



Posgrado de la UNAM
Maestría en ciencias matemáticas

Curso Básico de Análisis

Análisis Complejo I

Nils Ackermann

2015-1

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Números y funciones complejos | 5 |
| 1.1. El campo complejo | 5 |
| 1.2. Funciones holomorfas | 8 |
| 1.3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann | 10 |
| 1.4. Convergencia uniforme y series de potencias | 15 |
| 1.5. Funciones elementales | 17 |
| 2. Integración compleja | 21 |
| 2.1. Caminos de integración | 21 |
| 2.2. Antiderivadas | 27 |
| 2.3. Intercambio de límites | 32 |
| 3. Funciones holomorfas | 35 |
| 3.1. El teorema de Cauchy en conjuntos convexos | 35 |
| 3.2. Las fórmulas de Cauchy | 39 |
| 3.3. Desarrollo en series de potencias | 41 |
| 3.4. Desigualdades de Cauchy | 46 |
| 3.5. La Propiedad del Promedio | 49 |
| 3.6. Funciones enteras y polinomios | 51 |
| 3.7. Funciones realmente analíticas | 54 |
| 3.8. Funciones armónicas | 56 |
| 3.9. Extensión por reflexión | 62 |
| 4. El teorema de Cauchy global | 67 |
| 4.1. El número de giros | 67 |
| 4.2. El teorema y las fórmulas de Cauchy globales | 70 |
| 4.3. Aplicaciones del número de giros | 74 |
| 5. Las inversas de las funciones elementales | 81 |
| 5.1. El logaritmo | 81 |
| 5.2. Potencias | 85 |
| 5.3. Las funciones arco | 88 |
| 6. Singularidades aisladas | 91 |
| 6.1. Funciones holomorfas en anillos | 91 |
| 6.2. Singularidades aisladas | 95 |
| 6.3. Funciones meromorfas y la esfera de Riemann | 98 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 6.4. | El teorema de los residuos | 105 |
| 6.5. | Aplicaciones del teorema de los residuos en el análisis real | 108 |
| 6.6. | Consecuencias teóricas del teorema de los residuos | 122 |
| 7. | Transformaciones conformes | 125 |
| 7.1. | Transformaciones conformes | 125 |
| 7.2. | Transformaciones de Möbius | 128 |
| 7.3. | Automorfismos del disco unitario | 132 |
| 7.4. | Geometría no Euclidiana | 135 |
| 7.5. | Familias normales de funciones holomorfas | 139 |
| 7.6. | El teorema de equivalencia conforme de Riemann | 141 |
| 8. | Aproximación racional e interpolación | 145 |
| 8.1. | El teorema de Runge | 145 |
| 8.2. | El teorema de Mittag-Leffler | 153 |
| 8.3. | El teorema de productos infinitos de Weierstraß | 156 |
| 9. | Aplicaciones de aproximación e interpolación | 167 |
| 9.1. | Desarrollos clásicos | 167 |
| 9.2. | Funciones Elípticas | 170 |
| 10. | Familias normales meromorfas y aplicaciones | 179 |
| 10.1. | El teorema de Marty | 179 |
| 10.2. | Los teoremas de Montel y Picard | 184 |
| 10.3. | Iteración de funciones racionales | 187 |

1 Números y funciones complejos

1.1. El campo complejo

Consideramos el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 con la multiplicación definida según la fórmula

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Con estas operaciones y el elemento neutro $(1, 0)$ de la multiplicación obtenemos un campo algebraicamente completo, el campo complejo \mathbb{C} . El conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcuerpo de \mathbb{C} , isomorfo al cuerpo \mathbb{R} , y \mathbb{C} es la completación algebraica de \mathbb{R} . Si $a \in \mathbb{R}$ escribimos a en vez de $(a, 0)$, así que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ mediante esta identificación.

Escribimos $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$, y para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b i = a + i b.$$

Se tiene que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $z := x + i y$ entonces llamamos a x la *parte real* y a y la *parte imaginaria* de z , escribiendo

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Los operadores Re y Im son proyecciones realmente lineales de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ en \mathbb{R} . Como es usual escribimos $1/z := z^{-1}$ si $z \neq 0$. En ese caso se tiene

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Mostremos otra diferencia algebraica fundamental entre \mathbb{R} y \mathbb{C} .

1.1.1 Definición. Un campo F está *ordenado* si existe un orden total \leq tal que

- (I) $a + c \leq b + c$ si $a \leq b$;
- (II) $0 \leq ab$ si $0 \leq a$ y $0 \leq b$.

Los números reales forman un campo ordenado con su orden natural.

1.1.2 Proposición. *No existe orden en \mathbb{C} que vuelva \mathbb{C} en un campo ordenado.*

Demostración. En un campo ordenado los cuadrados son no negativos: si $a \geq 0$, entonces $a^2 = a \cdot a \geq 0$. Si $-a \geq 0$ entonces $a^2 = (-a) \cdot (-a) \geq 0$.

Si \mathbb{C} fuera ordenado entonces $1 = 1^2 > 0$ y luego $0 = 1 - 1 > -1 = i^2 > 0$, una contradicción. \square

Consideremos la *conjugación* en \mathbb{C} , la biyección $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy.$$

Geoméricamente se trata de la reflexión en el eje $\mathbb{R} \times \{0\}$. La definición de las operaciones en \mathbb{C} implican para $wz \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}, \quad \overline{wz} = \bar{w} \bar{z}, \quad \overline{(\bar{z})} = z, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

y

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Particularmente, $z = \bar{z}$ implica $z \in \mathbb{R}$.

Recordemos que para $a \in \mathbb{R}$ el valor absoluto de a está definido por

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

En \mathbb{C} no podemos definir un valor absoluto (una norma) en esta forma por la falta de un orden compatible. Se usa la norma Euclidiana, pero escrita como el valor absoluto:

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Este valor absoluto es consistente con el valor absoluto del subcampo \mathbb{R} . Se tiene

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

A parte de las propiedades de una norma el valor absoluto en \mathbb{C} cumple

$$|wz| = |w| |z|.$$

Esto se ve como sigue:

$$|wz|^2 = \overline{wz} wz = \bar{w}\bar{z}wz = \bar{w}z\bar{z}w = \bar{w}w\bar{z}z = |w|^2|z|^2.$$

Si $z \neq 0$ esto implica

$$\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}.$$

Recordemos la representación polar en \mathbb{R}^2 : si $z = x + iy \neq 0$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = |z|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Bajo la condición $\varphi \in (-\pi, \pi]$ solamente existe un φ con esa propiedad. En ese caso escribimos $\varphi = \operatorname{Arg} z$, así que $\operatorname{Arg}: \dot{\mathbb{C}} \rightarrow (-\pi, \pi]$. Aquí

$$\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

La función Arg es la *rama principal del argumento*.

La representación polar permite una interpretación geométrica de la multiplicación de complejos $w = |w|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $z = |z|(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi)$:

$$\begin{aligned} wz &= |w| |z|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi) \\ &= |w| |z|(\cos(\varphi + \psi) + i \operatorname{sen}(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

significa que los valores absolutos están multiplicados y que los argumentos están sumados. Nota que los valores de la función Arg *no* necesariamente están sumados, ya que podría pasar que $\varphi + \psi \notin (-\pi, \pi]$ aún si $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi]$. La función $z \mapsto wz$ es la rotación por el ángulo φ y la extensión por $|w|$. Si $|w| = 1$ entonces multiplicación por w es nada más una rotación.

Usaremos el valor absoluto en \mathbb{C} para definir la métrica $d(w, z) = |w - z|$. Esta métrica y su topología generada coinciden con la de \mathbb{R}^2 . Denotaremos para $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$

$$\begin{aligned} D_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} && \text{disco abierto} \\ \bar{D}_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} && \text{disco cerrado} \\ S_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} && \text{esfera.} \end{aligned}$$

Además, denotamos por

$$\dot{D}_r(z_0) := D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

el *disco abierto pinchado* y por

$$\mathbb{D} := D_1(0)$$

el *disco unitario*. Si en las definiciones de arriba $z_0 = 0$, muchas veces suprimimos el centro del disco de la notación.

El conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ es el *semiplano derecho*, y el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ es el *semiplano superior*.

Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, la notación $M \subset\subset U$ significa que \bar{M} es compacto y que $\bar{M} \subseteq U$.

Si $M \subseteq \mathbb{C}$ y $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$, entonces definimos funciones $f + g$, fg , \bar{f} y $|f|$ aplicando las operaciones respectivas en cada punto de M . La visualización de funciones tomando valores complejos no es fácil. Uno puede acercarse al comportamiento de una función compleja f dibujando conjuntos de constancia para $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ y $|f|$.

Para considerar continuidad de funciones nos basamos en la métrica natural definida en \mathbb{C} . Ya sabemos que las operaciones del espacio vectorial \mathbb{R}^2 son continuas. Mostremos que la multiplicación en \mathbb{C} es una función continua $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: sean $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ sucesiones convergentes, con $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$. Entonces

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \rightarrow 0,$$

es decir, $a_n b_n \rightarrow ab$. Esto muestra la continuidad de la multiplicación. En consecuencia, sumas, productos, y composiciones de funciones continuas son continuas. Inversas son continuas en puntos que no son ceros. Eso implica que también Re , Im , el valor absoluto y la conjugada de una función continua son continuas.

1.1.3 Definición. Un *camino* en $M \subseteq \mathbb{C}$ (o una *trayectoria*) es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, donde $a \leq b$ son números reales. $\gamma(a)$ es el *origen* o *punto inicial* y $\gamma(b)$ el *destino* o *punto final* de γ . Decimos que γ es un *camino de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$* o que γ *conecta a $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$* .

1.1.4 Definición. Un espacio métrico X es *conexo* si X y \emptyset son los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados al mismo tiempo. X es *arcoconexo* si para todo $x, y \in X$ existe un camino en X de x a y . $A \subseteq X$ es (arco)conexo si es (arco)conexo en si mismo, respecto a la topología inducida por X .

Una *región* en \mathbb{C} es un subconjunto abierto, no vacío y conexo de \mathbb{C} . Como \mathbb{C} es localmente arcoconexo, un subconjunto abierto de \mathbb{C} es conexo si y sólo si es arcoconexo.

1.2. Funciones holomorfas

Para definir la diferenciabilidad compleja de funciones complejas de una variable compleja nos basamos en la definición de diferenciabilidad de funciones reales de una variable real. Así establecemos desde el inicio el cálculo complejo, que es formalmente más sencillo que el cálculo de funciones entre regiones de \mathbb{R}^2 . Si f es una función real definida en un intervalo I , su diferenciabilidad en un punto $x_0 \in I$ es equivalente a la existencia de una función $\Delta: I \rightarrow \mathbb{R}$, el cociente diferencial en x_0 , que es continua en x_0 y cumple

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

En ese caso $\Delta(x_0) = f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0 . La misma definición funciona para números complejos sin cambio:

1.2.1 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in U$. La función f es (*complejamente*) *diferenciable* en z_0 si existe una función $\Delta: U \rightarrow \mathbb{C}$ que es continua en z_0 y que cumple

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

En ese caso escribimos

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \Delta(z_0)$$

y llamamos a $f'(z_0)$ la *derivada de f en z_0* .

