $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Definición 2.14. Un *método de interpolación* es un mapeo $\mathfrak{F}: \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$ tal que para toda pareja $(\overline{E}, \overline{F})$ de B-parejas el par $(\mathfrak{F}(\overline{E}), \mathfrak{F}(\overline{F}))$ es una I-pareja para $(\overline{E}, \overline{F})$. Un método de interpolación $\mathfrak{F}$ es *de exponente* $\theta \in (0,1)$ si existe una constante $c(\mathfrak{F}) > 0$ tal que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}(\overline{E}),\mathfrak{F}(\overline{F}))} \leq c(\mathfrak{F})\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(E_0,F_0)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(E_1,F_1)} \quad \text{para todo } \overline{E}, \overline{F} \in \mathcal{B}_2 \text{ y } T \in \mathcal{L}(\overline{E}, \overline{F}). \tag{2.42}$$

Si $c(\mathfrak{F}) = 1$ es posible entonces $\mathfrak{F}$ es *exacto*.

Nota 2.15. Si uno entiende $\mathcal{B}_i$ como categorías, uno pide que $\mathfrak{F}$ sea un funtor covariante entre $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ con la propiedad adicional de generar I-parejas. En la notación de arriba $\mathfrak{F}(T) = T$.

Proposición 2.16. *Sean $\mathfrak{F}$ un método de interpolación y $\overline{E}, \overline{F}$ B-parejas. Entonces se cumplen:*

(a) *Si $E_0 = E_1$, entonces $\mathfrak{F}(\overline{E}) \doteq E_0$.*

(b) *Si $\overline{E} \hookrightarrow \overline{F}$, entonces $\mathfrak{F}(\overline{E}) \hookrightarrow \mathfrak{F}(\overline{F})$. Particularmente, si $\overline{E} \doteq \overline{F}$, entonces $\mathfrak{F}(\overline{E}) \doteq \mathfrak{F}(\overline{F})$.*

(c) *Si $T \in \mathcal{L}_{\text{iso}}(\overline{E}, \overline{F})$, entonces $T \in \mathcal{L}_{\text{iso}}(\mathfrak{F}(\overline{E}), \mathfrak{F}(\overline{F}))$.*

Demostración. **(a):** Como $E_0 = E_1 \hookrightarrow \mathfrak{F}(\overline{E}) \hookrightarrow E_0$, la afirmación es cierta.

(b): Sea $i : \overline{E} \hookrightarrow \overline{F}$. Entonces i es inyectiva en E_0, así que $i : \mathfrak{F}(\overline{E}) \hookrightarrow \mathfrak{F}(\overline{F})$, ya que $\mathfrak{F}(\overline{E}) \subseteq E_0$.

(c): $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}(\overline{E}), \mathfrak{F}(\overline{F}))$ y $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}(\overline{F}), \mathfrak{F}(\overline{E}))$ implican la afirmación. □

Proposición 2.17. *Sea $\mathfrak{F}$ un método de interpolación de exponente θ. Entonces existe una constante $\tilde{c}(\mathfrak{F})$ tal que*

$$\|x\|_{\mathfrak{F}(\overline{E})} \leq \tilde{c}(\mathfrak{F})\|x\|^{1-\theta}_{E_0}\|x\|^{\theta}_{E_1} \qquad \textit{para todo } \overline{E} \in \mathcal{B}_2 \textit{ y } x \in E_1. \tag{2.43}$$

Demostración. Sea $\overline{F} := (\mathbb{K}, \mathbb{K})$, y definimos $\mathbb{K}_\theta := \mathfrak{F}(\overline{F})$ y $E_\theta := \mathfrak{F}(\overline{E})$. Fijamos $x \in E_1$ y definimos $T \in \mathcal{L}(\overline{F}, \overline{E})$ por $T\lambda := \lambda x$. Se sigue que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K},E_\alpha)} = \|x\|_{E_\alpha} \qquad \text{para } \alpha = 0, 1, \theta. \tag{2.44}$$

Además, $\mathbb{K}_\theta \doteq \mathbb{K}$ por la Proposición 2.16(a). Entonces existe $\hat{c}(\mathfrak{F}) > 0$ tal que

$$\|\lambda\|_{\mathbb{K}_\theta} \leq \hat{c}(\mathfrak{F})|\lambda| \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{K}. \tag{2.45}$$

En consecuencia, (2.44) y (2.45) implican

$$\begin{aligned}
\|x\|_{E_\theta} &= \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K},E_\theta)} \\
&= \sup_{\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda x\|_{E_\theta}}{|\lambda|} \\
&\le \hat{c}(\mathfrak{F}) \sup_{\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda x\|_{E_\theta}}{\|\lambda\|_{\mathbb{K}_\theta}} \\
&= \hat{c}(\mathfrak{F})\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_\theta,E_\theta)} \\
&\le \hat{c}(\mathfrak{F})c(\mathfrak{F})\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(\mathbb{K},E_0)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(\mathbb{K},E_1)} \\
&= \hat{c}(\mathfrak{F})c(\mathfrak{F})\|x\|^{1-\theta}_{E_0}\|x\|^{\theta}_{E_1}.
\end{aligned}$$

□

En lo que sigue usaremos una notación mas sencilla. Si para todo θ está dada un método exacto $\mathfrak{F}_\theta$ de interpolación de exponente θ, entonces ponemos

$$E_\theta := (E_0, E_1)_\theta := \mathfrak{F}_\theta(\overline{E})$$

y

$$\|\cdot\|_\theta := \|\cdot\|_{E_\theta}.$$

Definición 2.18. Para todo $\theta \in (0,1)$ sea $(\cdot,\cdot)_\theta$ un método exacto de interpolación. La familia $((\cdot,\cdot)_\theta)_{\theta\in(0,1)}$ es una *familia admisible de métodos de interpolación* si se cumplen:

(FA1) $E_1 \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} E_{\theta_2} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} E_{\theta_1} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} E_0$ si $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$.

(FA2) Si $E_1 \hookrightarrow E_0$ es compacto, entonces los encajes anteriores son compactos.

(FA3) Si $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le 1$, $\nu \in (0,1)$ y $\theta := (1-\nu)\theta_1 + \nu\theta_2$, entonces $(E_{\theta_1}, E_{\theta_2})_\nu \doteq E_\theta$.

Nota 2.19. (FA3) se llama la *propiedad de reiteración*, por razones obvias. Con las notaciones de (FA3) y con la Proposición 2.17 se sigue que

$$\|x\|_\theta \le c(\theta,\theta_1,\theta_2)\|x\|^{1-\nu}_{\theta_1}\|x\|^{\nu}_{\theta_2} = c(\theta,\theta_1,\theta_2)\|x\|^{\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}}_{\theta_1}\|x\|^{\frac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}}_{\theta_2}. \tag{2.46}$$

En esta situación uno también habla de una *escala de espacios de Banach* $(E_\theta)_{\theta\in[0,1]}$.

El método real

Aquí permitimos $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Para una B-pareja $\overline{E}$ definimos el K-funcional $K(\cdot\,,\,\cdot\,;\overline{E})\colon \mathbb{R}^+ \times E_0 \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$K(t,x;\overline{E}) := \operatorname{ínf}\big\{\|x-y\|_0 + t\|y\|_1 \;\big|\; y \in E_1\big\}.$$

Se sigue que $K(\cdot,x;\overline{E})$ es creciente y concavo en t para todo $x \in E_0$, es decir, medible. Si $\theta \in (0,1)$ y $p \in [1,\infty)$, entonces definimos

$$\|x\|_{\theta,p} := \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x;\overline{E})\big)^p \,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/p} \tag{2.47}$$

y

$$\|x\|_{\theta,\infty} := \sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,x;\overline{E}).$$

Para $p \in [1,\infty]$ ponemos

$$\mathfrak{F}^{\mathbb{R}}_{\theta,p}(\overline{E}) := (E_0,E_1)_{\theta,p} := \{x \in E_0 \mid \|x\|_{\theta,p} < \infty\}.$$

Si $\theta \in (0,1)$ y $p \in [1,\infty]$, entonces $(E_0,E_1)_{\theta,p}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\theta,p}$ y $\mathfrak{F}^{\mathbb{R}}_{\theta,p}$ es un método exacto de interpolación de exponente θ. Si $p \in [1,\infty)$, entonces $((\cdot,\cdot)_{\theta,p})_{\theta\in(0,1)}$ es una familia admisible.

Existen encajes entre los espacios intermedios de diferentes exponentes θ y p: si $1 \le p \le q \le \infty$, entonces

$$(E_0,E_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (E_0,E_1)_{\theta,q}.$$

Si $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ y $1 \le p,q \le \infty$, entonces

$$(E_0,E_1)_{\theta_1,p} \hookrightarrow (E_0,E_1)_{\theta_0,q}.$$

Este método de interpolación es extremal en el siguiente sentido: Si $\mathfrak{F}_\theta$ es un método de interpolación de exponente θ, entonces

$$(E_0,E_1)_{\theta,1} \hookrightarrow \mathfrak{F}_\theta(\overline{E}) \hookrightarrow (E_0,E_1)_{\theta,\infty}. \tag{2.48}$$

Heurísticamente se puede entender esa construcción como sigue: sea $C > 0$ tal que $\|x\|_0 \le C\|x\|_1$ para todo $x \in E_1$. Si $t \ge C$ y $y \in E_1$ entonces

$$\|x\|_0 \le \|x-y\|_0 + \|y\|_0 \le \|x\|_0 \le \|x-y\|_0 + t\|y\|_1,$$

así que $K(t,x;\overline{E}) = \|x\|_0$. Por lo tanto, la convergencia de la integral en (2.47) solamente depende del comportamiento de K para t chico. Para $t = 0$ se tiene que $K(0,x;\overline{E}) = \operatorname{dist}(x, X_1) = 0$, porque X_1 es denso en X_0. Así se ve como entra la relación entre x y X_1. Lo mayor que es θ, lo "más cerca" debe de estar x a X_1 para pertenecer a E_θ.

Para demostraciones de estos hechos véase [5].

El método complejo

Sea ahora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ponemos $S := [\operatorname{Re}\lambda \in (0,1)]$, $S_0 := \mathrm{i}\mathbb{R}$ y $S_1 := 1 + S_0$. Entonces $\partial S = S_0 \cup S_1$. Si $\overline{E} \in \mathcal{B}_2$ entonces denotamos por $\mathcal{A}(\overline{E})$ el espacio de funciones acotadas y continuas $f : \overline{S} \to E_0$ tales que f es holomorfo en S, $F(S_i) \subseteq E_i$ para $i = 0, 1$,

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in S_0}} \|f(\lambda)\|_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in S_1}} \|f(\lambda)\|_1 = 0.$$

Con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\overline{E})} := \max\left\{ \sup_{\lambda\in S_0} \|f(\lambda)\|_0,\ \sup_{\lambda\in S_1} \|f(\lambda)\|_1 \right\}$$

$\mathcal{A}(\overline{E})$ es un espacio de Banach.

Ponemos

$$\mathfrak{F}_\theta^{\mathbb{C}}(\overline{E}) := [E_0, E_1]_\theta := \{f(\theta) \mid f \in \mathcal{A}(\overline{E})\}.$$

Si $\theta \in (0,1)$, entonces $[E_0, E_1]_\theta$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\theta := \inf\big\{\|f\|_{\mathcal{A}(\overline{E})} \mid f \in \mathcal{A}(\overline{E}),\ x = f(\theta)\big\},$$

y $\mathfrak{F}_\theta^{\mathbb{C}}$ es un método exacto de interpolación de exponente θ. Además, $([\cdot,\cdot]_\theta)_{\theta\in(0,1)}$ es una familia admisible.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces definimos

$$[E_0, E_1]_\theta := [(E_0)_\mathbb{C}, (E_1)_\mathbb{C}]_\theta \cap E_0.$$

Así se obtiene una familia admisible para espacios reales.

Para demostraciones de estos hechos véase [5].

El método continuo

Aquí permitimos $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. La familia $((\cdot,\cdot)_{\theta,\infty})_\theta$ no es admisible. La única propiedad que falla es la densidad del encaje $E_1 \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,\infty}$. Denotemos para $\theta \in (0, 1)$

$$(E_0, E_1)^0_{\theta,\infty} := \overline{E_1}^{(E_0,E_1)_{\theta,\infty}}, \tag{2.49}$$

es decir, el cierre de E_1 en $(E_0, E_1)_{\theta,\infty}$. En seguida, $(\cdot,\cdot)^0_{\theta,\infty}$ es un método exacto de interpolación de exponente θ, y la familia $((\cdot,\cdot)^0_{\theta,\infty})_{\theta\in(0,1)}$ es admisible.

Sea A un operador cerrado en E_0 con $D(A) = E_1$ y tal que $-A$ es el generador de un C_0-semigrupo $Q(t)$ en E_0. Fijamos $\gamma > 0$ como exponente en la cota exponencial del Teorema 1.23. Definimos espacios normados $Y_\theta(A)$ y $Z_\theta(A)$ por

$$\begin{aligned} Y_\theta(A) &:= \{x \in E_0 \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\theta \|R(\lambda; -A)x\|_1 = 0\}, \\ \|x\|_{Y_\theta(A)} &:= \sup_{\lambda\geq\gamma} \lambda^\theta \|R(\lambda; -A)x\|_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Z_\theta(A) &:= \{x \in E_0 \mid \lim_{t\to 0+} t^{-\theta} \|Q(t)x - x\|_0 = 0\}, \\ \|x\|_{Z_\theta(A)} &:= \|x_0\|_0 + \sup_{t\in(0,1]} t^{-\theta} \|Q(t)x - x\|_0. \end{aligned}$$

Entonces $Y_\theta(A)$ y $Z_\theta(A)$ son espacios de Banach y se cumple

$$(E_0, E_1)^0_{\theta,\infty} \doteq Y_\theta(A) \doteq Z_\theta(A). \tag{2.50}$$

Para estos hechos se pueden consultar [7] y [10].

La comparación entre los tres métodos de interpolación es la siguiente: sean

$$0 < \alpha < \theta < \beta < 1 \qquad \text{y} \qquad 1 \leq p < \infty.$$

entonces se cumple

$$(E_0, E_1)_{\beta,p} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (E_0, E_1)^0_{\beta,\infty} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (E_0, E_1)_{\theta,1} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} [E_0, E_1]_\theta \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (E_0, E_1)^0_{\theta,\infty} \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} (E_0, E_1)_{\alpha,p}. \tag{2.51}$$

2.4 El operador de evolución en espacios de interpolación

Sea $((\cdot,\cdot)_\theta)_{\theta\in(0,1)}$ una familia admisible de métodos de interpolación y sea (X_0, X_1) una B-pareja. Para $\alpha \in (0,1)$ ponemos $X_\alpha := (X_0, X_1)_\alpha$. Denotemos por $\|\cdot\|_\alpha$ la norma en X_α y por $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ la norma en $\mathcal{L}(X_\alpha, X_\beta)$. Para cualquier $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ tenemos

$$X_\beta \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} X_\alpha. \tag{2.52}$$

Sea $(A(t))_{t\in[0,T]}$ una familia de operadores cumpliendo (A1)–(A3) y sea U el operador de evolución relacionado. La propiedad (U1) dice que $U(t,s) \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$ para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$. Junto con (2.52) obtenemos

$$U(t,s) \in \mathcal{L}(X_\alpha, X_\beta) \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in [0,1],\ (t,s) \in \dot{\Delta}_T. \tag{2.53}$$

Por la propiedad (FA2) este operador es compacto si $X_1 \hookrightarrow X_0$ es compacto y si $(\alpha, \beta) \neq (0,1)$.

Ponemos

$$\Lambda := \text{máx}\left\{ \sup_{(t,s)\in\Delta_T} \|U(t,s)\|_{0,0},\ \sup_{(t,s)\in\Delta_T} \|U(t,s)\|_{1,1},\ \sup_{(t,s)\in\dot{\Delta}_T} (t-s)\|U(t,s)\|_{0,1} \right\}. \tag{2.54}$$

Este número es finito por la propiedad (U1), por la discusión antes de la Proposición 1.14 y por la Nota 2.8.

Lema 2.20. (a) *Para todo* $\alpha \in [0,1]$ *se cumple* $U \in C(\Delta_T, \mathcal{L}_s(X_\alpha))$.

(b) *Para* $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ *existe* $C = C(\alpha, \beta, \Lambda)$ *tal que* $\|U(t,s)\|_{\beta,\alpha} \le C$ *para todo* $(t,s) \in \Delta_T$.

(c) *Para* $0 \le \alpha < \beta \le 1$ *existe* $C = C(\alpha, \beta, \Lambda)$ *tal que* $\|U(t,s)\|_{\alpha,\beta} \le C(t-s)^{\alpha-\beta}$ *para todo* $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$.

Demostración. **(b):** Como $(\cdot,\cdot)_\alpha$ es de exponente α, eso implica que

$$\sup_{\Delta_T} \|U\|_{\alpha,\alpha} \le \sup_{\Delta_T} \|U\|_{0,0}^{1-\alpha} \|U\|_{1,1}^{\alpha} \le \Lambda,$$

y la inyección continua de X_β en X_α implica la afirmación.