La función Δ está bien definida en $U \setminus \{z_0\}$ en todo caso y se llama el *cociente diferencial en z_0* . f es complejamente diferenciable en z_0 si y sólo si

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

1.2.2 Definición. Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en todo punto z del subconjunto abierto U de \mathbb{C} , entonces f es *holomorfa*. Una función f es holomorfa en z_0 si lo es en una vecindad abierta de z_0 . Una función holomorfa en \mathbb{C} se llama *entera*.

1.2.3 Ejemplo. (a) Un función constante es entera, con derivada 0:

$$f(z) = f(z_0) + 0 \cdot (z - z_0).$$

(b) La función $f(z) := z$ es entera, con derivada 1:

$$z = z_0 + 1 \cdot (z - z_0).$$

(c) La función $f(z) := \bar{z}$ no es diferenciable en ningún punto: si f fuera diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$, tendríamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = 1$$

y

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = -1,$$

en contradicción con la existencia de

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

El último ejemplo muestra que es muy fácil encontrar una función sencilla (¡continua!) que no es diferenciable en ningún punto, algo que es muy difícil de construir en el análisis de una variable real. Este hecho es una indicación de que la clase de funciones holomorfas es pequeña, o, en otras palabras, que la propiedad de holomorfía impone una gran rigidez en las funciones.

Como la definición de diferenciability es la misma que en el análisis real, los hechos siguientes se muestran en la misma manera:

1.2.4 Proposición. *Una función que es complejamente diferenciable en un punto también es continua allí.*

1.2.5 Proposición. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable en $z_0 \in U$. Entonces*

(a) $f + g$ es diferenciable en z_0 y $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(b) fg es diferenciable en z_0 y $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

(c) Si $f(z_0) \neq 0$ entonces $1/f$ está bien definido en una vecindad de z_0 y diferenciable en z_0 , con la derivada

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

1.2.6 Proposición. Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ abiertos, $f: U \rightarrow V$ diferenciable en un $z_0 \in U$ y $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable en $w_0 := f(z_0)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en z_0 y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0).$$

1.2.7 Definición. Una función $f: U \rightarrow V$, donde $U, V \subseteq \mathbb{C}$ son abiertos, es *biholomorfa* si es biyectiva y si f y f^{-1} son holomorfas.

1.2.8 Proposición. La función $f: U \rightarrow V$ es biholomorfa si y sólo si f es biyectiva y holomorfa, f^{-1} es continua, y $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in U$. En ese caso

$$(1.2.1) \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{para } w = f(z).$$

Estas reglas de diferenciación implican

1.2.9 Proposición. Polinomios en z , $p(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}z^{\nu}$, forman funciones enteras; se cumple

$$p'(z) = \sum_{\nu=1}^n \nu a_{\nu}z^{\nu-1}.$$

Funciones racionales en z son holomorfas en su dominio, y sus derivadas son funciones racionales.

1.3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

En esta sección comparamos la diferenciabilidad compleja con la diferenciabilidad real bajo la identificación $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una función real $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *realmente diferenciable* en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ si existen funciones reales Δ_1 y Δ_2 en U , continuas en z_0 , tales que

$$(1.3.1) \quad g(z) = g(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z) \quad \text{para todo } z = x + iy \in U.$$

Los valores $\Delta_1(z_0)$ y $\Delta_2(z_0)$ son las derivadas parciales de g en z_0 respecto a x y y :

$$g_x(z_0) := \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \Delta_1(z_0), \quad g_y(z_0) := \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = \Delta_2(z_0).$$

Una función compleja $f = g + ih: U \rightarrow \mathbb{C}$ es realmente diferenciable si g y h lo son, según el cálculo real. Usando (1.3.1) y su equivalente para h esa diferenciabilidad real se puede expresar como sigue:

1.3.1 Definición. Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es realmente diferenciable en $z_0 \in U$ si existen funciones $\Delta_1, \Delta_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ que son continuas en z_0 y cumplen

$$(1.3.2) \quad f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

Los valores $\Delta_1(z_0)$ y $\Delta_2(z_0)$ son las *derivadas parciales* de f respecto a x y y :

$$f_x(z_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \Delta_1(z_0), \quad f_y(z_0) := \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \Delta_2(z_0).$$

Para ver la equivalencia de las dos definiciones de diferenciabilidad real, sea $f = g + ih$ con funciones reales g, h . Sean primero g y h realmente diferenciables:

$$\begin{aligned}g(z) &= g(z_0) + (x - x_0)A_1(z) + (y - y_0)B_1(z) \\h(z) &= h(z_0) + (x - x_0)A_2(z) + (y - y_0)B_2(z),\end{aligned}$$

y las A_i, B_i son funciones reales, continuas en z_0 . Se sigue que

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)(A_1(z) + iA_2(z)) + (y - y_0)(B_1(z) + iB_2(z)).$$

Inversamente, sea f realmente diferenciable en el sentido de la Definición 1.3.1. Esto implica

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(z) &= \operatorname{Re} f(z_0) + (x - x_0) \operatorname{Re} \Delta_1(z) + (y - y_0) \operatorname{Re} \Delta_2(z) \\ \operatorname{Im} f(z) &= \operatorname{Im} f(z_0) + (x - x_0) \operatorname{Im} \Delta_1(z) + (y - y_0) \operatorname{Im} \Delta_2(z),\end{aligned}$$

es decir, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son realmente diferenciables.

Estas consideraciones muestran que

$$f_x = g_x + ih_x, \quad f_y = g_y + ih_y$$

y luego que

$$\bar{f}_x = \overline{f_x}, \quad \bar{f}_y = \overline{f_y}.$$

Además,

$$\begin{aligned}(cf)_x &= cf_x, & (cf)_y &= cf_y, \\ (f_1f_2)_x &= f_{1,x}f_2 + f_1f_{2,x}, & (f_1f_2)_y &= f_{1,y}f_2 + f_1f_{2,y}.\end{aligned}$$

En otras palabras, las derivadas parciales son operadores reales (ya que conmutan con la conjugación); son \mathbb{C} -lineal y cumplen la regla de Leibniz.

Similarmente caracterizamos la diferenciabilidad real de una función compleja de una variable real: sean I un intervalo y $t_0 \in I$. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es realmente diferenciable en t_0 si existe una función $\Delta: I \rightarrow \mathbb{C}$ que es continua en t_0 y que cumple

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\Delta(t).$$

En ese caso

$$f'(t_0) := \frac{df}{dt}(t_0) := \Delta(t_0)$$

es la *derivada de f en t_0* . Nuevamente la diferenciabilidad de $f = g + ih$ es equivalente a la diferenciabilidad de g y h , con

$$f' = g' + ih',$$

y d/dt es un operador real \mathbb{C} -lineal que cumple la regla de Leibniz. La regla de la cadena también vale en la siguiente forma: Si I y J son intervalos y $\varphi: J \rightarrow I$ y $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ son diferenciables, entonces $f \circ \varphi$ es diferenciable y

$$(f \circ \varphi)(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tratamos de liberarnos de las coordenadas reales en la Definición 1.3.1:

1.3.2 Proposición. Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es realmente diferenciable en $z_0 \in U$ si y sólo si existen funciones $A_1, A_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ que son continuas en z_0 y tales que

$$(1.3.3) \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)A_2(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

En ese caso

$$(1.3.4) \quad A_1(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$$

y

$$(1.3.5) \quad A_2(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)),$$

así que A_1 y A_2 están definidas de manera única por f .

Demostración. Sea f realmente diferenciable en z_0 , es decir, existe una descomposición

$$(1.3.6) \quad f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z).$$

Usando

$$(x - x_0) = \frac{1}{2}(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0), \quad y - y_0 = -\frac{i}{2}(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0)$$

obtenemos

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) + (\bar{z} - \bar{z}_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)),$$

es decir, (1.3.3).

Inversamente, sea cierta la representación (1.3.3). La descomposición

$$z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0), \quad \bar{z} - \bar{z}_0 = x - x_0 - i(y - y_0)$$

implica

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)(A_1(z) + A_2(z)) + (y - y_0)i(A_1(z) - A_2(z)),$$

es decir, (1.3.2). □

1.3.3 Definición. Los valores $A_1(z_0)$ y $A_2(z_0)$ de la Proposición 1.3.2 se llaman *derivadas de Wirtinger* de f en z_0 y son denotadas por

$$f_z(z_0) := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := A_1(z_0) \quad \text{y} \quad f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := A_2(z_0).$$

Se tiene

$$(1.3.7) \quad f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{y} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

1.3.4 Teorema. Para una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in U$ son equivalentes:

- (I) f es complejamente diferenciable en z_0 ;
- (II) f es realmente diferenciable en z_0 y se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Demostración. Sea f complejamente diferenciable en z_0 , es decir,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \cdot 0 \quad \forall z \in U,$$

donde Δ es continua en z_0 . Así f cumple (1.3.3), es decir, es realmente diferenciable en z_0 con $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$.

Sea ahora f realmente diferenciable en z_0 con $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$. Existen funciones $A_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ que son continuas en z_0 y cumplen

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)A_2(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

Por hipótesis tenemos que $A_2(z_0) = 0$. Definimos

$$\hat{\Delta}(z) := \begin{cases} A_2(z) \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Como $|\bar{z} - \bar{z}_0|/|z - z_0| = 1$ y $A_2(z_0) = 0$, $\hat{\Delta}$ es continua en z_0 . Poniendo $\Delta := \hat{\Delta} + A_1$, obtenemos que Δ es continua en z_0 y cumple

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

Eso muestra que f es complejamente diferenciable en z_0 . □

1.3.5 Nota. Si f es complejamente diferenciable en z_0 entonces

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right).$$

Mostramos arriba que las funciones complejamente diferenciables son las funciones realmente diferenciables que satisfacen la ecuación diferencial $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0$. Si $f = u + iv$ con funciones reales u, v , esto equivale a $u_x - v_y + i(v_x + u_y) = 0$. Separando las partes reales y imaginarias en esta ecuación, obtenemos el siguiente sistema real de ecuaciones diferenciales, las llamadas *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*:

$$(1.3.8) \quad \begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Las funciones holomorfas son precisamente las funciones realmente diferenciables que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Considerando una función holomorfa f como una función entre regiones de \mathbb{R}^2 , es decir, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, la derivada de f tiene la representación

$$(1.3.9) \quad Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

La ecuación (1.3.8) implica que $\det(Df) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \geq 0$. Si $Df \neq 0$, entonces Df es una rotación-extensión: con $\alpha := \sqrt{u_x^2 + u_y^2} > 0$ y $\varphi := \operatorname{sgn}(-u_y) \arccos(u_x/\alpha)$ se tiene

$$(1.3.10) \quad Df = \alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

1.3.6 Teorema. *Si G es una región en \mathbb{C} y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con derivada (compleja) idénticamente cero, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $f = u + iv$ con funciones reales u, v . Las hipótesis implican que $f_z \equiv \bar{f}_{\bar{z}} \equiv 0$ en G . Por (1.3.7) eso implica que $f_x \equiv f_y \equiv 0$ en G . Tomando las partes reales y imaginarias obtenemos que $u_x \equiv u_y \equiv v_x \equiv v_y \equiv 0$ en G . Por los teoremas del análisis real, u y v son constantes. \square

Notemos las reglas para calcular con las derivadas parciales y de Wirtinger para funciones f, g realmente diferenciables (una respectivamente dos veces) y una función compleja φ de una variable real t . Todas las reglas son consecuencias de las definiciones.

(a) $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ son operadores \mathbb{C} -lineales que cumplen la regla de Leibniz;

(b) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)}$;

(c) Si f es una función real, entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}$;

(d) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ si f es holomorfa, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ si \bar{f} es holomorfa;

(e) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$;

(f) $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$;

(g) $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$, $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$;

(h) $\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$.

1.4. Convergencia uniforme y series de potencias

Formulamos algunas nociones y algunos hechos sobre sucesiones y series infinitas de números complejos. Todas las demostraciones son idénticas a las dadas en el análisis real.

Una *serie infinita* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ *converge* (al número complejo a) si la sucesión de las sumas parciales $(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu})_n$ converge (a a). En ese caso escribimos $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} = a$. Una serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ se llama *absolutamente convergente* si $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}|$ converge. Convergencia absoluta implica convergencia. En el caso de una serie absolutamente convergente la convergencia y el límite no dependen del orden de la sumación. La convergencia absoluta se analiza con las mismas herramientas como en el análisis real, por ejemplo con los criterios del cociente y de la raíz.

Consideremos ahora sucesiones y series de funciones. Si $(f_{\nu})_{\nu}$ es una sucesión de funciones complejas definidas en $M \subseteq \mathbb{C}$ y si $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{\nu} = f$ significa que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{\nu}(z) = f(z)$ para todo $z \in M$. En ese caso decimos que (f_{ν}) *converge a f puntualmente*.

1.4.1 Definición. Una sucesión (f_{ν}) de funciones complejas en M *converge uniformemente* a una función f si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{\nu}(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0 \quad \forall z \in M.$$

Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, (f_{ν}) converge localmente uniformemente en U si todo $z_0 \in U$ tiene una vecindad $V(z_0)$ en U tal que (f_{ν}) converge uniformemente en $V(z_0)$.

Como en el análisis real se demuestra

1.4.2 Teorema. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y si (f_{ν}) es una sucesión de funciones continuas en U que converge localmente uniformemente en U , entonces su límite es una función continua.

La convergencia de series de funciones con dominio $M \subseteq \mathbb{C}$ se trata similarmente mediante la sucesión de las sumas parciales. El *criterio de Cauchy* para la convergencia uniforme de una serie de funciones es lo siguiente: $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ converge uniformemente en M si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un ν_0 tal que

$$\left| \sum_{\nu=n}^m f_{\nu}(z) \right| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq \nu_0 \quad \forall z \in M.$$

La serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ *converge absolutamente* si $\sum_{\nu=0}^{\infty} |f_{\nu}|$ converge. Como en el análisis real se demuestra el

1.4.3 Teorema. Sean $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ una serie de funciones $f_{\nu}: M \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ una serie convergente de números no negativos. Si

$$|f_{\nu}(z)| \leq a_{\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z \in M$$

entonces $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}$ converge en M absoluta y uniformemente.

Una *serie de potencias en z* es una serie infinita de la forma

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}.$$

Los números a_{ν} son complejos, y z_0 se llama el *punto de desarrollo*. Nos interesan el conjunto M de los puntos z donde converge la serie y las propiedades de la función límite en M .

1.4.4 Ejemplo. La serie geométrica $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ tiene las sumas parciales

$$\sum_{\nu=0}^n z^{\nu} = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, & z \neq 1, \\ n+1, & z = 1. \end{cases}$$

Si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$, es decir,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z}.$$

Si $|z| \geq 1$, z^{ν} no forma una sucesión que converge a cero, así que $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ no converge.

El conjunto de convergencia de $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ es el disco $D_1 := D_1(0)$, y su función límite es holomorfa en D_1 .

En general sólo podemos asegurar lo siguiente:

1.4.5 Teorema. *Una serie de potencias*

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$$

o bien converge absoluta y localmente uniformemente en \mathbb{C} o bien existe $r \in [0, \infty)$ tal que $P(z)$ converge absoluta y localmente uniformemente en $D_r(z_0)$ y diverge en $\mathbb{C} \setminus D_r(z_0)$.

El número r se llama el *radio de convergencia de P* . Si P converge en todo \mathbb{C} ponemos $r := \infty$. Si $r = 0$ decimos que P no converge en ningún lado (aunque sí converge en z_0). Si $r \in (0, \infty)$ entonces $D_r(z_0)$ se llama el *disco de convergencia de P* . No hay resultados generales respecto a convergencia de P en los puntos de la esfera $S_r(z_0)$, cualquier cosa puede pasar allí.

Antes de demostrar el Teorema 1.4.5, damos el

1.4.6 Lema. *Sea $z_1 \neq z_0$ un punto, en el que la sucesión $a_n(z_1 - z_0)^n$ queda acotada. Entonces P converge absoluta y localmente uniformemente en $D_{|z_1 - z_0|}(z_0)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar la convergencia absoluta y uniforme en $D_r(z_0)$ para cualquier $r \in (0, |z_1 - z_0|)$. Fijando tal r y $M > 0$ tal que $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ obtenemos para $z \in \overline{D}_r(z_0)$

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n.$$

Como $r < |z_1 - z_0|$, el criterio de la mayorante y la convergencia de la serie geométrica implica el enunciado. \square

Demostración del Teorema 1.4.5. Sea r dado por la *Fórmula de Cauchy-Hadamard*:

$$(1.4.1) \quad r := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Aquí definimos $1/0 := +\infty$ y $1/\infty := 0$.

Primero supongamos que $r > 0$. Si $0 < r_1 < r$ entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r < 1/r_1$ implica la desigualdad $|a_n| < 1/r_1^n$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(a_n r_1^n)$ es acotada y por el Lema 1.4.6 P converge absoluta y localmente uniformemente en $D_{r_1}(z_0)$. Como $r_1 \in (0, r)$ era arbitrario, lo mismo es cierto en $D_r(z_0)$.

Ahora supongamos que $0 \leq r < \infty$. Si $|z - z_0| > r$, es decir, $1/|z - z_0| < 1/r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, entonces existe un número infinito de índices n tal que $1/|z - z_0|^n < |a_n|$. Eso implica que la sucesión $a_n(z - z_0)^n$ no converge a cero y la serie P no converge en z . \square

Notamos que la función límite de una serie de potencias en el disco de convergencia es continua, por el Teorema 1.4.2.

1.5. Funciones elementales

Trataremos aquí la exponencial y las funciones trigonométricas, y hiperbólicas. Como $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, la serie de potencias

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu$$

converge en todo \mathbb{C} . Su límite $\exp(z)$ es la *exponencial*. Se define $e := \exp(1)$ y se suele escribir e^z en vez de $\exp(z)$. Para $z, w \in \mathbb{C}$ fijos tenemos por la convergencia absoluta

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\nu w^\mu}{\nu! \mu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{z^{\nu-\mu} w^\mu}{(\nu-\mu)! \mu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} z^{\nu-\mu} w^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (z+w)^\nu,$$

es decir, se cumple la ecuación funcional

$$(1.5.1) \quad e^z e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

La exponencial es una función entera: usando (1.5.1) y la continuidad de la función límite de una serie de potencias obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} h^{\nu-1} = e^z,$$

es decir,

$$(1.5.2) \quad (e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Definimos las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}$$

y

$$\operatorname{cos} z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} z^{2\nu}.$$

Igual que la exponencial, estas series convergen en todo \mathbb{C} . Usando $i^2 = -1$ estas definiciones implican

$$(1.5.3) \quad \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z = e^{iz} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como $\operatorname{cos}(-z) = \operatorname{cos} z$ y $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, reemplazando z por $-z$ (1.5.3) da

$$\operatorname{cos} z - i \operatorname{sen} z = e^{-iz},$$

así que se cumplen las *Fórmulas de Euler*

$$(1.5.4) \quad \operatorname{cos} z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Como \exp es entera con derivada dada en (1.5.2), las reglas de diferenciación compleja implican que

$$(\operatorname{sen} z)' = \operatorname{cos} z, \quad (\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z.$$

Las fórmulas de adición

$$(1.5.5) \quad \operatorname{cos}(w+z) = \operatorname{cos} w \operatorname{cos} z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$$

$$(1.5.6) \quad \operatorname{sen}(w+z) = \operatorname{sen} w \operatorname{cos} z + \operatorname{cos} w \operatorname{sen} z$$

son una consecuencia sencilla de (1.5.1) y (1.5.4).

Estudiemos la exponencial en más detalle, basándonos en (1.5.3). Para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$(1.5.7) \quad e^z = e^x e^{iy} = e^x (\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y)$$

como representación polar de e^z . Esto implica las relaciones

$$(1.5.8) \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z,$$

donde “arg” significa *un* argumento de e^z , *no* el valor de la rama principal del argumento. En particular la función

$$t \mapsto e^{it} = \operatorname{cos} t + i \operatorname{sen} t$$

es un epimorfismo del grupo aditivo de \mathbb{R} en el grupo multiplicativo S_1 de los números complejos del valor absoluto 1. Similarmente, (1.5.1) implica que

$$(1.5.9) \quad \mathbb{C} \rightarrow \dot{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto e^z$$

es un homomorfismo del grupo aditivo de \mathbb{C} en el grupo multiplicativo $\dot{\mathbb{C}}$. Este también es suprayectivo: si $w \in \dot{\mathbb{C}}$ tomamos $x := \log|w|$ (el logaritmo natural) y y cualquier argumento de w y ponemos $z := x + iy$. Entonces (1.5.8) dice que $e^z = w$.

La Ecuación (1.5.7) además implica que $e^{2\pi i} = 1$, así que $e^{z+2k\pi i} = e^z(e^{2\pi i})^k = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C}$. En otras palabras, la exponencial tiene el período $2\pi i$. Si $e^{z_1} = e^{z_2}$, poniendo $z := z_1 - z_2 = x + iy$ obtenemos $1 = e^z = e^x(\cos y + i \sen y)$, así que $x = 0$, $\cos y = 1$ y $\sen y = 0$. Por las propiedades de las funciones trigonométricas reales esto implica que $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Eso muestra que $2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$ son los únicos períodos de \exp , o, en otras palabras, que $2\pi i\mathbb{Z}$ es el núcleo del homomorfismo dado en (1.5.9). Una consecuencia es que para cada $a \in \mathbb{R}$ la restricción de la exponencial a la tira horizontal

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$$

es una biyección con $\dot{\mathbb{C}}$.