(a): Por la propiedad (U1), para todo $x \in X_1$ el mapeo $U(\cdot,\cdot)x$ es continuo de Δ_T en X_1 y luego también en X_α. Por el inciso (b), la densidad de X_1 en X_α y la Proposición 1.14(b) $U(\cdot,\cdot)x$ es continuo como mapeo en X_α para todo $x \in X_\alpha$.

(c): Fijamos $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$. Considerando $(E_0, E_1) := (X_0, X_0)$ y $(F_0, F_1) := (X_0, X_1)$ y usando (U1) obtenemos para cualquier $\gamma \in (0,1)$ por la definición de Λ que

$$\|U(t,s)\|_{0,\gamma} \le \|U(t,s)\|_{0,0}^{1-\gamma} \|U(t,s)\|_{0,1}^{\gamma} \le \Lambda (t-s)^{-\gamma}. \tag{2.55}$$

Consideramos particularmente $\gamma := (\beta-\alpha)/(1-\alpha)$. Se tiene $(1-\alpha)\gamma + \alpha = \beta$, y la propiedad (FA3) de reiteración implica que

$$(X_\gamma, X_1)_\alpha \doteq X_\beta. \tag{2.56}$$

Usando $(E_0, E_1) := (X_0, X_1)$ y $(F_0, F_1) := (X_\gamma, X_1)$ vemos con (2.55) que

$$\begin{aligned}
\|U(t,s)\|_{\alpha,\beta} &= \|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, F_\alpha)} \\
&\le \|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0,F_0)}^{1-\alpha} \|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1,F_1)}^{\alpha} \\
&\le \|U(t,s)\|_{0,\gamma}^{1-\alpha} \|U(t,s)\|_{1,1}^{\alpha} \\
&\le \Lambda (t-s)^{\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.21. *Sean* X *un espacio de Banach,* $T > 0$ *y* $f \in C([0,T], X) \cap C^1((0,T], X)$ *tal que* f' *tiene extensión continua* g *a* $[0,T]$. *Entonces* $f \in C^1([0,T], X)$ *y* $f'(0) = g(0)$.

Demostración. Sean $0 < \delta < \varepsilon$. El teorema fundamental del cálculo dice que

$$f(\varepsilon) - f(\delta) - g(0)\varepsilon = \int_\delta^\varepsilon (f'(\tau) - g(0))\,\mathrm{d}\tau - g(0)\delta$$
$$= \int_\delta^\varepsilon (g(\tau) - g(0))\,\mathrm{d}\tau - g(0)\delta.$$

Dejando $\delta \to 0$ en esta igualdad implica

$$f(\varepsilon) - f(0) - g(0)\varepsilon = \int_0^\varepsilon (g(\tau) - g(0))\,\mathrm{d}\tau,$$

es decir,

$$\|f(\varepsilon) - f(0) - g(0)\varepsilon\| \le \sup_{\tau\in[0,\varepsilon]} \|g(\tau) - g(0)\|\varepsilon = o(\varepsilon) \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0,$$

por la continuidad de g. □

Consideremos ahora la regularidad de la solución del problema de Cauchy lineal homogéneo

$$\begin{cases} \dot u + A(t)u = 0, & t \in (s,T], \\ u(s) = u_0, \end{cases} \tag{2.57}$$

que está dada por $U(t,s)u_0$:

Lema 2.22. *Sea $s \in [0,T)$ dado. Entonces se cumplen:*

(a) *Para $\alpha \in [0,1]$ se tiene que $U(\cdot,s) \in C([s,T],\mathcal{L}_\mathrm{s}(X_\alpha))$.*

(b) *Si $0 \le \alpha < \beta \le 1$ entonces $U(\cdot,s) \in C^{\beta-\alpha}([s,T],\mathcal{L}(X_\beta,X_\alpha))$, donde usamos la convención $C^{1-0} := C^{0,1}$. La norma*

$$\|U(\cdot,s)\|_{C^{\beta-\alpha}([s,T],\mathcal{L}(X_\beta,X_\alpha))} \tag{2.58}$$

solamente depende de C_1 en (2.27), Λ y de α,β.

(c) *Se tiene que $U(\cdot,s) \in C^1([s,T],\mathcal{L}_\mathrm{s}(X_1,X_0))$.*

Demostración. **(a):** Es una consecuencia directa del Lema 2.20(a).

(b): Consideremos primero el caso $\alpha = 0$ y $\beta \in (0, 1]$. La propiedad (U4) dice que $U(\cdot, s) \in C^1((s, T], \mathcal{L}(X_0))$ y $\partial_1 U(t, s) = -A(t)U(t, s)$ para todo $t \in (s, T]$. Sean $s \leq r < t \leq T$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|\partial_1 U(t, s)\|_{\beta,0} = \|A(t)U(t, s)\|_{\beta,0} &\leq \|A(t)\|_{1,0}\|U(t, s)\|_{\beta,1} \\ &\leq C\|U(t, r)\|_{\beta,1}\|U(r, s)\|_{\beta,\beta} \leq C(t - r)^{\beta-1}.\end{aligned}$$

En la penúltima desigualdad usamos (A3), y en la última el Lema 2.20. La constante solamente depende de Λ y de C_1 en (2.27). Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente chico y $x \in X_\beta$ entonces

$$\begin{aligned}\|U(t, s)x - U(r + \varepsilon, s)x\|_0 &= \left\| \int_{r+\varepsilon}^{t} \partial_1 U(\tau, s)x \, \mathrm{d}\tau \right\|_0 \\ &\leq \int_{r+\varepsilon}^{t} \|\partial_1 U(\tau, s)\|_{\beta,0} \, \mathrm{d}\tau \|x\|_\beta \\ &\leq C \int_{r+\varepsilon}^{t} (\tau - r)^{\beta-1} \, \mathrm{d}\tau \|x\|_\beta \\ &\leq C(t - r)^\beta \|x\|_\beta.\end{aligned}$$

Dejando $\varepsilon \to 0$ eso implica

$$\|U(t, s)x - U(r, s)x\|_0 \leq C(t - r)^\beta \|x\|_\beta$$

y luego

$$\|U(t, s) - U(r, s)\|_{\beta,0} \leq C(t - r)^\beta \qquad \text{para todo } t, r \in [s, T]. \tag{2.59}$$

Eso demuestra (b) en el caso $\alpha = 0$.

Trataremos el caso $\alpha > 0$. Denotando $(E_0, E_1) := (X_\beta, X_\beta)$ y $(F_0, F_1) := (X_0, X_\beta)$ la propiedad (FA3) de reiteración implica que $(F_0, F_1)_{\alpha/\beta} \doteq X_\alpha$. Por lo tanto,

$$\|L\|_{\beta,\alpha} \leq \|L\|_{\beta,0}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \|L\|_{\beta,\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad \text{para todo } L \in \mathcal{L}(X_\beta). \tag{2.60}$$

En seguida, (2.59) y el Lema 2.20(a) nos permiten estimar

$$\|U(t, s) - U(r, s)\|_{\beta,\alpha}$$

$$\leq \|U(t,s)-U(r,s)\|_{\beta,0}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \|U(t,s)-U(r,s)\|_{\beta,\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}} \leq C|t-r|^{\beta-\alpha}.$$

(c): Sea $x \in X_1$. Las propiedades (U1) y (U4) dicen que $U(\cdot,s)x \in C^1((s,T],X_0) \cap C([s,T],X_1)$, y $\partial_1 U(t,s)x = -A(t)U(t,s)x$. Por (A3)

$$\partial_1 U(\cdot,s)x = -A(\cdot)U(\cdot,s)x \in C([s,T],X_0).$$

Entonces el Lema 2.21 aplica la afirmación. □

Corolario 2.23. *Sean $\beta \in [0,1]$, $(s,u_0) \in [0,T) \times X_\beta$ y u la solución del problema de Cauchy homogéneo* (2.57). *Entonces*

$$u \in C^1((s,T],X_0) \cap C^{\beta-\alpha}([s,T],X_\alpha) \qquad \textit{para todo } \alpha \in [0,\beta].$$

Si $u_0 \in X_1$ entonces $u \in C^1([s,T],X_0)$.

Por la propiedad (A2) y la Proposición 1.40 se tiene $\mathrm{ce}(-A(t)) < 0$ para todo $t \in [0,T]$.

Lema 2.24. *Sean $A(t) \equiv A$ constante, $\omega \in (0,-\mathrm{ce}(-A))$ y sea Q el C_0-semigrupo analítico generado por $-A$.*

(a) *Si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, entonces*

$$\sup_{t>0} \mathrm{e}^{\omega t}\|Q(t)\|_{\beta,\alpha} < \infty. \tag{2.61}$$

(b) *Si $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, entonces*

$$\sup_{t>0} \mathrm{e}^{\omega t} t^{\beta-\alpha}\|Q(t)\|_{\alpha,\beta} < \infty. \tag{2.62}$$

Demostración. **(a):** Sea primero $t \geq 1$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \|Q(t)\|_{\beta,\alpha} &\leq C\|Q(t)\|_{0,\alpha} \\ &\leq C\|Q(1)\|_{0,\alpha}\|Q(t-1)\|_{0,0} \leq C\|Q(1)\|_{0,\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-1)} \leq C\mathrm{e}^{-\omega t}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Para $t \in [0,1]$ tenemos que

$$\|Q(t)\|_{\beta,\alpha} \leq C\|Q(t)\|_{\alpha,\alpha}, \tag{2.64}$$

y esta cantidad es acotada por el Lema 2.20(b). La ecuaciones (2.63) y (2.64) implican la afirmación.

(b): Primero consideramos el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Escogemos $\omega' \in (\omega, -\operatorname{ce}(-A))$. Para $t \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\|Q(t)\|_{0,1} = \|Q(1)Q(t-1)\|_{0,1} \leq \|Q(1)\|_{0,1}\|Q(t-1)\|_{0,0} \\ \leq \|Q(1)\|_{0,1}\mathrm{e}^{-\omega'(t-1)} \leq C\mathrm{e}^{-\omega t}t^{-1},\end{aligned}$$

donde C solamente depende de ω', ω y $\|Q(1)\|_{0,1}$. La Nota 2.8 dice que $\sup_{t\in[0,1]} t\|Q(t)\|_{0,1} < \infty$. Estos dos hechos demuestran (2.62) en el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

El caso general se sigue similarmente como en la demostración del Lema 2.20(c) usando interpolación. □

Lema 2.25. *Sean $s \in [0, T)$ y $J := [s, T]$. Definimos para $g \in C(J, X_0)$ y $t \in J$:*

$$H(g)(t) := \int_s^t U(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(a) *Si $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$ entonces*

$$H \in \mathcal{L}(C(J, X_0), C^{\beta-\alpha}(J, X_\alpha)) .$$

(b) *Si $0 < \gamma \leq 1$ entonces*

$$H \in \mathcal{L}(C^\gamma(J, X_0), C(J, X_1)) .$$

En ambos casos, si $A(t) \equiv A$ es constante, entonces las normas de H están acotadas independientemente de $|J| := T - s$.

Demostración. En la demostración supongamos que $A(t) \equiv A$ es constante y luego que $U(t,s) = Q(t-s)$, donde Q es el C_0-semigrupo analítico generado por $-A$. La demostración en el caso general es similar, pero las constantes pueden depender de $T - s$. Nada más la demostración del inciso (b) se vuelve considerablemente más dificil. Escogemos $\omega \in (0, -\operatorname{ce}(-A))$.

(a): Ponemos $\gamma := \beta - \alpha$, así que $0 \leq \gamma < 1 - \alpha$. Entonces el Lema 2.24 implica que

$$\|U(t,\tau)\|_{0,\alpha} \leq Ce^{-\omega(t-\tau)}(t-\tau)^{-\alpha}$$

para $\tau < t$, de modo que para $t \in J$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t U(t,\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha &\leq C\|g\|_\infty \int_s^t (t-\tau)^{-\alpha} e^{-\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= C\|g\|_\infty \int_0^{t-s} \tau^{-\alpha} e^{-\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq C\|g\|_\infty \int_0^{\infty} \tau^{-\alpha} e^{-\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq C\|g\|_\infty, \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde C solamente depende de A y α. Aquí usamos la notación $\|g\|_\infty := \sup_{t\in J} \|g(t)\|_0$.

Para demostrar la continuidad es suficiente considerar el caso $\alpha < \beta$, así que $\gamma > 0$. Por el Lema 2.24 la constante Λ en (2.54) no depende ni de s ni de T. Entonces el Lema 2.22 implica para $\tau \in [s, T]$ que

$$U(\cdot,\tau) \in C^\gamma([\tau, T], \mathcal{L}(X_\beta, X_\alpha)) \tag{2.66}$$

con norma acotada por una constante independiente de τ, s y T.

Sea $s \leq r < t \leq T$. Por el Lema 2.24 (b) y la ecuación (2.66) obtenemos para $\tau \in [s, r)$:

$$\begin{aligned} \|U(t,\tau) - U(r,\tau)\|_{0,\alpha} &\leq \|U(t,r) - U(r,r)\|_{\beta,\alpha} \|U(r,\tau)\|_{0,\beta} \\ &\leq C(t-r)^\gamma (r-\tau)^{-\beta} e^{-\omega(r-\tau)}. \end{aligned}$$

En seguida,

$$\begin{aligned} \int_s^r \|U(t,\tau) - U(r,\tau)\|_{0,\alpha}\,\mathrm{d}\tau &\leq C(t-r)^\gamma \int_s^r (r-\tau)^{-\beta} e^{-\omega(r-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq C(t-r)^\gamma \int_0^\infty \tau^{-\beta} e^{-\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq C(t-r)^\gamma \end{aligned}$$

como antes. Además,

$$\int_r^t \|U(t,\tau)\|_{0,\alpha}\,\mathrm{d}\tau \leq C \int_r^t (t-\tau)^{-\alpha}\,\mathrm{d}\tau = C(t-r)^{1-\alpha}$$

por el Lema 2.20. En consecuencia

$$\begin{aligned}\|H(g)(t) - H(g)(r)\|_\alpha &= \left\| \int_s^r (U(t,\tau) - U(r,\tau))g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_r^t U(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\|_\alpha \\ &\leq C\|g\|_\infty \left((t-r)^\gamma + (t-r)^{1-\alpha}\right) .\end{aligned}$$

Para $|t-r| \leq 1$ eso y $\gamma < 1-\alpha$ implican

$$\|H(g)(t) - H(g)(r)\|_\alpha \leq 2C\|g\|_\infty |t-r|^\gamma$$

y para $|t-r| \geq 1$ tenemos, usando (2.65),

$$\begin{aligned}\|H(g)(t) - H(g)(r)\|_\alpha &\leq 2\|H(g)\|_\infty \\ &\leq 2\|H(g)\|_\infty |t-r|^\gamma \leq 2C\|g\|_\infty |t-r|^\gamma .\end{aligned}$$

Aquí usamos la notación $\|H(g)\|_\infty := \sup_{t\in J}\|H(g)(t)\|_\alpha$. Esto comprueba la afirmación.

b) Supongamos que $A(t) \equiv A$ es constante. Se tiene que

$$H(g)(t) = \int_s^t U(t,\tau)(g(\tau) - g(t))\,\mathrm{d}\tau + (1 - U(t,s))A^{-1}g(t) \tag{2.67}$$

porque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(t,\tau)A^{-1}g(t) = U(t,\tau)g(t) .$$

El mapéo $A^{-1}g\colon J \to X_1$ es continuo y $U(\cdot,s)\colon J \to \mathcal{L}(X_1)$ es fuertemente continuo. Entonces el segundo término en el lado derecho de (2.67) es continuo como mapeo de J en X_1.

Ponemos $K := T - s$, $a(t,\tau) := U(t,\tau)(g(\tau) - g(t))$ para $t,\tau \in J$ con $\tau \leq t$, y $b(t,\tau) := a(t+s,\tau+s)$ para $(t,\tau) \in \Delta_K$. Entonces $b \in C(\dot{\Delta}_K, X_1)$ y

$$\|b(t,\tau)\|_1 \leq C\|g\|_{C^\gamma(J,X_0)}(t-\tau)^{\gamma-1} \tag{2.68}$$

para $(t,\tau) \in \dot{\Delta}_K$, por el Lema 2.24(b). La constante C no depende de $T-s$. Definimos

$$v(t) := \int_0^t b(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

para $t \in [0, K]$. Entonces el Lema 2.1 con su propio ($\alpha := 1 - \gamma$ y $\beta := 0$) nos proporciona $v \in C([0, K], X_1)$. Luego

$$\int_s^t a(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau = v(t - s)$$

es continuo de J en X_1. Esto comprueba que $H(g) \in C(J, X_1)$.