Por las fórmulas (1.5.4) podemos analizar las extensiones de las funciones geométricas a \mathbb{C} . Encontremos primero todos los ceros: si $\sen z = 0$ entonces $e^{2iz} = 1$, así que por lo de arriba $z \in \pi\mathbb{Z}$. El seno complejo no tiene más ceros que los ya conocidos en \mathbb{R} . Como

$$(1.5.10) \quad \sen\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sen z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sen \frac{\pi}{2} = \cos z$$

lo mismo es cierto para el coseno. Investiguemos la periodicidad. Por la periodicidad de \exp y por (1.5.4) el coseno y el seno tienen los períodos $2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Cualquier período $w \in \mathbb{C}$ del seno cumpliría $\sen w = \sen 0 = 0$, es decir, $w \in \pi\mathbb{Z}$. Como $k\pi$ sólo es un período para k par, $k \in 2\pi\mathbb{Z}$. Los elementos de $2\pi\mathbb{Z}$ son los únicos períodos de del seno. Por (1.5.10) lo mismo es cierto para el coseno. Por otro lado, las fórmulas de Euler implican, para $x, y \in \mathbb{R}$, las representaciones

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - i \sen x \sinh y \\ \sen(x + iy) &= \sen x \cosh y + i \cos x \sinh y, \end{aligned}$$

así que \cos y \sen no son acotados en ninguna tira vertical $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}$.

Extendamos también la tangente y la cotangente a números complejos, en la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sen z}{\cos z} && \text{para } z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sen z} && \text{para } z \notin \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Usando la exponencial obtenemos

$$\tan z = \frac{1 e^{2iz} - 1}{i e^{2iz} + 1}, \quad \cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}.$$

Las derivadas complejas son

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z, \quad (\cot z)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 z} = -(1 + \cot^2 z).$$

La tangente y cotangente tienen precisamente $k\mathbb{Z}$ como conjunto de períodos.

La extensión de las funciones hiperbólicas a funciones enteras en \mathbb{C} es muy natural, usando las fórmulas conocidas del análisis real:

$$\operatorname{senh} z := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{cosh} z := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}).$$

Las fórmulas de Euler implican las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \frac{1}{i} \operatorname{sen} iz, & \operatorname{cosh} z &= \cos iz, \\ \operatorname{sen} z &= \frac{1}{i} \operatorname{senh} iz, & \cos z &= \operatorname{cosh} iz. \end{aligned}$$

Ellas muestran que en el plano complejo las funciones trigonométricas y las hiperbólicas coinciden módulo una rotación y multiplicación con una constante. Por ejemplo, el coseno real es la restricción del coseno complejo a \mathbb{R} , y el coseno hiperbólico es la restricción del coseno complejo a $i\mathbb{R}$.

2 Integración compleja

La teoría de funciones holomorfas está íntimamente ligada a la existencia de antiderivadas y por eso a la integración a lo largo de caminos. Varios teoremas fundamentales del análisis complejo son resultados sobre estos integrales. En esta sección introducimos la noción de la integral de una función compleja continua a lo largo de un camino de integración y coleccionamos las herramientas técnicas para trabajar con ese integral complejo.

2.1. Caminos de integración

Sea $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *continua a trozos* si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de I tal que la restricción de f a cada (t_{k-1}, t_k) es continua y tiene una extensión continua a $[t_{k-1}, t_k]$. Similarmente, llamamos a f *continuamente diferenciable a trozos* si f es continua y si existe una partición como arriba tal que f es continuamente diferenciable en cada $[t_{k-1}, t_k]$. Eso significa, en particular, que las derivadas unilaterales existen en cada t_k , $k = 0, 1, \dots, n$; no obstante, no necesariamente coinciden en los t_k para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Definimos la integral de una función f compleja y continua a trozos por

$$(2.1.1) \quad \int_I f := \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Aquí se entiende que la integral es la suma de integrales de Riemann en un número finito de subintervalos compactos, donde la restricción de f es continua después de cambiar a lo más dos puntos (en la frontera). La integral es un operador real y \mathbb{C} -lineal: para funciones $f, f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{C}$ continuas a trozos y números $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\int_I (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_I f_1 + c_2 \int_I f_2 \quad \text{y} \quad \int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}.$$

El Teorema Fundamental de Cálculo también es válido en esta situación: si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y si $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable con $F' = f$, entonces

$$(2.1.2) \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Estos hechos se comprueban fácilmente considerando las partes reales y imaginarias por separado. Similarmente, existe una regla de sustitución: sea $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable a

trozos, y sea $g: \varphi[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos tal que $g \circ \varphi$ es continua a trozos. Entonces g y $(g \circ \varphi)\varphi'$ tienen antiderivadas, así que

$$\int_a^b (g \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g.$$

2.1.1 Lema. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos. Entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración. Para $s \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$e^{is} \int_a^b f = \int_a^b e^{is} f$$

y luego que

$$(2.1.3) \quad \operatorname{Re} \left(e^{is} \int_a^b f \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{is} f) \leq \int_a^b |e^{is} f| = \int_a^b |f|.$$

Si $\int_a^b f = 0$ no hay nada que demostrar. Si $\int_a^b f \neq 0$ entonces ponemos $s := -\operatorname{Arg} \int_a^b f$. Se sigue que

$$e^{is} \int_a^b f = e^{is} \left| \int_a^b f \right| e^{-is} = \left| \int_a^b f \right|,$$

es decir, la primera integral es un valor real. Junto con (2.1.3) esto prueba la afirmación. \square

2.1.2 Definición. Un camino de integración en $U \subseteq \mathbb{C}$ es un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ continuamente diferenciable a trozos.

Si γ es continuamente diferenciable en $[a, b]$ y $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, entonces decimos que γ es *suave*. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ entonces γ es un camino de integración *cerrado* (o un *lazo*). Si γ es cerrado e inyectivo en $[a, b]$ entonces decimos que γ es simplemente cerrado. El rango $\gamma[a, b]$ también se llama la *traza*, y escribimos $\operatorname{tr} \gamma := \gamma[a, b]$. Si un subconjunto M de \mathbb{C} es la traza de un camino γ , decimos que γ parametriza a M . Muchas veces denotaremos a un camino y a su traza por el mismo símbolo.

2.1.3 Ejemplo. (a) sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. La función

$$\kappa: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z_0 + re^{it}$$

es continuamente diferenciable: $\kappa'(t) = ire^{it}$. Es un camino suave y simplemente cerrado con traza $S_r(z_0)$. Denotaremos a este camino por $\kappa(r, z_0)$ y lo llamaremos el *círculo positivamente orientado*.

(b) Para $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ la función $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := (1-t)z_0 + tz_1$, parametriza el segmento $[z_0, z_1]$ entre z_0 y z_1 .

- (c) Más generalmente: si $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ están dados, definimos un camino de integración $\gamma: [0, n] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\gamma(t) := (k+1-t)z_k + (t-k)z_{k+1} \quad \text{si } t \in [k, k+1].$$

la traza de γ es una cadena de segmentos, y escribiremos $\gamma = [z_0, z_1, \dots, z_n]$. En el caso particular de un triángulo Δ con los vértices z_0, z_1 y z_2 (es decir, Δ es la envolvente convexa de $\{z_0, z_1, z_2\}$), $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ es una parametrización de $\partial\Delta$.

Introduzcamos los procesos de pegar y cortar caminos de integración. Sean $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ caminos de integración tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. El camino pegado $\gamma_1\gamma_2: [a, b+d-c] \rightarrow \mathbb{C}$ de γ_1 y γ_2 está dado por

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t+c-b) & t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

es obvio que $\gamma_1\gamma_2$ también es un camino de integración. Por inducción se define el pegado $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$ de un número finito de caminos γ_k con la propiedad que coinciden el punto final de γ_k con el punto inicial de γ_{k+1} , para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Decimos en este caso que los $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son *pegables*. Nuevamente, si todos los caminos γ_k son caminos de integración, también $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$ es un camino de integración. Por ejemplo, $[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1][a_1, a_2] \dots [a_{n-1}, a_n]$.

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino de integración y $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$, entonces la restricción $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es un camino de integración. Los γ_k son los caminos parciales de γ y γ está dividido en los caminos parciales γ_k . Obviamente γ es pegado de los γ_k en esa situación. Si los γ_k son suaves, entonces decimos que γ es suave a trozos.

Para un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definimos el camino inverso $\gamma^{-1}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$. Intuitivamente γ^{-1} recorre la traza de γ en la dirección inversa, intercambiando punto inicial y punto final. Por ejemplo, el camino inverso de $\kappa := \kappa(r, z_0)$ es $\kappa^{-1}(r, z_0) := \kappa(r, z_0)^{-1}$, el *círculo negativamente orientado*. Por la periodicidad de la exponencial se tiene que $\kappa^{-1}(t) = z_0 + re^{-it}$ para $t \in [0, 2\pi]$.

El sentido del recorrido de la traza de un camino lo denotaremos por una flecha. Invertir la dirección del camino inverso la flecha.

Un camino de integración $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *rectificable*, con la longitud

$$(2.1.4) \quad L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'|.$$

Este hecho se mostró en el análisis real para caminos rectificables en \mathbb{R}^n .

2.1.4 Definición. Sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino de integración y $f: \text{tr } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos la *integral de f a lo largo de γ* (o *sobre γ*) por

$$(2.1.5) \quad \int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b (f \circ \gamma)\gamma' = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

En esta definición el integrando es continuo a trozos ya que f es continua y γ continuamente diferenciable a trozos, así que la integral está bien definida según (2.1.1).

2.1.5 Ejemplo. (a) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Integramos la función $f(z) := 1/(z - z_0)$ a lo largo de $\kappa(r, z_0)$:

$$(2.1.6) \quad \int_{\kappa(r, z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i.$$

Notemos que el resultado no depende del radio r .

Muchas veces escribiremos

$$\int_{|z-z_0|=r} f \quad \text{o} \quad \int_{\partial D_r(z_0)} f \quad \text{en vez de} \quad \int_{\kappa(r, z_0)} f.$$

(b) Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\gamma(t) := t$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(t) dt,$$

es decir, las notaciones de (2.1.1) y de (2.1.5) son compatibles.

(c) Si $\text{tr } \gamma$ es un solo punto, entonces

$$\int_{\gamma} f = 0$$

ya que $\gamma' \equiv 0$.