Finalmente, (2.67) y el Lema 2.24 implican que

$$\begin{aligned}
\|H(g)(t)\|_1 &\leq \int_s^t \|U(t, \tau)\|_{0,1} \|g(\tau) - g(t)\|_0 \,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\qquad + \Big(1 + \|U(t, s)\|_{1,1}\Big) \|A^{-1}\|_{0,1} \|g(t)\|_0 \\
&\leq C \|g\|_{C^\gamma(J, X_0)} \left(\int_s^t (t - \tau)^{\gamma - 1} e^{-\omega(t - \tau)} \,\mathrm{d}\tau + 1 \right) \\
&\leq C \|g\|_{C^\gamma(J, X_0)} \left(\int_0^\infty \tau^{\gamma - 1} e^{-\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau + 1 \right) \\
&\leq C(\gamma) \|g\|_{C^\gamma(J, X_0)} \,.
\end{aligned}$$

Con esto termina la demostración. □

Corolario 2.26. *Sean $s \in [0, T)$ y $J := [s, T]$. Definimos para $x \in X_0$, $g \in C(J, X_0)$ y $t \in J$:*

$$K(x, g)(t) := U(t, s)x + \int_s^t U(t, \tau) g(\tau) \,\mathrm{d}\tau \qquad \textit{para todo } t \in J.$$

(a) *Si $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$, entonces*

$$K \in \mathcal{L}(X_\beta \times C(J, X_0), C^{\beta - \alpha}(J, X_\alpha)) \,.$$

(b) *Si $0 < \gamma \leq 1$ entonces*

$$K \in \mathcal{L}(X_1 \times C^\gamma(J, X_0), C(J, X_1)) \,.$$

En ambos casos, si $A(t) \equiv A$ es constante, entonces las normas de K están acotadas independientemente de $|J| := T - s$.

Demostración. Las afirmaciones son una consecuencia de los Lemas 2.22, 2.24, and 2.25. □

Proposición 2.27. *Si* $\gamma \in (0,1]$ *y* $f \in C^{\gamma}([s,T], X_0)$*, entonces la solución* $u(\,\cdot\,; s, x)$ *del problema de Cauchy lineal no homogéneo*

$$\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t), & t \in (s,T], \\ u(s) = x \end{cases} \tag{2.69}$$

cumple para cualquier $\alpha \in [0,1]$

$$u(\,\cdot\,;\,\cdot\,,x) \in C(\dot{\Delta}_T, X_\alpha).$$

Si además $x \in X_\alpha$ *entonces*

$$u(\,\cdot\,;\,\cdot\,,x) \in C(\Delta_T, X_\alpha).$$

Demostración. Recordemos la formula

$$u(t;s,x) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.70}$$

El primer término en la derecha de (2.70) cumple

$$u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)x \in C(\dot{\Delta}_T, X_\alpha)$$

por la propiedad (U1), y cumple

$$U(\,\cdot\,,\,\cdot\,)x \in C(\Delta_T, X_\alpha)$$

para $x \in X_\alpha$ por el Lema 2.20(a). Entonces basta encargarse del segundo término de la derecha de (2.70), es decir, del mapeo

$$(t,s) \mapsto \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.71}$$

Sea $x \in X_0$ fijo. Primero tratamos el caso donde $\alpha \in [0,1)$. Tenemos

$$\|U(t,\tau)f(\tau)\|_\alpha \leq \|U(t,\tau)\|_{0,\alpha}\|f\|_\infty \leq C(t-s)^{-\alpha}$$

porque $f([0,T])$ es compacto en X_0. Aplica el Lema 2.1 y dice que el mapeo en (2.71) está en $C(\Delta_T, X_\alpha)$.

El caso $\alpha = 1$ sólo lo demostramos para $A(t) \equiv A$ constante. Véase [14, Theorem 5.7.1] para el caso general. Escribimos

$$\begin{aligned}(2.72)\qquad \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ = \int_s^t U(t,\tau)(g(\tau)-g(t))\,\mathrm{d}\tau + (1-U(t,s))A^{-1}g(t),\end{aligned}$$

como en (2.67). El segundo término en el lado derecho de (2.72) está en $C(\Delta_T, X_1)$ por la propiedad (U1). La cota (2.68) y el Lema 2.1 implican que el primer término en la derecha de (2.72) también está en $C(\Delta_T, X_1)$, es decir, el mapeo de (2.71) está en $C(\Delta_T, X_1)$. □

Capítulo 3

Ecuaciones abstractas semilineales

En este capítulo nos basamos principalmente en el libro [8]. Seguimos usando la notación establecida en la sección 2.4.

Para $\alpha \in [0,1)$ consideramos el problema de Cauchy semilineal

$$
\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t,u), & t \in (s,T], \\ u(s) = x \end{cases} \tag{3.1}
$$

donde $(s,x) \in [0,T) \times X_\alpha$ y $f\colon [0,T] \times X_\alpha \to X_0$ es continuo.

Definición 3.1. Sea J un subintervalo de $[s,T]$ que contiene s, y sea $\dot{J} := J\setminus\{s\}$. Una *solución clásica (local)* de (3.1) en J es un mapeo $u \in C(J, X_\alpha) \cap C^1(\dot{J}, X_0)$ tal que $u(t) \in X_1$ para todo $t \in \dot{J}$, $u(s) = x$ y $\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t,u(t))$ para todo $t \in \dot{J}$.

Si u es una solución clásica en J entonces ponemos $g(t) := f(t,u(t))$. Entonces $g \in C(J, X_0)$ y u es solución del problema lineal no homogéneo

$$
\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = g(t), & t \in \dot{J}, \\ u(s) = x. \end{cases} \tag{3.2}
$$

En seguida u cumple la identidad

$$
u(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau) f(\tau, u(t))\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.3}
$$

Definición 3.2. Una *solución clemente* de (3.1) en J es un mapeo $u \in C(J, X_\alpha)$ que cumple (3.3) para $t \in J$.

En ambos casos de soluciones clásicas y soluciones clementes u decimos que u es *maximal* si no existe extensión de u a una solución en un subintervalo estrictamente mayor a J. Si $J = [s, T]$ entonces u es *global*.

Lema 3.3. *Sean $0 \le t_1 < t_2 < t_3 \le T$ y sea $u\colon [t_1, t_3] \to X_\alpha$ una aplicación. Entonces son equivalentes:*

(i) *u es solución clemente de* (3.1) *en $[t_1, t_3]$ con $(s, x) = (t_1, u(t_1))$.*

(ii) *u es solución clemente de* (3.1) *en $[t_1, t_2]$ con $(s, x) = (t_1, u(t_1))$ y en $[t_2, t_3]$ con $(s, x) = (t_2, u(t_2))$.*

Demostración. **(i) implica (ii):** Es obvio que u es solución clemente en $[t_1, t_2]$ para $(s, x) = (t_1, u(t_1))$. Si $t \in [t_2, t_3]$, entonces

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U(t, t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^{t} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= U(t, t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_2}^{t} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= U(t, t_2)U(t_2, t_1)u(t_1) + U(t, t_2)\int_{t_1}^{t_2} U(t_2, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad + \int_{t_2}^{t} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= U(t, t_2)u(t_2) + \int_{t_2}^{t} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

es decir, u es solución clemente en $[t_2, t_3]$ con $(s, x) = (t_2, u(t_2))$.

(ii) implica (i): Por ser solución clemente en los subintervalos $[t_1, t_2]$ y $[t_2, t_3]$, u es continuo. Si $t \in [t_1, t_2]$ entonces

$$
u(t) = U(t, t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^{t} U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.5}
$$

porque u es solución clemente de (3.1) en $[t_1, t_2]$ con $(s, x) = (t_1, u(t_1))$. Si $t \in [t_2, t_3]$ entonces $u(t)$ es igual a la última linea de (3.4) porque u es solución clemente en $[t_2, t_3]$ con $(s, x) = (t_2, u(t_2))$. Ahora (3.5) para este t se obtiene leyendo (3.4) al revés. Eso demuestra la afirmación. $\square$

Supongamos la siguiente condición para la función $f : [0, T] \times X_\alpha \to X_0$:

Existe $\nu \in (0, 1]$ tal que para todo $R > 0$ existe $C = C(R) \geq 0$ con

(F) $$\|f(t, x) - f(s, y)\|_0 \leq C(|t - s|^\nu + \|x - y\|_\alpha)$$

para todo $t, s \in [0, T]$ y $x, y \in \overline{B}_R X_\alpha$.

Particularmente, esta condición implica que $f \in C([0, T] \times X_\alpha, X_0)$. Uno podría decir que f es Hölder continuo de exponente ν en su primer argumento y Lipschitz continuo en su segundo argumento, uniformemente en conjuntos acotados de X_α.

Proposición 3.4. *Si* (F) *se cumple, entonces toda solución clemente* u *de* (3.1) *es una solución clásica.*

Demostración. Sean $(s, x) \in [0, T) \times X_\alpha$ y sea u una solución clemente de (3.1) en J. Pongamos $g(t) := f(t, u(t))$ para $t \in J$, así que $g \in C(J, X_0)$. Para $r \in (s, \sup J)$ denotemos $J_r := J \cap [r, T]$ y $u_r := u(r)$. Por el Lema 2.20(c) y el Lema 2.25(a) tenemos $u_r \in X_\beta$ para todo $\beta \in [0, 1)$.

Si $t \in J_r$, entonces

$$u(t) = U(t, r)u_r + \int_r^t U(t, \tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

por el Lema 3.3. Por lo tanto, $u \in C^{\beta-\alpha}(I, X_\alpha)$ para todo subintervalo cerrado I de J_r que contiene a r, por el Corolario 2.26(a). Fijando un subintervalo cerrado I de J_r que contiene a r obtenemos por la condición (F) que $g \in C^\gamma(I, X_0)$ para un $\gamma \in (0, 1]$. En seguida, el Teorema 2.13 dice que u es una solución clásica en I, es decir, $u \in C^1(\dot{I}, X_0)$ y $u(t) \in X_1$ para todo $t \in \dot{I}$. Como r era arbitrario, u es una solución clásica de (3.1) en J. □

3.1 Existencia y dependencia continua

En esta sección demostramos la existencia de soluciones clementes de (3.1). El procedimiento es una extensión de la demostración del teorema de Picard-Lindelöf.

Empecemos con la existencia local.

Lema 3.5. *Para todo $R > 0$ existe un número $T_1 = T_1(\alpha, R) > 0$ tal que para todo $(s, x) \in [0, T) \times \overline{B}_R X_\alpha$ el problema* (3.1) *tiene una y sólo una solución clemente en $J := [s, \text{mín}\{s + T_1, T\}]$.*

Demostración. Sean $R > 0$ y $(s, x) \in [0, T) \times \overline{B}_R X_\alpha$. Para cualquier $u \in C([s, T], X_\alpha)$ y $t \in [s, T]$ definimos

$$G(u)(t) := U(t, s)x + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau, u(\tau)) \, \mathrm{d}\tau.$$

Por el Lema 2.20(a) y el Corolario 2.26 $G\colon C([s, s + T_1], X_\alpha) \to C([s, s + T_1], X_\alpha)$ para todo $T_1 \in (0, T - s]$. Demostraremos que para un T_1 adecuado G es una contracción en un espacio métrico completo.

Como $\|U(t, s)\|_{\alpha,\alpha}$ es acotado en Δ_T, existe $C_1 = C_1(\alpha)$ tal que

$$\|U(t, s)x - x\|_\alpha \leq C_1 \|x\|_\alpha \qquad \text{para todo } (t, s) \in \Delta_T.$$

Ponemos $C_2 := C_1 R + 1$ y

$$C_3 := \sup_{\substack{v \in X_\alpha \\ \|v\|_\alpha \leq C_2 + R}} \sup_{t \in [0,T]} \|f(t, v)\|_0 / (1 - \alpha).$$

Por el Lema 2.20(c) existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|U(t, s)\|_{0,\alpha} \leq C_4 * t - s)^{-\alpha} \qquad \text{para todo } (t, s) \in \dot{\Delta}_T.$$

Escogemos $T_1 \in (0, T - s]$ tal que

$$C_3 C_4 T_1^{1-\alpha} \leq 1$$

y definimos

$$\mathcal{M} := C([s, s + T_1], \overline{B}_{C_2}(x; X_\alpha)).$$

En consecuencia, $u \in \mathcal{M}$ implica para $t \in [s, s + T_1]$ que $\|u(t)\|_\alpha \leq C_2 + R$ y entonces por el Lema 2.20(c) que

$$\begin{aligned} \|G(u)(t) - x\|_\alpha &\leq \|U(t, s)x - x\|_\alpha + \int_s^t \|U(t, \tau)\|_{0,\alpha} \|f(\tau, u(\tau))\|_0 \, \mathrm{d}\tau \\ &\leq C_1 R + C_3 C_4 T_1^{1-\alpha} \leq C_2. \end{aligned}$$

Entonces $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Si $u, v \in \mathcal{M}$ y $t \in [s, s + T_1]$, entonces la condición (F) implica que

$$\begin{aligned}\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_\alpha &\leq \int_s^t \|U(t,\tau)\|_{0,\alpha} \|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\|_0 \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq C\|u - v\|_{C([s,s+T_1]X_\alpha)} T_1^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Podemos escoger $T_1 \in (0, T - s]$ más chico todavía tal que además G es una contracción en $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado del espacio de Banach $C([s, s+T_1], X_\alpha)$, $\mathcal{M}$ es métrico completo. El teorema de punto fijo de Banach nos otorga un y sólo un punto fijo de G en $\mathcal{M}$, es decir, una solución clemente de (3.1) en $[s, s + T_1]$. Este hecho es cierto para $T_1 > 0$ tan chico como sea.

Si v es otra solución clemente de (3.1) en un intervalo I, debe de coincidir con u en $I \cap [s, s + T_1]$. Eso demuestra la unicidad. □

Teorema 3.6. *Para todo* $(s, x) \in [0, T) \times X_\alpha$ *el problema* (3.1) *tiene una y sólo una solución clemente maximal* $u(\cdot\,; s, x) \in C(J(s, x), X_\alpha)$*, donde* $J(s, x)$ *es el* intervalo maximal de existencia*. El número* $t^+(s, x) := \sup J(s, x)$ *es el* tiempo positivo de escape *de* $u(\cdot\,; s, x)$*. Se cumple precisamente una de las siguientes alternativas:*

(i) $J(s, x) = [s, T]$*, es decir,* $u(\cdot\,; s, x)$ *es una solución global.*

(ii) $J(s, x) = [s, t^+(s, x))$ *y* $\|u(t; s, x)\|_\alpha \to \infty$ *cuando* $t \to t^+(s, x)$ *en* $J(s, x)$*.*

Demostración. Sea $(s, x) \in [0, T) \times X_\alpha$ dado. El conjunto $\mathcal{J}$ de todos subintervalos de $[s, T]$ que contienen a s y donde existe una solución clemente u de (3.1) no es vacío por el Lema 3.5, y es totalmente ordenado por inclusión. Sean $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ y u_i soluciones en J_i, $i = 1, 2$. Sea $I := [s, a] \subseteq J_1 \cap J_2$. Como $u_i(I)$ es acotado en X_α para $i = 1, 2$ el Lema 3.5 nos da $T_1 > 0$ tal que para todo $t_0 \in I$ existen soluciones clementes únicas de (3.1) con datos iniciales $(t_0, u_i(t_0))$ en $[t_0, \min\{t_0 + T_1, a\}]$. Como $u_1(s) = u_2(s)$ se sigue inductivamente con un número finito de iteraciones que $u_1 \equiv u_2$ en I. Dejando $a \to \sup J_1 \cap J_2$ se sigue que $u_1 \equiv u_2$ en $J_1 \cap J_2$.

Definimos

$$J(s, x) := \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$$

y $u(\cdot\,; s, x)\colon J(s, x) \to X_\alpha$ por $u(t; s, x) := u_J(t)$ si $t \in J$ y u_J es una solución en J. El mapeo $u(\cdot\,; s, t)$ está bien definido por lo que acabamos de demostrar. Si $t \in J(s,x)$ entonces existe $J \in \mathcal{J}$ tal que $t \in J$. Como $u(\,\cdot\,; s, x)$ es una solución clemente en J,

$$u(t; s, x) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,\tau) f(\tau, u(\tau; s, x))\, \mathrm{d}\tau.$$

Eso demuestra que $u(\,\cdot\,; s, x)$ es una solución clemente en $J(s,x)$. Es obvio que $J(s,x)$ es el intervalo maximal donde existe una solución clemente, es decir, $u(\,\cdot\,; s, x)$ es maximal.

Para demostrar la alternativa, supongamos que $J(s,x) \neq [s,T]$. Primero hay que demostrar que $J(s,x) = [s, t^+(s,x))$. El caso $t^+(s,x) = T$ ya está resuelto porque $J(s,x) \neq [s,T]$. Entonces podemos suponer que $t^+(s,x) < T$. Supongamos por contradicción que $J(s,x) = [s, t^+(s,x)]$ con $t^+(s,x) < T$. En seguida, el Lema 3.5, aplicado al tiempo inicial $t^+(s,x)$, nos da una solución clemente u_1 en un intervalo $[t^+(s,x), t^+(s,x) + \varepsilon]$ para un $\varepsilon > 0$. El Lema 3.3 dice que la extensión de $u(\,\cdot\,; s, x)$ a $[s, t^+(s,x) + \varepsilon]$ por u_1 es una solución clemente, en contradicción con la maximalidad de $J(s,x)$.

Para demostrar la segunda afirmación de (ii) supongamos por contradicción que existen $R > 0$ y una sucesión creciente $(t_n) \in J(s,x)$ tales que $t_n \to t^+(s,x)$ y $\|u(t_n; s, x)\|_\alpha \leq R$ cuando $n \to \infty$. Con T_1 del Lema 3.5 obtenemos que $[t_n, t_n + T_1] \in J(s,x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, una contradicción. Eso demuestra que $\lim_{t \to t^+(s,x)-} \|u(t; s, x)\|_\alpha = \infty$. □

Lema 3.7 (El Lema de Gronwall)**.** *Sean* $J := [0,T]$, $\beta \in [0,1)$ *y* $w \in C(J, \mathbb{R})$ *tales que*

$$w(t) \leq C_0 + C_1 \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} w(\tau)\, \mathrm{d}\tau \qquad \textit{para todo } t \in J. \tag{3.6}$$

Entonces

$$w(t) \leq C_0(1 + C_2) \qquad \textit{para todo } t \in J, \tag{3.7}$$

donde

$$C_2 := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_1 \Gamma(1-\beta))^m}{(1-\beta)\Gamma(m(1-\beta))} T^{m(1-\beta)}. \tag{3.8}$$

Demostración. Recordemos la definición de los espacios $\mathfrak{K}(X;\gamma)$, dada en (2.7). Ponemos $Z := C(J, \mathbb{R})$ y $h_1(t,s) := C_1(t-s)^{-\beta}$ para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$, así que $h_1 \in \mathfrak{K}(\mathbb{R};\beta)$. Definimos $Q \in \mathcal{L}(Z)$ por

$$(Qu)(t) := \int_0^t h_1(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

véase el Lema 2.1. Definimos por inducción

$$h_{m+1}(t,s) := \int_s^t h_m(t,\tau)h_1(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,$$

como en la demostración del Teorema 2.3, y ponemos

$$h(t,s) := \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t,s) \qquad \text{para todo } (t,s) \in \dot{\Delta}_T.$$

Resulta que $h \in \mathfrak{K}(\mathbb{R};\beta)$ y

$$\|h\|_{\mathfrak{K}(\mathbb{R};\beta)} \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_1\Gamma(1-\beta))^m}{\Gamma(m(1-\beta))} T^{(m-1)(1-\beta)}. \tag{3.9}$$

Como en la demostración del Teorema 2.3 tenemos que

$$(Q^m u)(t) = \int_0^t h_m(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

$\sigma(Q) = \{0\}$ y

$$(I-Q)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m \tag{3.10}$$

con convergencia en $\mathcal{L}(Z)$. Además,

$$((I-Q)^{-1}u)(t) = u(t) + \int_0^t h(t,\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{para todo } t \in J. \tag{3.11}$$

Sea

$$\mathcal{P}Z := \{u \in Z \mid \forall t \in J : u(t) \ge 0\},$$

el cono positivo en Z, un subconjunto cerrado. Como $Q(\mathcal{P}Z) \subseteq \mathcal{P}Z$, la convergencia de la serie en (3.10) implica que

$$(I - Q)^{-1}(\mathcal{P}Z) \subseteq \mathcal{P}Z. \tag{3.12}$$

Reescribimos (3.6): Definimos $b \in Z$ por $b(t) := C_0$. Entonces (3.6) es $w \le b + Qw$ o, equivalentemente, $b - (I - Q)w \ge 0$. Por (3.12) se sigue que $(I - Q)^{-1}b - w \ge 0$, es decir, $w \le (I - Q)^{-1}b$. Usando (3.11) eso da

$$w(t) \le C_0 \left(1 + \int_0^t h(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \le C_0 \left(1 + \|h\|_{\mathfrak{K}(\mathbb{R};\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\,\mathrm{d}\tau\right) = C_0(1+C_2),$$

es decir, (3.7). □

Lema 3.8. *Supongamos que se cumple* (F). *Sean* $0 \le \alpha \le \beta < 1$ *y* $\rho > 0$. *Entonces existe una constante* C *que sólo depende de* α, β, ρ *y* T *con la siguiente propiedad: Si* $t_0 \in (0, T]$, $s \in [0, t_0)$ *y si* $u(\cdot\,; s, x), u(\cdot\,; s, y)$ *son soluciones clementes de* (3.1) *en* X_α, *y si además*

$$\sup_{t\in[s,t_0]} \|u(t; s, x)\|_\alpha, \quad \sup_{t\in[s,t_0]} \|u(t; s, y)\|_\alpha \le \rho,$$

entonces

$$\|u(t; s, x) - u(t; s, y)\|_\beta \le C(t-s)^{\alpha-\beta}\|x - y\|_\alpha \qquad \textit{para todo } t \in (s, t_0].$$

Demostración. Pongamos $v(t) := u(s+t; s, x) - u(s+t; s, y)$ para $t \in J := [0, t_0 - s]$. Entonces

$$\sup_{t\in J}\|v(t)\|_\alpha \le 2\rho. \tag{3.13}$$

Es suficiente demostrar que

$$\|v(t)\|_\beta \le C t^{\alpha-\beta}\|x - y\|_\alpha \qquad \text{para todo } t \in J \tag{3.14}$$

con una constante C adecuada.

Si $\tau \in [s, t_0]$ entonces

$$\|f(\tau, u(\tau; s, x)) - f(\tau, u(\tau; s, y))\|_0 \le C\|u(\tau; s, x) - u(\tau; s, y)\|_\alpha$$

y C sólo depende de α y ρ. Esto es una consecuencia de (F). Para todo $t \in J$

estimamos

(3.15) $\|v(t)\|_\beta$

$$= \left\| U(s+t,s)(x-y) + \int_s^{s+t} U(s+t,\tau)\big(f(\tau,u(\tau;s,x)) - f(\tau,u(\tau;s,y))\big)\,\mathrm{d}\tau \right\|_\beta$$
$$\leq \|U(s+t,s)\|_{\alpha,\beta}\|x-y\|_\alpha + C\int_s^{s+t} \|U(s+t,\tau)\|_{0,\beta}\|u(\tau;s,x)-u(\tau;s,y)\|_\alpha\,\mathrm{d}\tau$$
$$\leq Ct^{\alpha-\beta}\|x-y\|_\alpha + C\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\|v(\tau)\|_\alpha\,\mathrm{d}\tau.$$

Considerando el caso $\beta = \alpha$ en esta desigualdad el Lema 3.7 nos da para $w(t) := \|v(t)\|_\alpha$ que

$$w(t) = \|v(t)\|_\alpha \leq C\|x-y\|_\alpha(1+C_2) \qquad \text{para todo } t \in J, \tag{3.16}$$

y C_2 sólo depende de ρ, α, β y t_0. Usamos la monotonía de la constante C_2 en t_0, que es una consecuencia de su definición en (3.8), para hacer que C_2 sea independiente de t_0, reemplazando t_0 por T en (3.8).

Reinsertamos (3.16) en (3.15) y obtenemos

$$\|v(t)\|_\beta \leq Ct^{\alpha-\beta}\|x-y\|_\alpha + C\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\|x-y\|_\alpha\,\mathrm{d}\tau$$
$$\leq C(t^{\alpha-\beta}+t^{1-\beta})\|x-y\|_\alpha \leq Ct^{\alpha-\beta}\|x-y\|_\alpha,$$

es decir, (3.14). □

Recordemos que $J(s,x)$ es el intervalo maximal de existencia de la solución $u(\,\cdot\,;s,x)$ y $t^+(s,x) = \sup J(s,x)$.

Teorema 3.9. *Sea $s \in [0,T)$ fijo. Denotemos*

$$\mathcal{D} := \{(t,x) \in [s,T) \times X_\alpha \mid t \in J(s,x)\} \tag{3.17}$$

y

$$\dot{\mathcal{D}} := \mathcal{D}\backslash(\{s\} \times X_\alpha). \tag{3.18}$$

Entonces lo siguiente es cierto:

(a) *$\mathcal{D}$ es abierto en $[s,T] \times X_\alpha$.*

(b) $t^+(s,\cdot)\colon X_\alpha \to (0,T]$ *es un mapeo semicontinuo por debajo.*

(c) *El mapeo*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\to X_\alpha \\ (t,x) &\mapsto u(t;s,x) \end{aligned} \tag{3.19}$$

es continuo en (t,x) *y localmente Lipschitz continuo en* x.

(d) *Para todo* $\beta \in [0,1)$ *el mapeo*

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} &\to X_\beta \\ (t,x) &\mapsto u(t;s,x) \end{aligned} \tag{3.20}$$

es continuo en (t,x) *y localmente Lipschitz continuo en* x.

Demostración. **(b):** Escribimos $t^+(\cdot) := t^+(s,\cdot)$ y fijamos $x^* \in X_\alpha$. Sea $t^* < t^+(x^*)$. Necesitamos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$t^* < t^+(x) \qquad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x^*; X_\alpha). \tag{3.21}$$

Sean $\rho > 0$, $\Lambda := u([s,t^*];s,x^*)$ y $\Lambda_\rho := \{x \in X_\alpha \mid \operatorname{dist}_{X_\alpha}(x,\Lambda) < \rho\}$. Entonces Λ es compacto y luego Λ_ρ acotado. Por el Lema 3.8 existe $C \geq 1$ tal que

$$\|u(t;s,x) - u(t;s,y)\|_\alpha \leq C\,\|x-y\|_\alpha \tag{3.22}$$

cuando $u([s,t];s,x) \subseteq \overline{\Lambda_\rho}$ y $u([s,t];s,y) \subseteq \overline{\Lambda_\rho}$. Ponemos $\varepsilon := \rho/(2C)$ y demostremos que se cumple (3.21). Si no es cierto, entonces existe $x \in B_\varepsilon(x^*;X_\alpha)$ tal que $t^* \geq t^+(x)$. Como $t^* < t^+(x^*) \leq T$, el Teorema 3.6 implica que $\|u(t;s,x)\|_\alpha \to \infty$ cuando $t \to t^+(x)$. Observamos que $x \in \Lambda_\rho$ porque $\varepsilon \leq \rho/2$, y que $t \mapsto u(t;s,x)$ es continuo en X_α. Existe $t_2 \in (0,t^+(x))$ tal que $u(t_2;s,x) \in \partial\Lambda_\rho$ y $u([0,t_2);s,x) \subseteq \Lambda_\rho$. Por (3.22) obtenemos

$$\rho = \operatorname{dist}(u(t_2;s,x),\Lambda) \leq \|u(t_2;s,x) - u(t_2;s,x^*)\|_\alpha \leq C\,\|x-x^*\|_\alpha \leq \rho/2,$$

una contradicción.

(a): Sea $(t^*,x^*) \in \mathcal{D}$. Escogemos $t_1 \in (t^*, t^+(x^*))$. Por el inciso (b) existe $\varepsilon > 0$ tal que $t^+(x) > t_1$ para todo $x \in B_\varepsilon(x^*;X_\alpha)$. Entonces $[s,t_1) \times B_\varepsilon(x^*;X_\alpha)$ es una vecindad de (t^*,x^*) en $[s,T) \times X_\alpha$ contenida en $\mathcal{D}$.

(c): Sea $(\bar{t}, x^*) \in \mathcal{D}$. Escogemos $t^* \in (\bar{t}, t^+(x^*))$, fijamos $\rho > 0$ y definimos $C \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ como en el inciso (b) tal que se cumple (3.22). Notemos que $t^+(x) > t^*$ y $u([s, t^*]; s, x) \subseteq \overline{\Lambda_\rho}$ para todo $x \in B_\varepsilon(x^*; X_\alpha)$, por un argumento de contradicción similar. En consecuencia, (3.22) se cumple para todo $(t, x), (t, y) \in [s, t^*] \times B_\varepsilon(x^*; X_\alpha)$, una vecindad de $(\bar{t}, x^*)$ en $\mathcal{D}$. Eso demuestra la continuidad local Lipschitz en x.

Si $t_n \to \bar{t}$ y $x_n \to x^*$ entonces eso implica para n grande:

$$\begin{aligned}
&\|u(t_n; s, x_n) - u(\bar{t}; s, x^*)\|_\alpha \\
&\qquad \leq \|u(t_n; s, x_n) - u(t_n; s, x^*)\|_\alpha + \|u(t_n; s, x^*) - u(\bar{t}; s, x^*)\|_\alpha \\
&\qquad \leq C\|x_n - x^*\|_\alpha + \|u(t_n; s, x^*) - u(\bar{t}; s, x^*)\|_\alpha \\
&\qquad \to 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por (3.22) y por la continuidad de $u(\cdot\,; s, x^*)$. Eso demuestra la continuidad.

(d): Basta demostrar el caso donde $\beta \in (\alpha, 1)$. Si $(\bar{t}, x^*) \in \dot{\mathcal{D}}$ entonces usamos la misma notación como en el inciso (c), y obtenemos por el Lema 3.8 una constante C_1 tal que

$$\|u(t; s, x) - u(t; s, y)\|_\beta \leq C_1(t - s)^{\alpha-\beta}\|x - y\|_\alpha \tag{3.23}$$

para todo $(t, x), (t, y) \in (s, t^*] \times B_\varepsilon(x^*; X_\alpha)$, una vecindad de $(\bar{t}, x^*)$ en $\dot{\mathcal{D}}$. La afirmación se sigue como en el inciso (c). □

3.2 Soluciones globales, problemas autónomos y compacidad

Proposición 3.10. *Sea $u(\cdot\,; s, x)$ una solución clemente de* (3.1) *tal que existe $C_1 > 0$ con*

$$\|f(t, u(t; s, x))\|_0 \leq C(1 + \|u(t; s, x)\|_\alpha) \qquad \text{para todo } t \in J(s, x). \tag{3.24}$$

Entonces $J(s, x) = [s, T]$, es decir, u es una solución global.

Demostración. Ponemos $w(t) := \|u(s + t; s, x)\|_\alpha$ para $t \in [0, t^+(s, x) - s)$. Para todo $T' \in (s, t^+(s, x))$ se tiene que $w \in C([0, T' - s], \mathbb{R})$. Fijemos tal T'

y denotemos

$$C_3 := \sup_{(t,s)\in\Delta_T} \|U(t,s)x\|_\alpha < \infty$$

y

$$C_4 := \sup_{(t,s)\in\dot{\Delta}_T} \|U(t,s)\|_{0,\alpha}(t-s)^\alpha < \infty.$$

Por (3.3) tenemos la estimación

$$\begin{aligned} w(t) &= \|u(t+s;s,x)\|_\alpha \\ &\le C_3 + C\int_0^t \|U(s+t,s+\tau)\|_{0,\alpha}(1+\|u(s+\tau;s,x)\|_\alpha)\,\mathrm{d}\tau \\ &\le C_3 + CC_4\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\,\mathrm{d}\tau + CC_4\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &\le C_0 + C_1\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T'-s]$, donde $C_0 := C_3 + CC_4T^{1+\alpha}/(1+\alpha)$ y $C_1 := CC_4$. El Lema 3.7 dice que $w(t) \le C_0(1+C_2)$ para todo $t \in [0,T'-s]$ o, equivalentemente, $\|u(t;s,x)\|_\alpha \le C_0(1+C_2)$ para todo $t \in [s,T']$. Como C_0 y C_2 no dependen de T', eso implica que $\|u(\,\cdot\,;s,x)\|_\alpha$ es acotado en $J(s,x)$. Concluimos con el Teorema 3.6. □

Nota 3.11. Un caso particular de la Proposición 3.10 surge si existe $C_1 > 0$ tal que

(3.25) $$\|f(t,u)\|_0 \le C_1(1+\|u\|_\alpha) \qquad \text{para todo } (t,u)\in[0,T]\times X_\alpha.$$

En este caso *todas* soluciones clementes de (3.1) son globales.

Proposición 3.12. *Sea* $s \in [0,T)$ *y sea* $\mathcal{D}$ *definido como en* (3.17). *Entonces* $u(\,\cdot\,;s,x) \in C((s,t^+(s,x)),X_1)$ *para todo* $x \in X_\alpha$.

Supongamos que $T' \in (s,T]$ *y* $V \subseteq X_\alpha$ *cumplen* $[s,T')\times V \subseteq \mathcal{D}$. *También supongamos que existe* $\varepsilon_1 \in [0,T'-s)$ *tal que*

(3.26) $$C_0 := \sup_{(t,x)\in[s+\varepsilon_1,T')\times V} \|u(t;s,x)\|_\alpha < \infty.$$

Entonces para todo $\varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, T' - s)$ *se tiene*

$$\sup_{(t,x)\in[s+\varepsilon_2,T')\times V} \|u(t;s,x)\|_1 < \infty. \tag{3.27}$$

Si $A(t) \equiv A$ *es constante y si* f *cumple* (F) *para* $s, t \in \mathbb{R}_0^+$, *entonces el supremo en* (3.27) *no depende de* s, T' *ni de* T.

Demostración. Fijamos $\varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, T'-s)$ y $T_1 \in (s+\varepsilon_2, T')$. También fijamos $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ y $\beta \in (\alpha, 1)$. La condición (F) implica que

$$C_1 := \sup_{(t,x)\in[s+\varepsilon_1,T')\times V} \|f(t, u(t;s,x))\|_0 < \infty. \tag{3.28}$$

Notemos que C_1 no depende de s, x, T_1 ni de T', sólo de C_0 y los datos de f.