(d) Sea $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\gamma(t) := e^{i(\pi-t)}$, es decir, un medio círculo superior de -1 a 1 . Como $|z| = 1$ en $\text{tr } \gamma$ obtenemos

$$\int_{\gamma} |z| dz = \int_0^{\pi} \gamma' = \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2.$$

Por otro lado, la integral de la misma función a lo largo del segmento $[-1, 1]$ da

$$\int_{[-1, 1]} |z| dz = \int_{-1}^1 |t| dt = 1.$$

Este ejemplo muestra que en general los integrales a lo largo de caminos no sólo dependen de los puntos iniciales y finales.

Hablemos de las propiedades de la integral sobre un camino γ . Es obvio que es \mathbb{C} -lineal, es decir, que

$$\int_{\gamma} (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_{\gamma} f_1 + c_2 \int_{\gamma} f_2$$

si $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Está válida la *desigualdad estándar*:

2.1.6 Teorema. Sean γ un camino de integración y f una función continua en $\text{tr } \gamma$. Entonces

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \max_{z \in \text{tr } \gamma} |f(z)|.$$

Demostración. Sea $[a, b]$ el dominio de γ . Por el Lema 2.1.1 y con $M := \max_{z \in \text{tr } \gamma} |f(z)|$ obtenemos

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b (f \circ \gamma) \gamma' \right| \leq \int_a^b |(f \circ \gamma) \gamma'| \leq M \int_a^b |\gamma'| = ML(\gamma). \quad \square$$

Para los siguientes resultados necesitamos que detallar transformaciones de parámetros.

2.1.7 Definición. Sean I, J intervalos compactos. Una *transformación de parámetros de J en I* es una función $\varphi: J \rightarrow I$ que es suprayectivo, continuamente diferenciable en trozos, y tal que $\varphi'(t) > 0$. En los puntos donde φ' no es continua esto significa que las derivadas unilaterales son positivas.

Si φ, ψ son transformaciones de parámetros, entonces también $\varphi \circ \psi$ y φ^{-1} lo son. Si $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino de integración y $\varphi: J \rightarrow I$ una transformación de parámetros, entonces también $\gamma \circ \varphi$ es un camino de integración. Ese camino está obtenido de γ por una *reparametrización*. Los puntos iniciales y finales y la traza de un camino no cambia bajo una reparametrización. Lo mismo es cierto para una integral sobre un camino:

2.1.8 Teorema. Sean γ_1 y γ_2 caminos de integración en \mathbb{C} , donde γ_2 es una reparametrización de γ_1 . Entonces se cumple para toda $f: \text{tr } \gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua que

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demostración. Los dominios de γ_1 y γ_2 sean $[a, b]$ y $[c, d]$, y sea $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ con una transformación de parámetros $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$. La regla de substitución implica que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(s))) \gamma_1'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(\varphi(s)) ds \\ &= \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

2.1.9 Teorema. Sea γ un camino de integración y γ^{-1} el camino inverso. Entonces se cumple para toda $f: \text{tr } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continua que

$$\int_{\gamma^{-1}} f = - \int_{\gamma} f.$$

Demostración. Sea $[a, b]$ el dominio de γ y γ^{-1} . Como $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$, se tiene $(\gamma^{-1})'(t) = -\gamma'(a + b - t)$. Con la sustitución $s = a + b - t$ obtenemos

$$\int_{\gamma^{-1}} f = - \int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t) dt = - \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f. \quad \square$$

2.1.10 Teorema. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ caminos de integración que son pegables y γ el pegado. Entonces se cumple para toda $f: \text{tr } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continua que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Demostración. Mostremos el caso de dos caminos pegados. El caso general se sigue por inducción.

Sean γ_1, γ_2 caminos de integración con dominios $[a, b]$ y $[c, d]$. Con la sustitución $s = c + t - b$ calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 \gamma_2} f &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) dt + \int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(c + t - b))\gamma_2'(c + t - b) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) dt + \int_c^d f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s) ds \\ &= \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \end{aligned} \quad \square$$

Será útil generalizar más aún el concepto de pegado de caminos, permitiendo que no coincidan puntos finales de unos con puntos iniciales de otros. Además, permitiremos que un camino se recorre un número entero de veces, es decir, con una multiplicidad $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.11 Definición. Una *cadena de caminos* en $U \subseteq \mathbb{C}$ es un mapeo Γ del conjunto de todos los caminos de integración en U en \mathbb{Z} que toma un valor distinto a cero sólo en un número finito de caminos.

El conjunto de cadenas en U forma, mediante sumación de los mapeos Γ , un grupo abeliano, el grupo libre sobre los caminos de integración en U . Identifiquemos a un camino γ con la cadena que toma el valor 1 en γ y el valor cero en los demás caminos y denotemos esta *cadena fundamental* también por γ . Con esta notación, cada cadena Γ es una combinación lineal de cadenas fundamentales γ_j :

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j,$$

donde $n_j \in \mathbb{Z}$. Cadenas se suman puntualmente: si $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ son caminos de integración, entonces con

$$\Gamma_1 := \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 \quad \text{y} \quad \Gamma_2 := 2\gamma_2 - \gamma_3 + 5\gamma_4$$

obtenemos

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \gamma_1 + 2\gamma_3 + 5\gamma_4.$$

La traza de $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j$ está definida por

$$\operatorname{tr} \Gamma := \bigcup_{n_j \neq 0} \operatorname{tr} \gamma_j,$$

y la longitud de Γ es

$$L(\Gamma) := \sum_{j=1}^k |n_j| L(\gamma_j).$$

Para una función continua $f: \operatorname{tr} \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definimos

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f.$$

Las propiedades de integrales sobre caminos se extienden a integrales sobre cadenas: $\int_{\Gamma} f$ es \mathbb{C} -lineal en f ; la desigualdad estándar tiene la forma

$$(2.1.7) \quad \left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\Gamma) \max_{z \in \operatorname{tr} \Gamma} |f(z)|$$

Además se tiene

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$$

si $f: \operatorname{tr}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \rightarrow \mathbb{C}$ es continua.

2.2. Antiderivadas

En esta sección extendemos el teorema fundamental del cálculo para funciones complejas en intervalos a funciones complejas en caminos de integración.

2.2.1 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Una función $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *antiderivada de f* si F es holomorfa y $F' = f$. Decimos que f tiene *antiderivadas locales en U* si para cada $z_0 \in U$ existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de z_0 tal que $f|_V$ tiene una antiderivada.

La existencia de una antiderivada tiene una consecuencia importante para los integrales sobre caminos:

2.2.2 Teorema. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua que posee una antiderivada F . Entonces para cada camino de integración de z_0 a z_1 en U se tiene

$$\int_{\gamma} f = F(z_1) - F(z_0).$$

Demostración. Sea $[a, b]$ el dominio de γ y sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición tal que $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es continuamente diferenciable para $k = 1, 2, \dots, n$. Mostremos primero que

$$(2.2.1) \quad (F \circ \gamma_k)' = (F' \circ \gamma_k)\gamma_k' \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, n.$$

Fijamos k y $t^* \in [t_{k-1}, t_k]$ y calculamos:

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma_k)'(t^*) &= \lim_{\substack{t \rightarrow t^* \\ t \in [t_{k-1}, t_k]}} \frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t^*))}{t - t^*} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow t^* \\ t \in [t_{k-1}, t_k]}} \frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t^*))}{\gamma(t) - \gamma(t^*)} \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t^*)}{t - t^*} \\ &= \lim_{z \rightarrow \gamma(t^*)} \frac{F(z) - F(\gamma(t^*))}{z - \gamma(t^*)} \lim_{\substack{t \rightarrow t^* \\ t \in [t_{k-1}, t_k]}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t^*)}{t - t^*} \\ &= F'(\gamma(t^*))\gamma_k'(t^*). \end{aligned}$$

Esto muestra (2.2.1).

Calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt && \text{por la Definición 2.1.4} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t))\gamma_k'(t) dt && \text{por el Teorema 2.1.10} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma_k(t))\gamma_k'(t) dt && \text{porque } f = F' \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma_k)'(t) dt && \text{por (2.2.1)} \\ &= \sum_{k=1}^n (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))) && \text{por (2.1.2)} \\ &= F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

La Ecuación (2.1.2) (el teorema fundamental del cálculo en un intervalo) se pudo usar ya que γ_k' y luego $(F \circ \gamma_k)'$ es una función continua para todo k . \square

2.2.3 Corolario. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua que posee una antiderivada. Entonces

$$\int_{\gamma} f = 0$$

para todo lazo γ en U .

2.2.4 Ejemplo. (a) Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $f(z) := z^n$ tiene la antiderivada $F(z) := z^{n+1}/(n+1)$ en \mathbb{C} . En consecuencia, si γ es un camino de integración de z_0 a z_1 , se cumple

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}).$$

Un polinomio $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ tiene la antiderivada $\sum_{k=0}^n a_k z^{k+1}/(k+1)$.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Entonces $f(z) := z^{-n}$ tiene la antiderivada $z^{-n+1}/(-n+1)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esto es una consecuencia de la Proposición 1.2.5(c) y del ejemplo (a). En consecuencia

$$(2.2.2) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{si } n = 2, 3, \dots \text{ y si } \gamma \text{ es un lazo en } \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(c) Por el Ejemplo 2.1.5(a) y el Corolario 2.2.3 la función $1/z$ no tiene una antiderivada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ya que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

(d) En el Ejemplo 2.1.5(d) mostramos que la integral de $|z|$ sí depende del camino. Entonces $|z|$ no posee una antiderivada en \mathbb{C} .

Como en el análisis real, existe la inversión del último teorema:

2.2.5 Teorema. *Sea f continua en la región G . Para cada lazo γ en G sea $\int_{\gamma} f = 0$. Entonces f tiene una antiderivada en G .*

Antes de demostrar este Teorema mostramos un resultado general sobre la existencia de caminos de integración.