Para $J_1 := [s + \varepsilon_1, T]$ y $\varphi \in C(J_1, X_0)$ definimos $H_1\varphi$ por

$$(H_1\varphi)(t) := \int_{s+\varepsilon_1}^{t} U(t,\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Entonces $H_1 \in \mathcal{L}(C(J_1, X_0), C(J_1, X_\beta))$. Si $\tilde{\varphi} \in C([s+\varepsilon_1, T_1], X_0)$ entonces

$$\varphi(t) := \begin{cases} \tilde{\varphi}(t) & t \in [s+\varepsilon_1, T_1] \\ \tilde{\varphi}(T_1) & t \in [T_1, T] \end{cases}$$

define un elemento en $C(J_1, X_0)$. Como $H_1\varphi$ y $H_1\tilde{\varphi}$ coinciden en J_1, se tiene para $t \in [s + \varepsilon_1, T_1]$:

$$\|(H_1\tilde{\varphi})(t)\|_\beta = \|(H_1\varphi)(t)\|_\beta \le \|H_1\|\,\|\varphi\|.$$

Resulta que la norma de la restricción de H_1 a $[s + \varepsilon_1, T_1]$ está acotada por la norma de H_1.

Sea $x \in V$. Ponemos $y := u(s + \varepsilon_1; s, x)$ y definimos $g \in C([s, T'), X_0)$ por $g(t) := f(t, u(t; s, x))$, así que

$$\sup_{t\in[s+\varepsilon_1,T')} \|g(t)\|_0 \le C_1. \tag{3.29}$$

Obtenemos para $t \in [s + \varepsilon_1, T_1]$ por el Lema 3.3 que

$$u(t;s,x) = u(t; s+\varepsilon_1, y) = U(t, s+\varepsilon_1)y + \int_{s+\varepsilon_1}^{t} U(t,\tau) f(\tau, u(\tau; s+\varepsilon_1, y))\,\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= U(t, s+\varepsilon_1)y + \int_{s+\varepsilon_1}^{t} U(t,\tau) f(\tau, u(\tau; s, x))\,\mathrm{d}\tau \\
&= U(t, s+\varepsilon_1)y + (H_1 g)(t)
\end{aligned}
$$

y entonces por el Lema 2.25(a) que

$$
\begin{aligned}
\|u(t; s, x)\|_\beta &\le \|U(t, s+\varepsilon_1)\|_{\alpha,\beta}\|y\|_\alpha + C_1\|H_1\| \\
&\le C_0 C(\alpha, \beta)(t - s - \varepsilon_1)^{\alpha-\beta} + C_1\|H_1\| \\
&\le C_0 C(\alpha, \beta)(\varepsilon - \varepsilon_1)^{\alpha-\beta} + C_1\|H_1\| \\
&=: C_2
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [s+\varepsilon, T_1]$. La constante C_2 no depende de s, x, T_1 ni de T'. Sea $z := u(s+\varepsilon; s, x)$. El Corolario 2.26(a) implica que $u(\,\cdot\,; s+\varepsilon, z) \in C^{\beta-\alpha}([s+\varepsilon, T_1], X_\alpha)$ y que

$$
C_3 := \|u(\,\cdot\,; s+\varepsilon, z)\|_{C^{\beta-\alpha}([s+\varepsilon,T_1],X_\alpha)}
$$

no depende de s, x, T_1 ni de T'.

Como f es localmente Lipschitz continuo en su segundo argumento se sigue que $g \in C^\mu([s+\varepsilon, T_1], X_0)$ para $\mu := \text{mín}\{\nu, \beta - \alpha\}$, y que

$$
C_4 := \|g\|_{C^\mu([s+\varepsilon,T_1],X_0)}
$$

no depende de s, x, T_1 ni de T'. Si $J_2 := [s+\varepsilon, T]$ y $\varphi \in C(J_2, X_0)$ entonces definimos H_2 por

$$
(H_2\varphi)(t) := \int_{s+\varepsilon}^{t} U(t,\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
$$

Entonces $H_2 \in \mathcal{L}(C^\mu(J_2, X_0), C(J_2, X_1))$, por el Lema 2.25(b). Como antes se sigue que

$$
u(t; s, x) = U(t, s+\varepsilon)z + (H_2 g)(t)
$$

para todo $t \in [s+\varepsilon, T_1]$. Por la propiedad (U1) eso implica que $u(\,\cdot\,; s, x) \in C((s+\varepsilon, T_1], X_1)$ y

$$
\|u(t; s, x)\|_1 \le C_0 C(\alpha)(\varepsilon_2 - \varepsilon)^{\alpha-1} + C_4\|H_2\| \tag{3.30}
$$

no depende de s, x, T_1 ni de T'. Dejando $T_1 \to T'$ comprueba que $u(\,\cdot\,; s, x) \in$

$C((s+\varepsilon, T'), X_1)$ y la cota para $\|u(t;s,x)\|_1$ para $t \in [s+\varepsilon_2, T')$, independientemente de x. En el caso particular $V = \{x\}$ dejamos $\varepsilon \to 0$ y obtenemos que $u(\,\cdot\,; s, x) \in C((s, T'), X_1)$.

Si $A(t) \equiv A$ y (F) es cierto para todo $s, t \geq 0$, entonces las constantes C_1, C_2 y C_3 también son independientes de T, por el Lema 2.25 y el Corolario 2.26. C_4 no es independiente de T por el cambio de exponente de Hölder. Pero tenemos para $t_1, t_2 \in [\varepsilon, T_1]$ que

$$\begin{aligned}\|g(t_1) - g(t_2)\|_0 &\leq C(|t_1 - t_2|^\nu + \|u(t_1; s, x) - u(t_2; s, x)\|_\alpha) \\ &\leq C(|t_1 - t_2|^\nu + C_3 |t_1 - t_2|^{\beta - \alpha}).\end{aligned}$$

Usando esta desigualdad en la última estimación de la demostración del Lema 2.25 obtenemos que la cota en (3.30) no depende de T. $\square$

Tratamos ahora el caso particular donde $A(t) \equiv A$ y $f(t,u) = f(u)$, es decir, el problema autónomo

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), & t > s, \\ \quad u(s) = x. \end{cases} \tag{3.31}$$

En este caso el tiempo positivo de escape $t^+(s,x)$ puede ser ∞, y el intervalo maximal de existencia siempre es abierto en la derecha, es decir, $J(x) = [s, t^+(s,x))$ siempre se cumple. La razón es que cualquier solución clemente de (3.31) en un intervalo $[s, T]$ puede ser extendida a la derecha con el dato inicial $u(T; s, x)$. En problemas autónomos por definición una solución es *global* si $t^+(s,x) = \infty$.

Ponemos

$$\Delta_\infty := \{(t,s) \mid 0 \leq s \leq t\} \qquad \text{y} \qquad \dot{\Delta}_\infty := \{(t,s) \mid 0 \leq s < t\}.$$

Si Q es el C_0-semigrupo analítico generado por $-A$, entonces $U(t,s) = Q(t - s) = U(t-s, 0)$ para $(t,s) \in \Delta_\infty$. Ponemos $v(t) := u(t+s; s, x)$ para $t \in J(s,x) - s$. Se sigue que

$$\begin{aligned} v(t) = u(s+t; s, x) &= U(s+t, s)x + \int_s^{s+t} U(s+t, \tau) f(u(\tau; s, x))\,\mathrm{d}\tau \\ &= U(t, 0)x + \int_0^t U(s+t, s+\tau) f(u(s+\tau; s, x))\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$= U(t,0)x + \int_0^t U(t,\tau) f(v(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Por unicidad de soluciones clementes obtenemos $v(t) = u(t;0,x)$, es decir,

$$u(t+s;s,x) = u(t;0,x) \qquad \text{para todo } t \in J(s,x) - s. \tag{3.32}$$

Entonces (3.31) es equivalente con

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), & t > 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{3.33}$$

Para omitir el parámetro s escribiremos $J(x) := J(0,x)$; $t^+(x) := t^+(0,x)$ y

$$\varphi(t,x) := u(t;0,x).$$

También ponemos

$$\mathcal{D} := \{(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times X_\alpha \mid t \in J(x)\}.$$

Se demuestra precisamente como en el Teorema 3.9 que $\mathcal{D}$ es abierto en $\mathbb{R}_0^+ \times X_\alpha$, que $t^+\colon X_\alpha \to (0,\infty]$ es semicontinuo por debajo y que $\varphi\colon \mathcal{D} \to X_\alpha$ es continuo. Además se tiene por el Lema 3.3 para $s, t \geq 0$ tales que $t + s \in J(x)$ que

$$\varphi(t,\varphi(s,x)) = u(t;0,u(s;0,x)) = u(s+t;s,u(s;0,x)) = u(s+t;0,x) = \varphi(s+t,x),$$

es decir, $t \mapsto \varphi(t,\cdot)$ es una representación local del semigrupo $(\mathbb{R}_0^+,+)$ en el espacio $C(\mathcal{D},X_\alpha)$ respecto a la composición. Se tiene también $\varphi(0,x) = u(0;0,x) = x$ para todo $x \in X_\alpha$.

Definición 3.13. Con las propiedades antes mencionados φ es el *semiflujo continuo generado por* (3.33) en X_α.

El Teorema 3.9 dice además que $\varphi\colon \mathcal{D} \to X_\alpha$ y $\varphi\colon \dot{\mathcal{D}} \to X_\beta$ son localmente Lipschitz continuos en x. Si escribimos

$$\mathcal{D}_t := \{x \in X_\alpha \mid t \in J(x)\}, \qquad \mathcal{D}_\infty := \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{D}_t,$$

y $\varphi^t := \varphi(t,\cdot)$, entonces en particular $\varphi^t\colon \mathcal{D}_t \to X_\alpha$ es localmente Lipschitz continuo, y $\varphi^t : \dot{\mathcal{D}}_t \to X_\beta$ es localmente Lipschitz continuo si $t > 0$. El mapeo φ^t es el *tiempo-t-mapeo*.

Definimos para $t \geq 0$ y $V \subseteq X_\alpha$

$$\begin{aligned}
\varphi^{-t}(V) &:= \{x \in \mathcal{D}_t \mid \varphi^t(x) \in V\}, \\
\mathcal{O}^+(V) &:= \bigcup_{t \geq 0} \varphi^t(V \cap \mathcal{D}_t), \\
\mathcal{O}^-(V) &:= \bigcup_{t \geq 0} \varphi^{-t}(V),
\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{O}(V) := \mathcal{O}^+(V) \cup \mathcal{O}^-(V).$$

Los conjuntos $\mathcal{O}^+(V)$, $\mathcal{O}^-(V)$ y $\mathcal{O}(V)$ son la *semiórbita positiva*, la *semiórbita negativa* y la *órbita* de V, respectivamente.

Consideremos ahora el caso donde $X_1 \hookrightarrow X_0$ es compacto. Se habla también del caso de *resolvente compacta*, porque $R(\lambda; A) \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$, considerado como operador en X_0, es compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Recordemos que un conjunto es *relativamente compacto* si su cerradura es compacta.

Proposición 3.14. *Si A tiene resolvente compacta y si $\mathcal{O}^+(V)$ es acotada en X_α para un subconjunto $V \subseteq X_\alpha$, entonces $V \subseteq \mathcal{D}_\infty$ y $\mathcal{O}^+(\varphi^t(V))$ es relativamente compacta para todo $t > 0$. Si además V es relativamente compacto en X_α, entonces $\mathcal{O}^+(V)$ es relativamente compacta.*

Demostración. Sean $\mathcal{O}^+(V)$ acotado en X_α y $t > 0$. Se sigue que $V \subseteq \mathcal{D}_\infty$ por el Teorema 3.6. Por la Proposición 3.12 $\mathcal{O}^+(\varphi^t(V))$ es acotado en X_1. La propiedad (FA2) implica que el encaje de X_1 en X_α es compacto. En seguida, $\mathcal{O}^+(\varphi^t(V))$ es relativamente compacta en X_α.

Sea además V relativamente compacto en X_α y sea $(x_n) \subseteq \mathcal{O}^+(V)$. Entonces existen $(y_n) \subseteq V$ y $t_n \geq 0$ tales que $x_n = \varphi(t_n, y_n)$. Si $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces pasamos a una subsucesión tal que $y_n \to y^*$ en X_α. Eso es posible porque V es relativamente compacto. Por la continuidad de φ se sigue que $x_n = \varphi(t_n, y_n) \to \varphi(0, y^*) = y^*$ en X_α, es decir, (x_n) converge. Si $t_n \not\to 0$ entonces podemos suponer, después de pasar a una subsucesión, que existe $\varepsilon > 0$ tal que $t_n \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En seguida, $x_n = \varphi(t_n - \varepsilon, \varphi(\varepsilon, y_n)) \in \mathcal{O}^+(\varphi^\varepsilon(V))$ y (x_n) tiene una subsucesión convergente en X_α por la primera parte. En ambos casos encontramos una subsucesión convergente, es decir, es cierta la afirmación. □

Un conjunto $V \subseteq X_\alpha$ es *positivamente invariante* si $\mathcal{O}^+(V) \subseteq V$. Definimos para $x \in X_\alpha$

$$\omega(x) := \bigcap_{t \in J(x)} \overline{\mathcal{O}^+(\varphi^t(x))}$$

el *conjunto ω-límite* de x. Una *solución entera* de (3.33) es un mapeo $u\colon \mathbb{R} \to X_\alpha$ tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ se tiene $u(t_0 + t) = \varphi(t, u(t_0))$. En particular, u satisface la ecuación $\dot{u} + Au = f(u)$. Una solución entera u de (3.33) *pasa por* $x \in X_\alpha$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) = x$.

Teorema 3.15. *Si $\mathcal{O}^+(x)$ es relativamente compacta, entonces $\omega(x) \neq \varnothing$ y $\omega(x)$ es compacto, conexo y positivamente invariante. Se tiene que $\omega(x) \subseteq \mathcal{D}_\infty$, y para todo $y_0 \in \omega(x)$ existe una solución entera u de* (3.33) *que pasa por y_0. Además*

$$\text{(3.34)} \qquad \operatorname{dist}(\varphi^t(x), \omega(x)) \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad t \to \infty.$$

Demostración. Por compacidad relativa de $\mathcal{O}^+(x)$ tenemos $t^+(x) = \infty$. Para $t \geq 0$ los conjuntos $V_t := \mathcal{O}^+(\varphi^t(x))$ son invariantes positivamente, no son vacíos y forman una cadena respecto a inclusión. Sea (t_n) una sucesión creciente tal que $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, y sean $x_n \in V_{t_n}$. Como $(x_n) \subseteq \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ y ese conjunto es compacto, $x_n \to x^*$ después de pasar a una subsucesión. Para cualquier $t \geq 0$ existe n_0 tal que $t_n \geq t$ si $n \geq n_0$. En seguida, $x_n \in V_t$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $x^* \in \overline{V_t}$. Como $t \geq 0$ era arbitrario, $x^* \in \omega(x)$ y $\omega(x)$ no es vacío. Como intersección de conjuntos cerrados, también $\omega(x)$ es cerrado, y es compacto por ser subconjunto cerrado del conjunto compacto $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$.

Supongamos por contradicción que (3.34) no fuera cierto. Entonces existiría una sucesión $t_n \to \infty$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\text{(3.35)} \qquad \operatorname{dist}(\varphi^{t_n}(x), \omega(x)) \geq \varepsilon.$$

Por el mismo argumento como antes existiría $x^* \in \omega(x)$ tal que $\varphi^{t_n}(x) \to x^*$ cuando $n \to \infty$, contradiciendo (3.35). Eso demuestra (3.34).

Supongamos que $\omega(x)$ no fuera conexo. Entonces $\omega(x) = \omega_1 \cup \omega_2$ para conjuntos cerrados (es decir, compactos), ajenos y no vacíos ω_1 y ω_2. Como $\operatorname{dist}(\omega_1, \omega_2) > 0$, existen vecindades U_i abiertas y ajenas de ω_i, $i = 1, 2$. Como $U_1 \cup U_2$ es una vecindad de $\omega(x)$ y por (3.34) existe t tal que $V_t \subseteq U_1 \cup U_2$.

Como $\omega_i \neq \varnothing$ para $i = 1, 2$, $V_t \cap U_i \neq \varnothing$ para $i = 1, 2$. Entonces los conjuntos $V_t \cap U_1$ y $V_t \cap U_2$ forman una partición de V_t de subconjuntos ajenos, no vacíos y relativamente abiertos. Eso es una contradicción con que V_t es conexo, siendo la imagen de $[t, \infty)$ bajo la aplicación continua $\varphi(\cdot, x)$. Se sigue que $\omega(x)$ es conexo.

Demostremos que

$$\mathcal{O}^+(\omega(x)) \subseteq \overline{V_t} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.36}$$

Si no fuera cierto, entonces existirían $t \geq 0$, $x^* \in \omega(x)$ y $t^* > 0$ tales que $(t^*, x^*) \in \mathcal{D}$ y $\varphi^{t^*}(x^*) \notin \overline{V_t}$. Como $\omega(x) \subseteq \overline{V_t}$, existe una sucesión $(x_n) \in V_t$ tal que $x_n \to x^*$. Por continuidad se sigue que $\varphi(t^*, x_n) \to \varphi(t^*, x^*) \notin \overline{V_t}$. Por otro lado, $\varphi(t^*, x_n) \in V_t$ por invariancia positiva de V_t. Esa contradicción comprueba (3.36). Como $\overline{V_0}$ es compacto, se sigue que $\omega(x) \subseteq \mathcal{D}_\infty$ y que

$$\mathcal{O}^+(\omega(x)) \subseteq \bigcap_{t \geq 0} \overline{V_t} = \omega(x),$$

es decir, $\omega(x)$ es positivamente invariante.

Sean $y_0 \in \omega(x)$ y $t_n \to \infty$ tales que $\varphi(t_n, x) \to y_0$. Por compacidad de $\overline{V_0}$ existe una subsucesión (t_{n_1}) tal que $\varphi(t_{n_1} - 1, x) \to y_1 \in \omega(x)$. Inductivamente escogemos subsucesiones (t_{n_k}) de $(t_{n_{k-1}})$ y $y_k \in \omega(x)$ tales que $\varphi(t_{n_k} - k, x) \to y_k$, para $k \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión diagonal $t'_n := t_{n_n}$ cumple que

$$\varphi(t'_n - k, x) \to y_k \qquad \text{cuando } n \to \infty, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.37}$$

Sean $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq k \leq \ell$. Entonces

$$\begin{aligned} y_k = \lim_{n \to \infty} \varphi(t'_n - k, x) &= \lim_{n \to \infty} \varphi(\ell - k, \varphi(t'_n - \ell, x)) \\ &= \varphi(\ell - k, \lim_{n \to \infty} \varphi(t'_n - \ell, x)) = \varphi(\ell - k, y_\ell). \end{aligned}$$

En seguida

$$\varphi(t + \ell, y_\ell) = \varphi(t + k, \varphi(\ell - k, y_\ell)) = \varphi(t + k, y_k)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $-t \leq k \leq \ell$. Eso nos permite definir $u \colon \mathbb{R} \to X_\alpha$ por

$$u(t) := \varphi(t + k, y_k) \qquad \text{si } t + k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 3.3 u es una solución entera de (3.33), y $u(\mathbb{R}) \subseteq \omega(x)$ porque $\omega(x)$ es positivamente invariante. Como $u(0) = \varphi(0, y_0) = y_0$, u pasa por y_0. □

3.3 Un ejemplo autónomo

Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ una región acotada con frontera lisa. Consideramos un mapeo $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\cdot, u)$ es Borel medible para todo $u \in \mathbb{R}$ y tal que existen $p \in [1, \infty)$ y $C > 0$ tales que

$$|f(x,u)| \leq C(1 + |u|^p) \qquad \text{para todo } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

y

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u - v| \qquad \text{para todo } x \in \Omega,\ u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Nota 3.16. Se dice que una función $g\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *Caratheodory* si es medible en el primer argumento y continua en el segundo argumento. En ese caso se sigue que el mapeo $\Omega \to \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto g(x, u(x))$ es Borel medible siempre cuando u es Borel medible.

Trataremos el *problema parabólico semilineal*

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x, u(x,t)), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.40}$$

Una función continua $u\colon \overline{\Omega} \times J(u_0) \to \mathbb{R}$ que es diferenciable continuamente en $t > 0$, diferenciable continuamente dos veces en $x \in \Omega$ y que cumple (3.40) en el sentido concreto es una *solución clásica* de (3.40).

Para considerar (3.40) en la forma abstracta (3.33) necesitamos entender como el *operador de Nemyckii* (*operador de superposición*) $\hat{f}$, definido para funciones $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{f}(u)(x) := f(x, u(x)), \tag{3.41}$$

se puede interpretar como operador no lineal entre espacios adecuados de funciones $\Omega \to \mathbb{R}$.

Proposición 3.17. *Bajo la condición* (3.39) *se tiene para cualquier* $q \geq 1$ *que* $\hat{f} : L^{pq}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *y*

(3.42)
$$|\hat{f}(u) - \hat{f}(v)|_q \leq C(|u|_{pq}^{p-1} + |v|_{pq}^{p-1})|u - v|_{pq} \qquad \text{para todo } u, v \in L^{pq}(\Omega),$$

es decir, $\hat{f}$ *es Lipschitz continuo en conjuntos acotados.*

Demostración. Primero notemos que para números $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $r > 0$ se tiene

$$(a + b)^r \leq (2 \,\text{máx}\{a, b\})^r = 2^r \,\text{máx}\{a^r, b^r\} \leq 2^r (a^r + b^r) \tag{3.43}$$

y

$$a^r + b^r \leq 2 \,\text{máx}\{a^r, b^r\} = 2 \,\text{máx}\{a, b\}^r \leq 2(a + b)^r. \tag{3.44}$$

Sea $u \in L^{pq}(\Omega)$. Entonces por (3.43) y (3.44) se tiene

$$\begin{aligned} |f(u)|_q^q &= \int_\Omega |f(u(x))|^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega (1 + |u(x)|^p)^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega (1 + |u(x)|^{pq}) \,\mathrm{d}x \\ &= C(|\Omega| + |u|_{pq}^{pq}) \\ &\leq C(1 + |u|_{pq}^p)^q, \end{aligned}$$

es decir, $f(u) \in L^q(\Omega)$ y $|f(u))|_q \leq C(1 + |u|_{pq}^p)$.

Sean $u, v \in L^{pq}(\Omega)$. Calculamos con (3.43), (3.44) y la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(u) - \hat{f}(v)|_q^q &= \int_\Omega |f(x, u(x)) - f(x, v(x))|^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})^q |u - v|^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega |u|^{(p-1)q} |u - v|^q \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^{(p-1)q} |u - v|^q \,\mathrm{d}x \\ &\leq C(|u|_{pq}^{(p-1)q} + |v|_{pq}^{(p-1)q})|u - v|_{pq}^q \\ &\leq C(|u|_{pq}^{(p-1)} + |v|_{pq}^{(p-1)})^q |u - v|_{pq}^q. \end{aligned}$$

Eso comprueba (3.42). □

Si consideramos el operador $A := -\Delta$ realizado en un espacio adecuado de funciones, que toma en consideración la condición de Dirichlet en la frontera, con la notación introducida el problema (3.40) se escribe de manera abstracta como sigue:

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = \bar{f}(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Para $q > 1$ definimos $E_{q,0} := L^q(\Omega)$ y $E_{q,1} := W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$. Como en la sección 1.4 sea A_q la realización de $-\Delta$ en $E_{q,0}$ con dominio $E_{q,1}$. Con la familia admisible $([\cdot,\cdot]_\theta)_\theta$ de interpolación compleja definimos para $\alpha \in (0,1)$: $E_{q,\alpha} := [E_{q,0}, E_{q.1}]_\alpha$.

Para presentar explícitamente los espacios interpolados $E_{q,\alpha}$ sea $\mathcal{F}$ la transformación de Fourier:

$$\hat{u}(\xi) := (\mathcal{F}u)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{cuando } u \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Si $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $q > 1$ entonces sea $\hat{u} := \mathcal{F}(u)$ el funcional lineal en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} u\hat{\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

Similarmente se representa la inversa de la transformación de Fourier por

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{cuando } \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Estas definiciones se detallan mediante la teoría de distribuciones.

Definimos para $s \in \mathbb{R}$ y $q > 1$ los *espacios de potencial Bessel* (también llamados *espacios generalizados de Lebesgue* o *espacios de Liouville*)

$$W^{s,q}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^q(\mathbb{R}^N) \mid \mathcal{F}^{-1}((1+|x|^2)^{s/2}\mathcal{F}u) \in L^q(\mathbb{R}^N)\}.$$

Para $s \in \mathbb{N}_0$ esa definición es consistente con la definición usual de los espacios de Sobolev. Nótese que la notación $W^{s,q}$ no es estandardizada; en algunos libros se usan los símbolos $L^{s,q}$ o $H^{s,q}$. Los espacios relacionados en la región

Ω están definidos como restricciones de funciones en los espacios en $\mathbb{R}^N$:

$$W^{s,q}(\Omega) := \{u \in L^q(\Omega) \mid \exists v \in W^{s,q}(\mathbb{R}^N) \colon u = v|_\Omega\}.$$

La representación de espacios de Sobolev interpolados entonces es

$$E_{q,\alpha} = \begin{cases} \{u \in W^{2\alpha,q}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} & \text{si } 1/(2q) < \alpha \leq 1 \\ W^{2\alpha,q}(\Omega) & \text{si } 0 \leq \alpha < 1/(2q). \end{cases} \tag{3.46}$$

Aquí la restricción de funciones a $\partial\Omega$ necesita una definición cuidadosa porque $\partial\Omega$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^N$. Eso se consigue mediante extensión y aproximación en la teoría de espacios de Sobolev.

Para $\gamma \in \mathbb{R}$ denotemos

$$\gamma^+ := \begin{cases} \gamma, & \text{si } \gamma > 0, \\ 0, & \text{si } \gamma \leq 0. \end{cases}$$

Usamos la convención que $\gamma/0 := \infty$ si $\gamma > 0$. Recordemos ciertas inyecciones de los espacios de potencial de Bessel en nuestro caso particular de una región lisa y acotada:

Nota 3.18. (a) Sean $s > 0$ y $1 \leq q \leq r$. Entonces

$$W^{t+s,q}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{t,r}(\Omega) \qquad \text{para todo } t \geq 0,\ r < \frac{qN}{(N-qs)^+}. \tag{3.47}$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ y $qn > N$ entonces

$$W^{k+n,q}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \in \big(0, \text{mín}\{1, n - N/q\}\big). \tag{3.48}$$

Teorema 3.19. *Sean $p \geq 1$, $q > 1$ y $\alpha \in [0,1)$ tales que*

$$p < \frac{N}{(N-2q\alpha)^+}. \tag{3.49}$$

Supóngase que (3.39) es cierto. Entonces (3.45) genera un semiflujo φ de soluciones en $E_{q',\alpha}$ para cualquier $q' \geq q$. En esto el tiempo de escape no depende de q'. Si $u_0 \in E_{q,\alpha}$ y $u(t) := \varphi(t,u_0)$, entonces

$$u \in C(J(u_0), E_{q,\alpha}) \cap C^1(\dot{J}(u_0), L^{q'}(\Omega)) \cap C(\dot{J}(u_0), W^{2,q'}(\Omega)). \tag{3.50}$$

Si además f es Hölder continuo en conjuntos acotados, entonces se tiene que

$$u \in C(\dot{J}(u_0), C^2(\Omega)) \cap C^1(\dot{J}(u_0), C_0(\overline{\Omega})) \tag{3.51}$$

y la función $u(x,t) := u(t)(x)$ es una solución clásica de (3.40) *para tiempos positivos.*

Idea de la demostración. Consideramos primero $X_0 := E_{q',0}$ y $X_1 := E_{q',1}$, así que $X_\alpha := E_{q',\alpha}$. La ecuación (3.49), la Nota 3.18(a) con $q = q'$, $s = 2\alpha$, $t = 0$ y $r = pq'$, la representación (3.46) y la Proposición 3.17 implican para cualquier $q' \geq q$ que

$$X_\alpha = E_{q',\alpha} \hookrightarrow L^{pq'} \overset{\bar{f}}{\hookrightarrow} L^{q'} = E_{q',0} = X_0,$$

y que este mapeo es Lipschitz continuo en conjuntos acotados. Entonces la discusión en la sección 3.2 implican la existencia del semiflujo en $E_{q',\alpha}$ con la propiedad (3.50).

Sea $u_0 \in E_{q,\alpha}$. Ponemos $u(t) := \varphi^t(u_0)$. Si $q < q' < qN/(N - 2q(1 - \alpha))^+$, entonces tenemos un diagrama conmutativo de encajes:

$$\begin{tikzcd} E_{q',1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & E_{q',\alpha} \arrow[d, hook] \\ E_{q,1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook] & E_{q,\alpha} \end{tikzcd} \tag{3.52}$$

Eso implica que

$$u \in C(\dot{J}(u_0), E_{q,1}) \subseteq C(\dot{J}(u_0), E_{q',\alpha}) \subseteq C(\dot{J}(u_0), E_{q,\alpha})$$

y que u es una solución en $E_{q',\alpha}$. Por (3.52) y por la unicidad, las soluciones en $E_{q',\alpha}$ y $E_{q,\alpha}$ coinciden. En seguida, $J(u_0)$ es independiente de q', y escribimos $J := J(u_0)$. Considerando el problema parabólico en $E_{q',\alpha}$, se sigue que $u \in C(\dot{J}, E_{q',1})$. No es difícil demostrar que uno puede alcanzar cualquier $q' \geq q$ en un número finito de iteraciones de este proceso.

Suponiendo ahora que $q' > N$, tenemos encajes

$$
\begin{tikzcd}
 & C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \arrow[d, hook] \\
E_{q',\beta} \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & E_{q',1/2}
\end{tikzcd}
\tag{3.53}
$$

por la Nota 3.18(b), para algunos $\beta \in (1/2, 1)$ y $\gamma \in (0, 1]$. Además, se cumple que

$$E_{q',1/2} \hookrightarrow L^{pq'}(\Omega) \xrightarrow{\bar{f}} L^{q'}(\Omega) = E_{q',0}.$$

Entonces existe el semiflujo parabólico en $E_{q',1/2}$. Para tiempos positivos, $u(t) \in E_{q',1}$. Entonces la fórmula de la variación de parámetros y el Corolario 2.26(a) implican que $u\colon \dot{J} \to E_{q',\beta} \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ es Hölder continuo. La función $h(t,x) := f(x, u(x,t))$ es Hölder continua en (t,x) para t en subintervalos compactos de J, y u es solución abstracta de la ecuación lineal no homogénea

$$
\begin{cases}
\partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = h(t,x), & x \in \Omega,\ t > 0,\\
u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0,\\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega.
\end{cases}
\tag{3.54}
$$

La teoría de existencia para ecuaciones lineales dice que existe una y sólo una solución clásica v de (3.54). Por (3.53) v también es una solución abstracta en $E_{q',1/2}$. Por la unicidad, $u = v$ para tiempos positivos, es decir, u es una solución clásica.

La demostración arriba no es exacta porque no conocemos encajes de los espacios $E_{q',\alpha}$ si $2q'\alpha = 1$, véase (3.46). Hay que modificar los pasos iterativos de tal manera que uno evite esa situación. □

Nota 3.20. Uno puede extender el rango admisible del exponente p en (3.39) considerando escalas de extrapolación-interpolación de espacios. Por ejemplo, se puede demostrar que existe el semiflujo parabólico en $H_0^1(\Omega)$ si $p < (N+2)/(N-2)$, un caso que no está cubierto por lo anterior si $N \geq 3$. Para detalles véase [1].

Para el próximo resultado ponemos $X_0 := E_{2,0} = L^2(\Omega)$ y $X_1 := E_{2,1} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, así que $X_{1/2} = H_0^1(\Omega)$. En X_0 usamos el producto escalar usual de $L^2(\Omega)$ y lo denotamos por $(\cdot,\cdot)_0$. La norma inducida es $\|\cdot\|_0$. En $X_{1/2}$ usamos el producto escalar

$$(u,v)_{1/2} := \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

y la norma inducida

$$\|u\|_{1/2} := \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Para $u, v \in X_1$ integración por partes implica que

$$(u,v)_{1/2} = (Au,v)_0 = (u,Av)_0\,. \tag{3.55}$$

Proposición 3.21 (Continuación única)**.** *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in (t_0,\infty]$ y $u \in C([t_0,t_1),X_1) \cap C^1((t_0,t_1),X_0)$ tales que $u(t) \neq 0$ para todo $t \in [t_0,t_1)$. Sea $h \in L^2(t_0,t_1)$ tal que*

$$\|\dot u(t) + Au(t)\|_0 \le h(t)\|u(t)\|_{1/2}$$

para todo $t \in (t_0,t_1)$. Definimos $\Gamma\colon X_{1/2}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$\Gamma(u) := \frac{\|u\|_{1/2}^2}{\|u\|_0^2}.$$

Entonces para todo $t \in [t_0,t_1)$ se cumple que

$$\Gamma(u(t)) \le \Gamma(u(t_0))\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|h\|_{L_2}^2} \tag{3.56}$$

y

$$\|u(t)\|_0 \ge C_1\|u(t_0)\|_0\mathrm{e}^{-C_2(t-t_0)} \tag{3.57}$$

con constantes

$$C_1 := \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|h\|_{L_2}^2}$$
$$C_2 := \frac{3}{2}\Gamma(u(t_0))\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|h\|_{L_2}^2}\,.$$

Demostración. Primero notemos que para $v \in X_1$ la Ecuación (3.55) implica que

$$\Gamma(v) = \frac{(Av, v)_0}{\|v\|_0^2}.$$

Definimos $\gamma(t) := \Gamma(u(t))$ para $t \in [t_0, t_1)$ y $g(t) := \dot{u}(t) + Au(t)$ para $t \in (t_0, t_1)$. Recordemos que (3.55) muestra que A es simétrico. La identidad

$$\begin{aligned}(Au(t+s), u(t+s))_0 - (Au(t), u(t))_0 \\ = (A(u(t+s) + u(t)), u(t+s) - u(t))_0\end{aligned}$$

muestra que $t \mapsto (Au(t), u(t))_0$ es diferenciable con

$$\frac{d}{dt}\,(Au(t), u(t))_0 = 2\,(Au(t), \dot{u}(t))_0$$

para $t \in (t_0, t_1)$. Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u\|_0^4\dot{\gamma} &= \|u\|_0^2\,(Au, \dot{u})_0 - (u, \dot{u})_0\,(Au, u)_0 \\ &= \|u\|_0^2\,(Au, g - Au)_0 + (u, Au - g)_0\,(Au, u)_0 \\ &= -\|u\|_0^2\|Au - g/2\|_0^2 + (u, Au - g/2)_0^2 \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{4}\|u\|_0^2\|g\|_0^2 - \frac{1}{4}\,(u, g)_0^2 \\ &\le \frac{1}{4}\|u\|_0^2\|g\|_0^2 \\ &\le \frac{1}{4}\|u\|_0^2\|u\|_{1/2}^2 h^2\end{aligned}$$

y luego

$$\dot{\gamma}(t) \le \frac{1}{2}h^2(t)\gamma(t)$$

para $t \in (t_0, t_1)$. Eso demuestra (3.56) después de dividir entre γ y integrar de t_0 a t.