2.2.6 Lema. *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $z_0, z_1 \in G$. Entonces existe un camino de integración de z_0 a z_1 .*

Demostración. Sean $\kappa: [a, b] \rightarrow G$ un camino de z_0 a z_1 (G es arcoconexo!) y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ una cubierta finita de $\text{tr } \kappa$ por discos abiertos U_k tales que $\overline{U_k} \subseteq G$. Definimos $t_0 := a$. Sea k_1 tal que $z_0 \in U_{k_1}$. Definimos $M := \{t \in [a, b] \mid \kappa(t) \in \overline{U_{k_1}}\}$. Como $\kappa(t_0) = z_0 \in U_{k_1}$, $t_0 \in M$. Además, M es un subconjunto compacto de $[a, b]$, es decir, está bien definido $t_1 := \max M$. Se sigue que $[\kappa(t_0), \kappa(t_1)] \subseteq \overline{U_{k_1}} \subseteq G$. Si $t_1 = b$, entonces terminamos. Si $t_1 < b$, entonces $\kappa(t) \notin U_{k_1}$ para $t \in [t_1, b]$. Reemplazamos a t_0 por t_1 y a z_0 por $\kappa(t_1)$ y repetimos el proceso. Con un número finito de repeticiones (ya que \mathcal{U} es finito) obtenemos, inductivamente, una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $[\kappa(t_{k-1}), \kappa(t_k)] \subseteq G$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Entonces $[z_0, \kappa(t_1), \kappa(t_2), \dots, \kappa(t_{n-1}), z_1] \subseteq G$ es el camino de integración buscado. \square

Demostración del Teorema 2.2.5. Sea $z^* \in G$ un punto fijo. Si $z \in G$, entonces escogemos un camino de integración γ_z de z^* a z en G , usando el Lema 2.2.6. Si σ es otro camino de integración de z^* a z en G , entonces σ^{-1} y γ_z son pegables y $\sigma^{-1}\gamma_z$ es un lazo. La hipótesis implica que

$$0 = \int_{\sigma^{-1}\gamma_z} f = - \int_{\sigma} f + \int_{\gamma_z} f.$$

Entonces está bien definido

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f,$$

ya que la integral no depende del camino de integración γ_z de z^* a z en G .

Mostremos que F es una antiderivada de f . Sean $z_0 \in G$ y

$$A(z) := \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in G \setminus \{z_0\},$$

el cociente diferencial de F en z_0 . Tenemos que mostrar que $A(z) \rightarrow f(z_0)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}_r(z_0) \subseteq G$. Si $z \in D_r(z_0)$ entonces $[z_0, z] \subseteq G$ y $\gamma := \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$ es un lazo en G . La hipótesis implica que

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_{z_0}} f + \int_{[z_0, z]} f - \int_{\gamma_z} f.$$

En seguida,

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f - \int_{\gamma_{z_0}} f \\ &= \int_{[z_0, z]} f \\ &= \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0) dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$A(z) = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt \quad \text{si } z \in \dot{D}_r(z_0).$$

Entonces, para $z \in \dot{D}_r(z_0)$ se cumple

$$\begin{aligned} |A(z) - f(z_0)| &= \left| \int_0^1 (f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $z \rightarrow z_0$. Esta convergencia es una consecuencia de la continuidad uniforme de f en $\overline{D}_r(z_0)$. \square

En conjuntos convexos una condición menos estricta es suficiente para la existencia de una antiderivada:

2.2.7 Teorema. *Sea G una región convexa y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Para cada triángulo Δ en G sea $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Entonces f tiene una antiderivada en G .*

Demostración. Sea $z^* \in G$ un punto fijo. Para $z \in G$ ponemos $\gamma_z := [z^*, z]$, así que $\gamma_z \subseteq G$ por la convexidad de G . Definimos

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f.$$

Si $z, z_0 \in G$, el triángulo Δ con los vértices z^*, z_0, z está contenido en G por la convexidad de G . Para el lazo $\partial\Delta = \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$ la hipótesis implica que

$$0 = \int_{\partial\Delta} f = \int_{\gamma_{z_0}} f + \int_{[z_0, z]} f - \int_{\gamma_z} f.$$

La demostración desde este punto es la misma como en el caso del Teorema 2.2.5. \square

Como cada punto en un abierto U tiene una vecindad abierta convexa en U (por ejemplo, un disco suficientemente chico), vale el

2.2.8 Corolario. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Para cada triángulo Δ en U sea $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Entonces f tiene antiderivadas locales en U .*

Los resultados anteriores también podrían ser demostrados usando resultados del análisis real. Expresemos primero la integral compleja sobre un camino mediante la integral real sobre un camino definida en el análisis real. Sean $\gamma = g + ih$ un camino de integración en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ y $f = u + iv$ una función continua en $\text{tr } \gamma$, con u, v funciones reales. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b (f \circ \gamma) \gamma' \\ &= \int_a^b (u \circ \gamma + iv \circ \gamma)(g' + ih') \\ (2.2.3) \quad &= \int_a^b ((u \circ \gamma)g' - (v \circ \gamma)h') + i \int_a^b ((v \circ \gamma)g' + (u \circ \gamma)h') \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} u \circ \gamma \\ -v \circ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix} + i \int_a^b \begin{pmatrix} v \circ \gamma \\ u \circ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix} \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sean $F = U + iV$ una función holomorfa en un subconjunto abierto $G \subseteq \mathbb{C}$, con funciones reales U y V . Por (1.3.7)

$$(2.2.4) \quad F' = \frac{1}{2}(F_x - iF_y) = \frac{1}{2}(U_x + V_y - i(U_y - V_x)) = U_x - iU_y = V_y + iV_x,$$

ya que $U_x = V_y$ y $U_y = -V_x$.

Si $f = u + iv := F'$ es continua, entonces U es continuamente diferenciable con gradiente

$$\nabla U = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

por (2.2.4). Similarmente, V es continuamente diferenciable con gradiente

$$\nabla V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

por (2.2.4). Junto con (2.2.3) esto implica por resultados del análisis real que $\int_\gamma f = 0$ para todo lazo γ en G .

Sea inversamente G una región en \mathbb{C} y $f = u + iv: G \rightarrow \mathbb{C}$ continua, tal que $\int_\gamma f = 0$ para todo lazo γ en G . Tomando parte real y imaginaria en (2.2.3) eso implica que los campos vectoriales

$$(2.2.5) \quad X := \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

en \mathbb{R}^2 tienen integral cero sobre todo lazo γ en G . Por un resultado del análisis real, X y Y son los gradientes de funciones realmente diferenciables U y V en G . Definimos $F := U + iV$ y obtenemos $U_x = u = V_y$ y $U_y = -v = -V_x$, es decir, F es holomorfa. Además, $f = F'$ por la ecuación (2.2.4), es decir, f tiene una antiderivada.

Mostremos que una función holomorfa f en un conjunto abierto U tiene antiderivadas locales si f' es continua. Consideremos nuevamente los campos vectoriales X y Y en \mathbb{R}^2 . En ese caso $u_y = -v_x$ y $v_y = u_x$ por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En consecuencia, en cada disco $D \subseteq U$ los campos X y Y son gradientes, por los resultados del análisis real. En seguida, como antes f tiene una antiderivada en D . Similarmente, una función holomorfa f en una región convexa G con derivada continua tiene una antiderivada en G , y las integrales de f sobre lazos en G se anulan.

2.3. Intercambio de límites

Necesitaremos considerar más en adelante la dependencia de integrales de parámetros. Esta se analiza mediante la noción de continuidad uniforme. Similarmente, convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones implica que uno puede intercambiar integración y limitación. La sección actual contiene estos resultados y algunos otros similares.

2.3.1 Teorema. Sean γ un camino de integración y (f_k) una sucesión de funciones que son continuas en $\text{tr } \gamma$, y que convergen uniformemente allí a una función f . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\gamma f_k = \int_\gamma f.$$

Demostración. La convergencia uniforme en $\text{tr } \gamma$ se expresa por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{z \in \text{tr } \gamma} |f_k(z) - f(z)| = 0.$$

En seguida,

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\gamma} f_k \right| = \left| \int_{\gamma} (f - f_k) \right| \leq L(\gamma) \max_{z \in \text{tr } \gamma} |f_k(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. □

2.3.2 Corolario. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $\sum f_k$ una serie de funciones continuas en U que converge localmente uniformemente en U . Si γ es un camino de integración en U , entonces

$$\int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_k.$$

2.3.3 Teorema. La serie de potencias $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tenga el radio de convergencia $R > 0$. Entonces P es una función holomorfa en $D_R(z_0)$ con derivada $P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$.

Demostración. Primero mostremos que $Q(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ tiene el radio de convergencia R : sea $(|a_{k_\ell}|)$ la subsucesión maximal positiva de $(|a_k|)$. Se sigue de $R > 0$ que

$$(2.3.1) \quad x := \limsup_{\ell \rightarrow \infty} |a_{k_\ell}|^{1/k_\ell} < \infty.$$

Denotando $x_\ell := |k_\ell a_{k_\ell}|^{1/k_\ell} > 0$ obtenemos $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} x_\ell = x$ y luego

$$\begin{aligned} \limsup_{\ell \rightarrow \infty} |k_\ell a_{k_\ell}|^{1/(k_\ell-1)} &= \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{k_\ell - 1} \log |k_\ell a_{k_\ell}| \right) \\ &= \limsup_{\ell \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{k_\ell}{k_\ell - 1} \log x_\ell \right) = x. \end{aligned}$$

Aquí usamos que \exp y \log son funciones continuas y crecientes en $(0, \infty)$. El cálculo sigue siendo correcto en el caso $x = 0$. Esto muestra que los radios de convergencia de las dos series coinciden.

Sea γ un lazo en $D_R(z_0)$. Para $k \in \mathbb{N}$ la función $k(z - z_0)^{k-1}$ tiene la antiderivada $(z - z_0)^k$. El Corolario 2.2.3 implica que $\int_{\gamma} k(z - z_0)^{k-1} dz = 0$, así que por el Corolario 2.3.2 se sigue que

$$\int_{\gamma} Q = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\gamma} k(z - z_0)^{k-1} = 0.$$

Como γ era un lazo arbitrario en $D_R(z_0)$, el Teorema 2.2.5 dice que Q tiene una antiderivada en $D_R(z_0)$. Según la demostración del Teorema 2.2.5 una antiderivada está dada por

$$\int_{[z_0, z]} Q = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{[z_0, z]} k(z - z_0)^{k-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = P(z) - a_0.$$

Eso muestra que P es una función holomorfa con derivada Q . □

2.3.4 Teorema. Sean γ un camino de integración en \mathbb{C} , M un espacio métrico localmente compacto y $f: \text{tr } \gamma \times M \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

(a) La función $F: M \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(x) := \int_{\gamma} f(\zeta, x) d\zeta$$

es continua.

(b) Sean $M \subseteq \mathbb{C}$ abierto y tenga f una derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta, x)$ que es continua en $\text{tr } \gamma \times M$, entonces F tiene una derivada parcial continua:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta, x) d\zeta.$$

(c) Sean $M \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f(\zeta, \cdot)$ complejamente diferenciable para todo $\zeta \in \text{tr } \gamma$ fijo, con derivada continua $f_z(\zeta, z)$ en $\text{tr } \gamma \times M$. Entonces F es holomorfa en M , con derivada

$$F'(z) = \int_{\gamma} f_z(\zeta, z) d\zeta.$$

Demostración. Los incisos (a) y (b) son consecuencias inmediatas de teoremas del análisis real (dependencia de integrales de parámetros), aplicadas a la parte real e imaginaria de los integrales.

En el caso del inciso (c), el inciso (b) implica que

$$F_z(z) = \int_{\gamma} f_z(\zeta, z) d\zeta \quad \text{y} \quad F_{\bar{z}}(z) = \int_{\gamma} f_{\bar{z}}(\zeta, z) d\zeta.$$

Como $f_{\bar{z}} \equiv 0$, también $F_{\bar{z}} \equiv 0$, es decir, F es holomorfa. \square

El siguiente Teorema es una consecuencia del teorema de Fubini, aplicado a las partes reales e imaginarias de los integrales sobre los dominios de los caminos:

2.3.5 Teorema. Sean α y β dos caminos de integración y $f: \text{tr } \alpha \times \text{tr } \beta \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Entonces

$$\int_{\alpha} \left(\int_{\beta} f(z, w) dw \right) dz = \int_{\beta} \left(\int_{\alpha} f(z, w) dz \right) dw.$$

3 Funciones holomorfas

En este capítulo veremos que holomorfa es un concepto fundamentalmente diferente a diferenciabilidad real. Por ejemplo, mostraremos aquí que una función holomorfa automáticamente es complejamente diferenciable infinitas veces, y que en cada punto del dominio de la función existe un desarrollo en una serie de potencias centrada en el.

3.1. El teorema de Cauchy en conjuntos convexos

El siguiente resultado forma la base de todo el desarrollo siguiente. En comparación con lo que vimos al final de la sección 2.2 la gran diferencia es que ya no falta suponer que la derivada de una función holomorfa sea continua. Últimamente la continuidad de la derivada compleja saldrá como consecuencia de los teoremas. Este es el punto donde el análisis complejo se muestra muy diferente al análisis real.

3.1.1 Teorema (Goursat). *Sea Δ un triángulo cerrado en \mathbb{C} . Si f es una función holomorfa en una vecindad de Δ , entonces*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Demostración. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $\Delta \subseteq U$ y f holomorfa en U . Partimos Δ en cuatro triángulos $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ juntando los centros de los lados. Consideremos los lazos $\partial\Delta_1^k$, recorriendo la frontera en el sentido positivo. Si $[z_1, z_2]$ es una conexión de dos centros, entonces $[z_1, z_2]$ es parte de un lazo $\partial\Delta_1^l$, y $[z_2, z_1]$ es parte de otro lazo $\partial\Delta_1^l$. Formando

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f,$$

se anulan los integrales sobre tal parte $[z_1, z_2]$. En consecuencia,

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f \right| \leq 4 \max_k \left| \int_{\partial\Delta_1^k} f \right|.$$

Escogemos de los cuatro triángulos el que realiza el máximo de arriba, y lo llamamos Δ_1 . Eso da

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f \right|.$$

Aplicamos la misma construcción a Δ_1 y obtenemos un nuevo triángulo Δ_2 con

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_2} f \right|.$$

por inducción obtenemos una sucesión de triángulos

$$\Delta =: \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

con las propiedades

$$(3.1.1) \quad \left| \int_{\partial\Delta} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f \right|$$

y

$$(3.1.2) \quad L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta_{n-1}) = \dots = 2^{-n} L(\partial\Delta).$$

Como todos los Δ_n son compactos existe un punto $z_0 \in \Delta$ tal que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Usemos la diferenciabilidad compleja de f en z_0 para estimar la integral $\int_{\partial\Delta_n} f$. Existe una función continua A con $A(z_0) = 0$ tal que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + A(z)) \quad \text{para todo } z \in U.$$

La función lineal $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ tiene una antiderivada, así que

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) = 0.$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)A(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_n) \max_{z \in \partial\Delta_n} (|z - z_0| |A(z)|) \\ &\leq (L(\partial\Delta_n))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |A(z)|. \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos el hecho obvio que $|z - z_0| \leq L(\partial\Delta_n)$ para todo $z, z_0 \in \Delta_n$. Combinamos este resultado con (3.1.1) y (3.1.2) y obtenemos

$$(3.1.3) \quad \left| \int_{\partial\Delta} f \right| \leq 4^n (L(\partial\Delta_n))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |A(z)| \leq (L(\partial\Delta))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |A(z)|.$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|A(z)| \leq \varepsilon$ para todo $z \in D_\delta(z_0)$. Eso es una consecuencia de la continuidad de A y de $A(z_0) = 0$. Existe n_0 tal que $\Delta_n \subseteq D_\delta(z_0)$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$\max_{z \in \partial\Delta_n} |A(z)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Estos hechos muestran que

$$\max_{z \in \partial \Delta_n} |A(z)| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y la cota (3.1.3) implica la afirmación. \square

Mostremos una extensión útil del Teorema de Goursat que permite tratar funciones que son holomorfas excepto en un punto.

3.1.2 Teorema. *Sea Δ un triángulo cerrado en \mathbb{C} y z_0 un punto en Δ . Si f es una función holomorfa en una vecindad de Δ , con la posible excepción de z_0 , y si f es continua en z_0 , entonces*

$$\int_{\partial \Delta} f = 0.$$

Demostración. (a): Mostremos primero el caso donde z_0 es un vértice de Δ . Tomamos un punto z_1 en un lado de Δ que es adyacente a z_0 . Partimos Δ en tres triángulos Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , como dibujado en la Figura 3.1. Aquí sea el lado de Δ_1 enfrente de z_0 paralelo

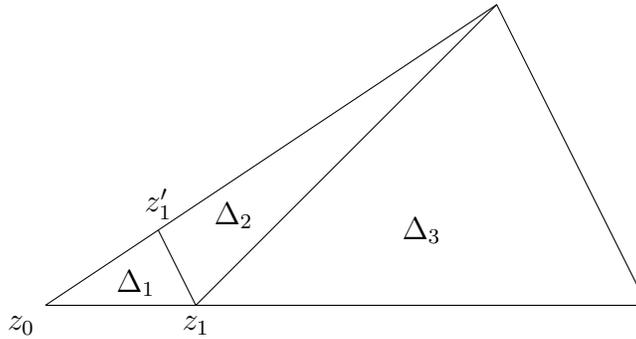


Figura 3.1: Para la demostración del Teorema 3.1.2.

al lado de Δ enfrente de z_0 . Por el Teorema 3.1.1 tenemos

$$\int_{\partial \Delta_2} f = \int_{\partial \Delta_3} f = 0,$$

así que

$$\int_{\partial \Delta} f = \int_{\partial \Delta_1} f.$$

Eso muestra que la integral en la derecha de la última ecuación es independiente de z_1 . Por otro lado, como f es acotado en Δ , la desigualdad

$$\left| \int_{\partial \Delta_1} f \right| \leq L(\partial \Delta_1) \max_{z \in \Delta} |f(z)|$$

implica que

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} \int_{\partial \Delta_1} f = 0.$$

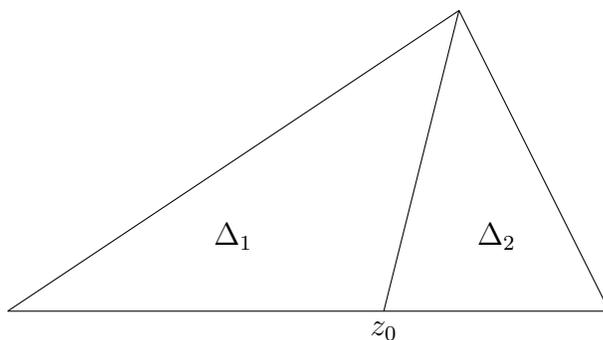


Figura 3.2: Para la demostración del Teorema 3.1.2.

Esto comprueba la afirmación en este caso.

(b): Sea ahora z_0 un punto en un lado de Δ . Partimos Δ en dos triángulos, como se muestra en la Figura 3.2. Por los resultados del inciso (a) tenemos

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f = 0.$$

(c): Si z_0 está en el interior de Δ , entonces partimos Δ en dos triángulos, como se muestra en la Figura 3.3. Por los resultados del inciso (b) tenemos

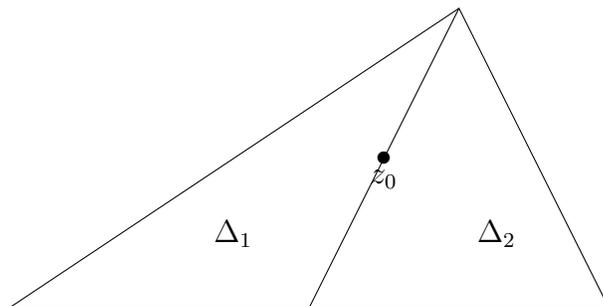


Figura 3.3: Para la demostración del Teorema 3.1.2.

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f = 0. \quad \square$$

Los teoremas Teorema 3.1.2 y Teorema 2.2.7 implican el siguiente resultado:

3.1.3 Teorema. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y convexo y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua que es holomorfa en G , posiblemente excepto a un punto. Entonces f tiene una antiderivada en G .

Si G no es convexo, obtenemos que f al menos tiene antiderivadas locales, por el Corolario 2.2.8.

El Teorema 3.1.3 y el Corolario 2.2.3 implican el

3.1.4 Teorema (Teorema de la integral de Cauchy para convexos). Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y convexo y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua que es holomorfa, posiblemente excepto en un punto. Entonces se cumple para todo lazo γ en G que

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

3.2. Las fórmulas de Cauchy

3.2.1 Teorema (Fórmula de Cauchy). Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea además $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ un disco abierto. Entonces para cada $z \in D$ se cumple

$$(3.2.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demostración. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $D \subset\subset U := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subseteq G$. Sea $z \in D$ fijo. Consideremos en U la función

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z. \end{cases}$$

Como f es complejamente diferenciable en U , g es una función continua. Además, g es holomorfa en $U \setminus \{z\}$. Por el Teorema 3.1.4 obtenemos

$$0 = \int_{\partial D} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Por ello es suficiente demostrar

$$(3.2.2) \quad \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i.$$

Para $z \in D$ escribimos

$$h(z) := \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Por el Teorema 2.3.4(c) la función h es holomorfa en D , con derivada

$$h'(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Como el integrando de la última integral tiene una antiderivada (véase el Ejemplo 2.2.4(b)), $h' \equiv 0$ en D . Por el Teorema 1.3.6 h es constante, y

$$h(z) \equiv h(z_0) = \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i$$

es una consecuencia de (2.1.6). □

En la fórmula (3.2.1) el integrando es continuamente diferenciable respecto a z . El Teorema 2.3.4(c) permite intercambiar diferenciación y integración, así que para $z \in D$ obtenemos

$$(3.2.3) \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

El integrando nuevamente es holomorfo en z . Además, una representación análoga vale en cualquier punto $z \in G$. En consecuencia, también f' es una función holomorfa, y podemos calcular su derivada mediante la fórmula (3.2.3), aplicada a f' . Eso implica el

3.2.2 Teorema. *Cada función holomorfa es complejamente diferenciable infinitas veces. Cualquiera de sus derivadas es una función holomorfa.*

Derivando (3.2.1) n veces, obtenemos una fórmula para la n -ésima derivada:

3.2.3 Teorema. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $D \subset\subset U$ un disco. Entonces para cada $z \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$(3.2.4) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

La existencia de antiderivadas locales de una función f implica por el Teorema 3.2.2 que f es holomorfa, ya que cada una de sus antiderivadas locales en una vecindad de un punto es una función holomorfa. Esta observación nos da algunos criterios de holomorfia:

3.2.4 Teorema (Morera). *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que*

$$\int_{\Delta} f = 0$$

para todo triángulo $\Delta \subseteq U$. Entonces f es una función holomorfa.