Ahora calculamos con (3.56):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log\|u\|_0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\|u\|_0^2 = \frac{(u, \dot{u})_0}{\|u\|_0^2} &= \frac{(u, g - Au)_0}{\|u\|_0^2} \\ &= -\gamma + \frac{(u, g)_0}{\|u\|_0^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq -\gamma - h\sqrt{\gamma} \\
&\geq -\frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{2}h^2 \\
&\geq -\frac{3}{2}\gamma(t_0)e^{\frac{1}{2}\|h\|_{L_2}^2} - \frac{1}{2}h^2.
\end{aligned}$$

Aquí también hay que integrar de t_0 a t para mostrar (3.57). □

Corolario 3.22 (Unicidad hacía atrás)**.** *En la situación del sea φ el semiflujo en $E_{q,\alpha}$. Entonces φ^t es inyectivo para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Usamos la misma notación como en la Proposición 3.21. Como $\varphi^0 = \mathrm{id}_{E_{q,\alpha}}$, φ^0 es inyectivo. Supongamos por contradicción que existen $t_0 > 0$ y $u_0 \neq v_0$ en $\mathcal{D}_{t_0}$ tales que $\varphi^{t_0}(u_0) = \varphi^{t_0}(v_0)$. Podemos suponer que t_0 es el primer tiempo donde pasa esto, por la continudad de φ. Sean u y v las órbitas principiando en u_0 y v_0. Moviendo el tiempo hacia adelante un monto pequeño podemos suponer que

$$u, v \in C([0, t_0], X_1) \cap C([0, t_0], C(\overline{\Omega})) \cap C^1([0, t_0], X_0).$$

Esto es una consecuencia de la regularidad que demostramos en el Teorema 3.19. Como u y v son acotados en $C(\overline{\Omega})$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$g(t) := \bar{f}(u(t)) - \bar{f}(v(t))$$

satisface

$$\|g(t)\|_0 \leq C\|u(t) - v(t)\|_{1/2}$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Esto es una consecuencia de la Proposición 3.17. Si definimos $w(t) := u(t) - v(t)$, entonces w es una solución de la ecuación abstracta

$$\dot{w} + Aw = g$$

en X_0. Eso implica que $\|\dot{w} + Aw\|_0 \leq C\|u(t) - v(t)\|_{1/2}$. Ahora (3.57) de la Proposición 3.21 implica que $w(t_0) \neq 0$, una contradicción. □

Para enunciar un resultado sobre la comparación de órbitas, necesitamos más notación. Si dos funciones medibles $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ cumplen $u(x) \geq v(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, entonces escribimos $u \geq v$. La notación $u > v$ significa que $u \geq v$ y $u \neq v$ en el sentido de funciones medibles. Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y $x \in \partial\Omega$, entonces denotamos por $\partial_\nu u(x)$ la derivada parcial de u en x en la dirección de la normal extrior a $\partial\Omega$. Esta noción está bien definida porque Ω tiene frontera lisa y así cualquier función en $C^1(\overline{\Omega})$ tiene una sola extensión continuamente diferenciable a una vecindad de $\overline{\Omega}$. Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ son tales que $u > v$ y $\partial_\nu u(x) < \partial_\nu v(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces escribimos $u \gg v$.

El *cono positivo* $\mathcal{P}X$ de un espacio de funciones reales medibles en Ω es el conjunto de funciones $u \in X$ que cumplen $u \geq 0$. Si X es un espacio de Banach, entonces denotemos por $\mathcal{P}_0 X$ el interior de $\mathcal{P}X$. En los espacios de Banach que estamos considerando aquí, convergencia de una sucesión de funciones implica convergencia en casi todo punto para una subsucesión. Por este hecho el cono positivo $\mathcal{P}X$ siempre es un subconjunto cerrado de X. En general puede pasar que $\mathcal{P}_0 X = \varnothing$. Esto es cierto, por ejemplo, si $X = L^q(\Omega)$ para algún $q \geq 1$. Pero es muy fácil ver que $\mathcal{P}_0 C^1(\overline{\Omega}) \neq \varnothing$. El significado de considerar la relación $u \gg v$ es que esta relación es estable bajo perturbaciones en $C^1(\overline{\Omega})$.

Tenemos las siguientes relaciones si X es un espacio de funciones medibles en Ω y si $u, v \in X$:

$$
\begin{aligned}
u \geq v &\Leftrightarrow u - v \in \mathcal{P}X;\\
u > v &\Leftrightarrow u - v \in \mathcal{P}X \setminus \{0\};\\
u \gg v &\Leftrightarrow u, v \in C^1(\overline{\Omega}),\ u - v \in \mathcal{P}_0 C^1(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

Teorema 3.23. *En la situación del Teorema* 3.19 *consideramos el caso de* $\alpha \leq 1/2$. *Sean* $u_0^1, u_0^2 \in E_{q,\alpha}$ *tales que* $u_0^1 > u_0^2$. *Pongamos* $J := J(u_0^1) \cap J(u_0^2)$ *y definimos* $u^i(t) := \varphi(t, u_0^i)$ *para* $t \in J$, $i = 1, 2$. *Entonces*

$$
u^1(t) \gg u^2(t) \qquad \text{para todo } t \in J \setminus \{0\}. \tag{3.58}
$$

Demostración. Fijemos $t > 0$. Como $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $E_{q,\alpha}$, existen sucesiones $v_n^i \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tales que $v_n^i \to u_0^i$ en $E_{q,\alpha}$ cuando $n \to \infty$. Definimos $w_n^1 := \text{máx}\{v_n^1, v_n^2\}$ y $w_n^2 := \text{mín}\{v_n^1, v_n^2\}$. Se sigue que $w_n^1 \geq w_n^2$ para todo n. El mapeo $u \mapsto u^+ := \text{máx}\{u, 0\}$ es continuo de $E_{q,\alpha}$ en $E_{q,\alpha}$. Esto es una consecuencia de que $\alpha \leq 1/2$, véase [17]. Se sigue que

$$
w_n^1 = v_n^2 + (v_n^1 - v_n^2)^+ \to u_0^2 + (u_0^1 - u_0^2)^+ = u_0^1
$$

y similarmente que $w_n^2 \to u_0^2$ en $E_{q,\alpha}$ cuando $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Las funciones w_n^i son Lipschitz continuas en $\overline{\Omega}$, así que el principio del máximo clásico para ecuaciones parabólicas implica que $\varphi^{t/2}(w^1) \geq \varphi^{t/2}(w^2)$ para todo n. Por la continuidad de φ obtenemos

$$\varphi^{t/2}(u_0^1) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{t/2}(w_n^1) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi^{t/2}(w_n^2) = \varphi^{t/2}(u_0^2).$$

Tenemos que $\varphi^{t/2}(u_0^1), \varphi^{t/2}(u_0^2) \in C^1(\overline{\Omega})$. Además, $\varphi^{t/2}(u^1) \neq \varphi^{t/2}(u^2)$ por el Corolario 3.22. Otra aplicación del principio del máximo clásico implica que $\varphi^t(u^1) \gg \varphi^t(u^2)$. □

3.4 Dependencia diferenciable y en parámetros

Para obtener resultados cualitativos sobre ecuaciones parabólicas semilineales, una herramienta es la consideración de la linearización del flujo en una vecindad de un equilibrio. Por ejemplo, esto nos lleva a resultados sobre estabilidad y inestabilidad, lo cual aporta a completar la imágen del comportamiento global del sistema dinámico. Otra herramienta es considerar ecuaciones que dependen de parámetros y observar como cambia el sistema dinámico bajo cambios de los parámetros.

Preparamos este análisis con una extensión del teorema de punto fijo de Banach que da información sobre la dependencia del punto fijo único obtenido respecto a cambios a los parámetros del problema.

Sean E, F espacios de Banach, $U \subseteq E$ y $\Lambda \subseteq F$ subconjuntos abiertos, y $G : \overline{U} \times \Lambda \to \overline{U}$ un mapeo. Decimos que G es una *contracción uniforme en* $\overline{U}$ si existe $\kappa \in (0,1)$ tal que

$$\|G(x,\lambda) - G(y,\lambda)\| \leq \kappa \|x - y\|$$

para todo $x, y \in \overline{U}$ y $\lambda \in \Lambda$. Por el teorema de punto fijo de Banach existe una función $\gamma : \Lambda \to \overline{U}$ tal que $\gamma(\lambda)$ es el único punto fijo del mapeo $G(\cdot,\lambda)$. En otras palabras,

$$G(\gamma(\lambda),\lambda) = \gamma(\lambda) \tag{3.59}$$

para todo $\lambda \in \Lambda$.

Proposición 3.24. *Sea G una contracción uniforme en $\overline{U}$. Además supongamos que existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $G \in C^k(\overline{U} \times \Lambda, E)$. Entonces $\gamma \in C^k(\Lambda, \overline{U})$. Si $k \geq 1$, entonces el operador lineal $\mathrm{D}\gamma(\lambda) \in \mathcal{L}(F,E)$ cumple la ecuación de* *operadores*

$$\mathrm{D}_1 G(\gamma(\lambda), \lambda)\mathrm{D}\gamma(\lambda) + \mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda), \lambda) = \mathrm{D}\gamma(\lambda). \tag{3.60}$$

Demostración. Recordemos algunos detalles de la demostración del teorema de punto fijo de Banach. Fijemos $x_0 \in \overline{U}$. Para $\lambda \in \Lambda$ definimos inductivamente una sucesión $(x_n^\lambda)_n$ por $x_0^\lambda := x_0$ y $x_{n+1}^\lambda := G(x_n^\lambda, \lambda)$. Entonces $x_n^\lambda \to \gamma(\lambda)$ cuando $n \to \infty$ y se tiene

$$\|\gamma(\lambda) - x_n^\lambda\| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|x_1^\lambda - x_0\| \tag{3.61}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Notamos que $\lambda \mapsto x_n^\lambda$ es una función continua para todo n, por la continuidad de G.

Sea ahora $\lambda_0 \in \Lambda$. Mostremos que γ es continua en λ_0. Para ello sea $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tan grande que

$$\frac{\kappa^n}{1-\kappa}\left(2\|x_1^{\lambda_0} - x_0\| + 1\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la continuidad de $\lambda \mapsto x_1^\lambda$ y $\lambda \mapsto x_n^\lambda$ existe $r > 0$ tal que

$$\|x_1^\lambda - x_0\| \leq \|x_1^{\lambda_0} - x_0\| + 1$$

y

$$\|x_n^\lambda - x_n^{\lambda_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\lambda \in B_r(\lambda_0)$. Para estos elementos λ obtenemos por (3.61) que

$$\begin{aligned}
\|\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda_0)\| &\leq \|\gamma(\lambda) - x_n^\lambda\| + \|x_n^\lambda - x_n^{\lambda_0}\| + \|x_n^{\lambda_0} - \gamma(\lambda_0)\| \\
&\leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\left(\|x_1^\lambda - x_0\| + \|x_1^{\lambda_0} - x_0\|\right) + \|x_n^\lambda - x_n^{\lambda_0}\| \\
&\leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\left(2\|x_1^{\lambda_0} - x_0\| + 1\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ y $\lambda_0 \in \Lambda$ eran arbitrarios, eso muestra la continuidad de γ.

Consideremos ahora el caso $k = 1$. Usaremos la continuidad de γ antes demostrada. Si γ es diferenciable entonces la regla de la cadena, aplicada para derivar (3.59) respecto a λ, implica la ecuación (3.60), o, escrita de otra manera,

$$M(\lambda)\mathrm{D}\gamma(\lambda) = \mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda), \lambda) \tag{3.62}$$

donde definimos $M(\lambda) := I - \mathrm{D}_1 G(\gamma(\lambda), \lambda) \in \mathcal{L}(E)$. Para resolver (3.62) respecto a la derivada esperada $\mathrm{D}\gamma(\lambda)$ necesitamos invertir al operador $M(\lambda)$. Sean $\lambda \in \Lambda$ fijo y $\varepsilon > 0$. Como G es diferenciable, existe $r > 0$ tal que para todo $h \in B_r E$ se cumple

$$\|G(x+h, \lambda) - G(x, \lambda) - \mathrm{D}_1 G(x, \lambda)h\| \leq \varepsilon\|h\|$$

y luego

$$\|\mathrm{D}_1 G(x, \lambda)h\| \leq \|G(x+h, \lambda) - G(x, \lambda)\| + \varepsilon\|h\| \leq (\kappa + \varepsilon)\|h\|.$$

Tomando el supremo de $\|\mathrm{D}_1 G(x, \lambda)h\|/\|h\|$ sobre todo $h \in B_r E$ resulta que $\|\mathrm{D}_1 G(x, \lambda)\| \leq \kappa + \varepsilon$. Dejando $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$\|\mathrm{D}_1 G(x, \lambda)\| \leq \kappa. \tag{3.63}$$

En seguida $M(\lambda)$ es invertible en $\mathcal{L}(E)$ por la serie de Neumann y se cumple

$$\|M(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\kappa}. \tag{3.64}$$

Definimos ahora

$$T(\lambda) := M(\lambda)^{-1}\mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda), \lambda),$$

así que $T \in C(\Lambda, \mathcal{L}(F, E))$. Falta mostrar que

$$\gamma(\lambda + \eta) - \gamma(\lambda) - T(\lambda)\eta = o(\|\eta\|) \tag{3.65}$$

cuando $\eta \to 0$, para $\lambda \in \Lambda$ fijo. Eso demostraría que γ es diferenciable y que $\mathrm{D}\gamma = T$.

Por (3.59) y por la diferenciabilidad de G obtenemos

(3.66) $M(\lambda)[\gamma(\lambda + \eta) - \gamma(\lambda)]$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(\lambda+\eta) - \gamma(\lambda) - \mathrm{D}_1 G(\gamma(\lambda),\lambda)[\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)] \\
&= G(\gamma(\lambda+\eta),\lambda+\eta) - G(\gamma(\lambda),\lambda) - \mathrm{D}_1 G(\gamma(\lambda),\lambda)[\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)] \\
&= \mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda)\eta + G(\gamma(\lambda)+\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda),\lambda+\eta) - G(\gamma(\lambda),\lambda) \\
&\qquad\qquad - \mathrm{D}_1 G(\gamma(\lambda),\lambda)[\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)] - \mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda)\eta \\
&= \mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda)\eta + o(\|\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)\| + \|\eta\|)
\end{aligned}
$$

cuando $\eta \to 0$. Aquí usamos que $\gamma(\lambda+\eta) \to \gamma(\lambda)$ cuando $\eta \to 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ tan chico que $\varepsilon/(1-\kappa) \le 1/2$. Existe $r > 0$ tal que para todo $\eta \in B_r F$, después de aplicar $M(\lambda)^{-1}$ a (3.66) y usando (3.64), se cumple:

$$
\begin{aligned}
&\|\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)\| \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{1-\kappa}\|\mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda)\eta\| + \frac{1}{2}(\|\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)\| + \|\eta\|).
\end{aligned}
$$

En seguida,

$$
\|\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)\| \le \frac{2}{1-\kappa}\|\mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda)\eta\| + \|\eta\| = O(\|\eta\|)
$$

cuando $\eta \to 0$. Esto junto con (3.66) y la definición de $T(\lambda)$ implica que

$$
M(\lambda)[\gamma(\lambda+\eta)-\gamma(\lambda)-T(\lambda)\eta] = o(\|\eta\|),
$$

así que (3.65) se cumple después de aplicar $M(\lambda)^{-1}$ en ambos lados. Eso termina la demostración del caso $k = 1$.

Para $k \ge 2$ apliquemos un argumento de inducción. Si el resultado es cierto para $k-1$, sea $G \in C^k(\overline{U} \times \lambda, E)$. Por la hipótesis de inducción $\gamma \in C^{k-1}(\Lambda, E)$, así que también $M \in C^{k-1}(\Lambda, \mathcal{L}(E))$. La representación

$$
\mathrm{D}\gamma(\lambda) = M(\lambda)^{-1}\mathrm{D}_2 G(\gamma(\lambda),\lambda),
$$

implica que $\mathrm{D}\gamma \in C^{k-1}(\Lambda, E)$, es decir, $\gamma \in C^k(\Lambda, E)$. $\square$

Suponiendo una familia de operadores $A\colon [0,T] \to \mathcal{L}(X_1, X_0)$ con las propiedades (A1)–(A3) y denotando por U su operador de evolución trabajaremos en la situación de problemas abstractos de la forma

$$
\begin{cases} \dot{u} + A(t)u = f(t,u,\lambda), & t \in (s,T], \\ \qquad u(s) = x. \end{cases} \tag{3.67}
$$

Aquí tomamos $(s, x) \in [0, T) \times X_\alpha$. Supongamos que $\alpha \in [0, 1)$, que Λ es un subconjunto abierto de un espacio de Banach y que $f : [0, T] \times X_\alpha \times \Lambda \to X_0$ es continuo y cumple la siguiente condición:

Existe $\nu \in (0, 1]$ tal que para todo $R > 0$ existe $C = C(R) \geq 0$ con

(FP) $$\| f(t, x, \lambda) - f(s, y, \lambda)\|_0 \leq C(|t - s|^\nu + \|x - y\|_\alpha)$$

para todo $t, s \in [0, T]$, $x, y \in \overline{B}_R X_\alpha$ y $\lambda \in \Lambda$. Existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $f(t, \cdot, \cdot) \in C^k(X_\alpha \times \Lambda, X_0)$ para todo $t \in [0, T]$.

Los resultados de la sección 3.1 implican para un triple (s, x, λ) la existencia de una solución maximal $u(\,\cdot\,; s, x, \lambda) : J(s, x, \lambda) \to X_\alpha$, con el intervalo de existencia $J(s, x, \lambda)$. Denotemos por $t^+(s, x, \lambda) := \sup J(s, x, \lambda)$ el tiempo de escape de $u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$.

Proposición 3.25. *Supongamos* (FP). *Para $x \in X_\alpha$, $u \in C([s, T], X_\alpha)$, $\lambda \in \Lambda$ y $t \in [s, T]$ definimos*

$$K(x, u, \lambda)(t) := U(t, s)x + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau, u(\tau), \lambda)\, \mathrm{d}\tau.$$

Entonces

$$K \in C^k(X_\alpha \times C([s, T], X_\alpha) \times \Lambda, C([s, T], X_\alpha)).$$

Si $k \geq 1$, entonces tenemos para cualquier $(x_0, u_0, \lambda_0) \in X_\alpha \times C([s, T], X_\alpha) \times \Lambda$ las siguientes fórmulas para las derivadas parciales:

(3.68) $$(\mathrm{D}_1 K(x_0, u_0, \lambda_0)x)(t) = U(t, s)x \qquad x \in X_\alpha,\ t \in [s, T],$$

(3.69) $$(\mathrm{D}_2 K(x_0, u_0, \lambda_0)u)(t) = \int_s^t U(t, \tau)\mathrm{D}_2 f(\tau, u_0(\tau), \lambda_0)u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \qquad u \in C([s, T], X_\alpha),\ t \in [s, T],$$

y

$$(3.70) \quad (\mathrm{D}_3 K(x_0, u_0, \lambda_0)\lambda)(t) = \int_s^t U(t,\tau)\mathrm{D}_3 f(\tau, u_0(\tau), \lambda_0)\lambda \,\mathrm{d}\tau$$
$$\lambda \in \Lambda, \ t \in [s,T].$$

Lema 3.26. *Sean E, F espacios de Banach, $a < b$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Consideramos un subconjunto abierto $V \subseteq E$ y una función $h\colon V \to C([a,b],F)$. Para $t \in [a,b]$ y $\delta > 0$ definimos el intervalo (posiblemente degenerado) $I(t,\delta) := [a,b] \cap [t, t+\delta]$ y la función*

$$\begin{aligned} h_{t,\delta}\colon V &\to C(I(t,\delta),F)\\ x &\mapsto h(x)|_{I(t,\delta)}. \end{aligned}$$

Si existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a,b]$ la restricción $h_{t,\delta}$ es de clase C^k, entonces h es de clase C^k.

Demostración. Podemos suponer que $(b-a)/\delta \in \mathbb{N}$, tomando δ más chico si sea necesario. Esto es posible ya que $C(J_1,F) \hookrightarrow C(J_2,F)$ mediante restricción para intervalos $J_2 \subseteq J_1$. Ponemos $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ con $t_i - t_{i-1} = \delta$ para $i = 1,2,\ldots,n$. Entonces $h_{t_{i-1},\delta} \in C^k(V, C([t_{i-1},t_i],F))$ para $i = 1,2,\ldots,n$. En el espacio

$$X := C([t_0,t_1],F) \times C([t_1,t_2],F) \times \cdots \times C([t_{n-1},t_n],F)$$

usamos la norma

$$\|(u_1,u_2,\ldots,u_n)\| := \max_{1\le i\le n} \|u_i\|_{C([t_{i-1},t_i],F)}.$$

Se sigue que el mapeo

$$\begin{aligned} \Phi\colon C([a,b],F) &\to X\\ \Phi u &\mapsto (u|_{[t_0,t_1]}, u|_{[t_1,t_2]}, \ldots, u|_{[t_{n-1},t_n]}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal entre los espacios de Banach $C([a,b],F)$ y X. Tenemos el diagrama conmutativo $\square$

Introduciremos ahora las nociones necesarias para analizar las propiedades del sistema dinámico con un parámetro. Denotemos para $s \in [0,T)$ fijo

$$\mathcal{D} := \{(t,x,\lambda) \in [s,T) \times X_\alpha \times \Lambda \mid t \in J(s,x,\lambda)\}.$$

Para cualquier $t \in [s, T]$ ponemos

$$\mathcal{D}_t := \{(x, \lambda) \in X_\alpha \times \Lambda \mid t \in J(s, x, \lambda)\}.$$

Lo que nos interesa es la regularidad del mapeo $(t, x, \lambda) \mapsto u(t; s, x, \lambda)$ de $\mathcal{D}$ en X_α y del mapeo $t^+(s, \cdot, \cdot)\colon X_\alpha \times \Lambda \to (0, T]$.

Empecemos con la versión continua de la dependencia en parámetros:

Lema 3.27. *Sean $t_0 \in [s, T]$, $R > 0$ y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{t_0}$ un subconjunto no vacío tales que*

$$\|u(t; s, x, \lambda)\|_\alpha \le R \qquad \textit{para todo } (x, \lambda) \in \mathcal{E},\ t \in [s, t_0]. \tag{3.71}$$

Entonces el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}$ en $C([s, t_0], X_\alpha)$.

Demostración. Fijamos $s_0 \in [s, t_0]$ y ponemos

$$\mathcal{E}_{s_0} := \{(u(s_0; s, x, \lambda), \lambda) \mid (x, \lambda) \in \mathcal{E}\}.$$

Para $(x, \lambda) \in \mathcal{E}_{s_0}$ y $u \in C([s_0, t_0], X_\alpha)$ definimos

$$G_{x,\lambda,s_0}(u)(t) := U(t, s_0)x + \int_{s_0}^{t} U(t, \tau) f(\tau, u(\tau), \lambda)\, \mathrm{d}\tau$$

para todo $t \in [s_0, t_0]$. Por (3.71) se tiene que $\|x\|_\alpha \le R$ para todo $(x, \lambda) \in \mathcal{E}_{s_0}$. Repitiendo los argumentos de la demostración del Lema 3.5 obtenemos constantes $C_2, T_1 > 0$ que solamente dependen de R, α y las características de f tales que, poniendo $s_1 := \mathrm{mín}\{s_0 + T_1, t_0\}$, para el conjunto

$$\mathcal{M} := C([s_0, s_1], \overline{B}_{C_2} X_\alpha)$$

el mapeo G_{x,λ,s_0} es una contracción en $\mathcal{M}$, uniformemente en $(x, \lambda) \in \mathcal{E}_{s_0}$. Sus puntos fijos son las soluciones clementes $u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$ de la ecuación (3.67). La Proposición 3.25 implica que $G_{x,\lambda,s_0}(u)$ depende continuamente de (x, λ, u), así que por la Proposición 3.24 el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s_0, x, \lambda)$ de $\mathcal{E}_{s_0}$ en $\mathcal{M}$ es continuo. De esto se sigue directamente que el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(t; s_0, x, \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}_{s_0}$ en X_α para cualquier $t \in [s_0, s_1]$.

Mostremos que

(3.72) el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s$ en $C([s_0, s_1], X_\alpha)$.

Si $s_0 = s$ entonces ya terminamos. Si $s_0 > s$ entonces sea $n := \lfloor \frac{s_0 - s}{T_1} \rfloor$. Para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ mostremos inductivamente que

$$\text{el mapeo } (x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda) \text{ es continuo de } \mathcal{E}_s \text{ en } C([s + kT_1, \min\{s + (k+1)T_1, t_0\}], X_\alpha). \tag{3.73}$$

El caso $k = 0$ está contenido en lo de arriba, poniendo $s_0 := s$. Sea entonces (3.73) cierto para un $k - 1$, donde $k \leq n$. Por hipótesis el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}_s$ en $C([s + (k-1)T_1, s + kT_1], X_\alpha)$. Eso implica que el mapeo $(x, \lambda) \mapsto (u(s + kT_1; s, x, \lambda), \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}_s$ en $\mathcal{E}_{s+kT_1}$. Lo de arriba (remplazando s_0 por $s + kT_1$) dice que el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s + kT_1, x, \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}_{s+kT_1}$ en $C([s + kT_1, \min\{s + (k+1)T_1, t_0\}], X_\alpha)$. La composición de estos dos últimos mapeos es continua de $\mathcal{E}_s$ en $C([s + kT_1, \min\{s + (k+1)T_1, t_0\}], X_\alpha)$, y tiene la forma $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$ por el Lema 3.3. Eso demuestra (3.73) para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Como $s_0 \in [s + nT_1, \min\{s + (n+1)T_1, t_0\}]$, el mapeo $(x, \lambda) \mapsto (u(s_0; s, x, \lambda), \lambda)$ es continuo de $\mathcal{E}_s$ en $\mathcal{E}_{s_0}$, por la ecuación (3.73). Como antes la composición de este mapeo con el mapeo continuo de $\mathcal{E}_{s_0}$ en $C([s_0, s_1], X_\alpha)$, dado por $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s_0, x, \lambda)$, es un mapeo continuo de $\mathcal{E}_s$ en $C([s_0, s_1], X_\alpha)$ de la forma $(x, \lambda) \mapsto u(\,\cdot\,; s, x, \lambda)$. Esto demuestra (3.72).

Como $s_0 \in [s, t_0]$ era arbitrario y como T_1 no depende de s_0, el Lema 3.26 implica la afirmación. □

Lema 3.28. *Para todo $s \in [0, T)$ se satisface:*

(a) *$\mathcal{D}$ es abierto en $[s, T) \times X_\alpha \times \Lambda$;*

(b) *$t^+(s, \cdot, \cdot)\colon X_\alpha \times \Lambda \to (s, T]$ es inferiormente semicontinuo;*

(c) *para todo $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda})$ existen $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ tales que $(\bar{t}, x, \lambda) \in \mathcal{D}$ y $\|u(t; s, x, \lambda)\|_\alpha \leq R$ se cumple para todo $t \in [s, \bar{t}]$ y $(x, \lambda) \in \overline{B}_\varepsilon(\bar{x}; X_\alpha) \times \overline{B}_\varepsilon(\bar{\lambda}; \Lambda)$.*

Teorema 3.29. *Supongamos la condición* (FP)*. Entonces el mapeo $(x, \lambda) \mapsto u(t; s, x, \lambda)$ es k veces continuamente diferenciable de $\mathcal{D}_t$ en X_α para todo $t \in [s, T]$. Si $k \geq 1$, ponemos para cualquier $t_0 \in [s, T)$ y $(x, \lambda) \in \mathcal{D}_{t_0}$:*

$$v(t) := \partial_x u(t; s, x, \lambda) \qquad y \qquad w(t) := \partial_\lambda u(t; s, x, \lambda).$$

Entonces las funciones $v\colon [s, t_0] \to \mathcal{L}(X_\alpha, X_\alpha)$ y $w\colon [s, t_0] \to \mathcal{L}(F, X_\alpha)$

satisfacen las ecuaciones integrales

$$v(t) = U(t,s) + \int_s^t U(t,\tau)\mathrm{D}_2 f(\tau, u(\tau; s, x, \lambda), \lambda) v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.74}$$

y

$$\begin{aligned} w(t) = \int_s^t U(t,\tau)\mathrm{D}_2 f(\tau, u(\tau; s, x, \lambda), \lambda) w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ + \int_s^t U(t,\tau)\mathrm{D}_3 f(\tau, u(\tau; s, x, \lambda), \lambda)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Demostración. Sea $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{D}$ fijo. Por el Lema 3.28 existen ε, $R > 0$ tales que $(\bar{t}, x, \lambda) \in \mathcal{D}$ y $\|u(t; s, x, \lambda)\|_\alpha \leq R$ se cumple para todo $t \in [s, \bar{t}]$ y $(x, \lambda) \in \overline{B}_\varepsilon(\bar{x}; X_\alpha) \times \overline{B}_\varepsilon(\bar{\lambda}; \Lambda)$. Desde este punto la demostración es análoga a la del Lema 3.27, aprovechando de las fórmulas (3.60) y (3.68)–(3.70) para las derivadas de operadores integrales. $\square$

Para el caso de una ecuación autónoma como en (3.33) formulamos, usando la notación de allá (sin dependencia de un parámetro):

Corolario 3.30. *Supongamos* (FP) *con* $k = 1$*, donde* f *no depende de ni de* t *ni de* λ*. Entonces los mapeos* $\varphi\colon \mathcal{D} \to X_\alpha$ *y* $\varphi\colon \dot{\mathcal{D}} \to X_\beta$ *son continuamente diferenciables en el segundo argumento para todo* $\beta \in (\alpha, 1)$*. Si* $u_0 \in X_\alpha$ *y* $u := \varphi(\cdot, u_0)$ *en* $J(u_0)$*, entonces* $v(t) := \mathrm{D}\varphi^t(u_0)v_0$ *es la solución clemente del problema lineal*

$$\begin{cases} \dot{v} + Av = f'(u)v, & t > 0, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{3.76}$$

Formulemos condiciones suficientes para aplicar estos resultados al ejemplo concreto de la sección 3.3. Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ una región acotada con frontera lisa. Consideramos un mapeo Caratheodory $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continuamente diferenciable en el segundo argumento para casi todo $x \in \Omega$ tal que existen $p \in [1, \infty)$ y $C > 0$ tales que

$$|\partial_u f(x,u)| \leq C(1 + |u|^{p-1}) \qquad \text{para todo } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R}. \tag{3.77}$$

Estas condiciones implican que f induce, para cualquier $q \geq 1$, un operador de superposición continuamente diferenciable $\bar{f}\colon L^{pq}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ con derivada dada por

$$\mathrm{D}\bar{f}(u)[v](x) = \partial_u f(x, u(x))v(x).$$

Sean p, q y α como en el Teorema 3.19 y sea φ es el semiflujo parabólico inducido por el problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f(x, u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.78}$$

en el espacio $E_{q,\alpha}$. Si $u_0 \in E_{q,\alpha}$ y u es la solución de (3.78) para $t \in J(u_0)$, entonces $v(t) := \mathrm{D}\varphi^t(u_0)v_0$ es la solución clásica del problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta_x v = \partial_u f(x, u)v, & x \in \Omega,\ t \in J(u_0), \\ v(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in J(u_0), \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.79}$$

Bibliografía

[1] N. Ackermann and T. Bartsch, *Superstable manifolds of semilinear parabolic problems*, J. Dynam. Differential Equations **17** (2005), no. 1, 115–173. MR MR2157843

[2] H. Amann, *Ordinary differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 13, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990, An introduction to nonlinear analysis, Translated from the German by Gerhard Metzen. MR MR1071170 (91e:34001)

[3] H. Amann, *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, Monographs in Mathematics, vol. 89, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995, Abstract linear theory. MR 96g:34088

[4] J. Appell and P.P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, ch. 3, pp. viii+311, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR MR1066204 (91k:47168)

[5] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. MR MR0482275 (58 #2349)

[6] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 13, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998, Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors. MR MR1691574 (2000e:35003)

[7] P. Clément, H.J.A.M. Heijmans, S. Angenent, C.J. van Duijn, and B. de Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monographs, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. MR MR915552 (89b:47058)

[8] D. Daners and P. Koch Medina, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 279, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992. MR 94b:34002

[9] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985. MR MR787404 (86j:47001)

[10] G. Dore and A. Favini, *On the equivalence of certain interpolation methods*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **1** (1987), no. 4, 1227–1238. MR MR923450 (89f:46133)

[11] H.O. Fattorini, *The Cauchy problem*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 18, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1983, With a foreword by Felix E. Browder. MR MR692768 (84g:34003)

[12] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR MR737190 (86c:35035)

[13] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981. MR 83j:35084

[14] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983. MR MR710486 (85g:47061)

[15] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR MR924157 (88k:00002)

[16] W. Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR MR1157815 (92k:46001)

[17] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989, Sobolev spaces and functions of bounded variation. MR MR1014685 (91e:46046)