Demostración. El Corolario 2.2.8 implica la existencia de antiderivadas locales para f . La afirmación es una consecuencia de la observación de arriba. \square

3.2.5 Teorema. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Si existe un conjunto discreto $M \subseteq U$ tal que f es holomorfa en $U \setminus M$, entonces f es holomorfa en todo U .*

Demostración. Sean $z_0 \in M$ y $D_r(z_0) \subseteq U$ tal que $D_r(z_0) \cap M = \{z_0\}$. Por el Teorema 3.1.3 f tiene una antiderivada en $D_r(z_0)$, es decir, es holomorfa en $D_r(z_0)$. \square

En el teorema anterior la condición de continuidad puede ser debilitada. Formulamos un resultado para nada más un punto:

3.2.6 Teorema (de levantamiento de Riemann). *Sea z_0 un punto en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si f es acotada en $\dot{D}_r(z_0)$ para un $r > 0$, entonces existe una extensión holomorfa de f a todo U .*

Demostración. Ponemos

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z) & z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0. \end{cases}$$

La función F es holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Como f es acotada cerca de z_0 , F es continua en z_0 . Por el Teorema 3.2.5 F es complejamente diferenciable en z_0 . Por consiguiente existe una función $A: U \rightarrow \mathbb{C}$ que es holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ y continua en z_0 , y que cumple

$$F(z) = (z - z_0)A(z) \quad \text{para todo } z \in U.$$

En $U \setminus \{z_0\}$ tenemos $A = f$ por la construcción de F . Nuevamente por el Teorema 3.2.5 también A es holomorfa en todo U , es decir, A es la extensión de f que buscábamos. \square

3.3. Desarrollo en series de potencias

A parte de ser infinitas veces complejamente diferenciable, mostraremos aquí que una función holomorfa tiene la propiedad de ser *desarrollable en una serie de potencias* en cada punto. Esto significa para una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ que para cada $z_0 \in U$ existen una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

con centro de desarrollo z_0 y radio de convergencia $r > 0$ y una vecindad abierta $V \subseteq D_r(z_0) \cap U$ tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{para todo } z \in V.$$

Por el Teorema 2.3.3 f es holomorfa en V en ese caso.

3.3.1 Teorema. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces f es *desarrollable en cada $z_0 \in U$ en una serie de potencias*

$$(3.3.1) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Los coeficientes a_k son únicamente determinados por la fórmula

$$(3.3.2) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

es decir, la serie es la *Serie de Taylor* de f en z_0 . Ella converge al menos en el disco más grande $D_R(z_0)$ que es un subconjunto de U . Si $r \in (0, R)$, entonces también vale la representación

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(r, z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Demostración. Fijamos $z_0 \in U$ y consideramos el disco más grande $D_R(z_0)$ que es un subconjunto de U . Si $U = \mathbb{C}$, ese disco es todo \mathbb{C} . Además, sea $r \in (0, R)$ fijo, y sea $\kappa := \kappa(r, z_0)$. Para $|z - z_0| < r$ tenemos por la fórmula de Cauchy

$$(3.3.3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Desarrollamos el *Kernel de Cauchy* $1/(\zeta - z)$ en una serie de potencias de $(z - z_0)/(\zeta - z_0)$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \frac{1}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Junto con (3.3.3) obtenemos

$$(3.3.4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \right) d\zeta.$$

Para z fijo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

converge uniformemente en $\zeta \in \kappa$, ya que

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

y por el Teorema 1.4.3. Como f es acotada en κ , también la serie en el integrando de (3.3.4) converge uniformemente en $\zeta \in \kappa$, así que podemos intercambiar sumación e integración por el Corolario 2.3.2. En consecuencia,

$$(3.3.5) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

donde definimos

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

El Teorema 3.2.3 implica la representación (3.3.2), así que los coeficientes a_k son independientes de r . Como $r \in (0, R)$ era arbitrario, la serie en (3.3.5) converge localmente uniformemente en $D_R(z_0)$.

Los coeficientes con la propiedad (3.3.1) son únicos, ya que derivación de la serie da la fórmula (3.3.2). \square

En general no es cierto que la R del teorema anterior sea el radio de convergencia de la serie de Taylor P . Puede pasar, si D es el disco de convergencia de P , que f no coincide en todo $U \cap D$ con P .

3.3.2 Teorema. *Sea*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

una serie de potencias con disco de convergencia $D_R(z_0)$. Entonces P puede ser desarrollada en cada punto $z_1 \in D_R(z_0)$ en una serie de potencias

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k.$$

El radio de convergencia de la nueva serie es al menos $R - |z_1 - z_0|$.

Demostración. Como P define una función holomorfa, aplica el Teorema 3.3.1. \square

3.3.3 Teorema. *Si $\sum a_k(z - z_0)^k$ es una serie de potencias con función límite f y si D es su disco de convergencia, entonces no existen una vecindad abierta U de \overline{D} y una extensión holomorfa \hat{f} de f a U .*

Demostración. Argumentamos por contradicción. Si \hat{f} fuera una extensión holomorfa de f a U , entonces \hat{f} tendría un desarrollo en una serie de potencias en z_0 que converge en un disco $D' \supset \overline{D}$. Pero los coeficientes de las dos series tendrían que coincidir, por (3.3.2), igual que sus radios de convergencia. ¡Contradicción! \square

El ejemplo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

muestra que la afirmación del Teorema 3.3.3 no es cierta en el análisis real.

Un resumen de los resultados sobre funciones holomorfas es el siguiente

3.3.4 Teorema. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces son equivalentes:*

- (I) f es holomorfa;
- (II) f tiene antiderivadas locales;
- (III) f es realmente diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann;
- (IV) f tiene un desarrollo en una serie de potencias en cada $z_0 \in U$.

Usemos los desarrollos en series de potencias como herramienta para analizar en más detalle las funciones holomorfas.

3.3.5 Definición. Una función holomorfa f tiene un *cero del orden n* en z_0 si satisface

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

f asume el valor w del orden n en z_0 o tiene un punto w del orden n en z_0 si $f - w$ tiene un cero del orden n en z_0 .

En vez de orden también se dice *multiplicidad*. Un cero del orden 0 no es un cero. El orden ∞ también es posible. La función z^n tiene un cero del orden n en 0.

3.3.6 Proposición. *Los siguientes incisos son equivalentes:*

- (I) f tiene un cero del orden n en z_0 ;
- (II) el desarrollo de Taylor en z_0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_n \neq 0;$$

- (III) existe una función holomorfa g en una vecindad abierta U de z_0 tal que

$$(3.3.6) \quad g(z_0) \neq 0 \quad y \quad f(z) = g(z)(z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in U.$$

La equivalencia de los incisos (II) y (III) se sigue considerando las series de Taylor de f y g en z_0 .

La función $f \equiv 0$ tiene un cero del orden ∞ en cualquier punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Lo siguiente muestra que esa propiedad caracteriza a la función nula:

3.3.7 Teorema (Identidad). *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces son equivalentes:*

- (I) $f \equiv 0$;
- (II) f tiene un cero del orden ∞ en G ;
- (III) existe un subconjunto no discreto $N \subset G$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in N$.

Un conjunto $M \subset G$ es *discreto* si todo $z_0 \in G$ tiene una vecindad abierta U en G tal que $U \cap M$ es finito.

Demostración. (I) **implica** (III): Es trivial.

(III) **implica** (II): Existe $z_0 \in G$ y una sucesión $(z_\ell) \subseteq N$ tal que $z_\ell \rightarrow z_0$ y $z_\ell \neq z_0$ para todo ℓ . Mostremos que f tiene un cero del orden ∞ en z_0 . Notemos primero que

$$f(z_0) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(z_\ell) = 0.$$

Para la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

de f en z_0 eso implica que $a_0 = 0$. Por inducción, supongamos que ya hemos demostrado que $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Dividimos (para ℓ suficientemente grande)

$$0 = f(z_\ell) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z_\ell - z_0)^k$$

entre $(z_\ell - z_0)^n$ y obtenemos

$$(3.3.7) \quad 0 = a_n + (z_\ell - z_0)g(z_\ell),$$

con la función holomorfa

$$g(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}.$$

Como en la demostración del Teorema 2.3.3 se muestra que el radio de convergencia de g es igual al de la serie de Taylor de f . Dejando $\ell \rightarrow \infty$ en (3.3.7) da $0 = a_n$. Esto concluye la demostración de (II).

(II) implica (I): Supongamos que f tenga un cero del orden ∞ en $z_0 \in G$. Consideramos el conjunto

$$M := \{z \in G \mid f^{(k)}(z) = 0, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Como

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \{z \in G \mid f^{(k)}(z) = 0\}$$

y las funciones $f^{(k)}$ son continuas, M es relativamente cerrado en G . Además, $z_0 \in M$. Por otro lado, si $z_1 \in M$, entonces en la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^k$$

de f en z_1 cumple que $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, y entonces que $f \equiv 0$ en una vecindad de z_1 , por el Teorema 3.3.1. Pero esto implica que esa vecindad está contenida en M , y hemos mostrado que M es abierto. Como G es conexo, $M = G$ y luego $f \equiv 0$ en G . \square

Una forma alternativa del teorema anterior es la siguiente:

3.3.8 Teorema. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Entonces son equivalentes:

- (I) $f \equiv g$;
- (II) existe $z_0 \in G$ tal que $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$;
- (III) existe un subconjunto no discreto $N \subset G$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in N$.

Es una consecuencia del Teorema 3.3.7, aplicado a $f - g$. Los teoremas de identidad muestran, por ejemplo, que una función holomorfa no constante en una región asume un valor w , contado con multiplicidades, sólo un número finito de veces en un compacto.

El teorema de identidad dice que una función holomorfa en una región G está determinada por sus valores en un subconjunto de G muy chico, por ejemplo, en un pedazo C de una curva. Propiedades que son identidades entre funciones holomorfas en G pueden ser demostradas verificándolas solamente en C . Este método de extender una propiedad

de C a todo G se llama el *Principio de Permanencia*. Damos un ejemplo: la función $f(z) := \cot(\pi z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; f tiene el período 1 en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, es decir, las dos funciones holomorfas f y $f(1 + \cdot)$ coinciden en el conjunto no discreto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Por el Principio de Permanencia esto es cierto en todo $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, así que la periodicidad de la cotangente se extiende de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a todo $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Para calcular las series de Taylor, en general la fórmula $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ no sirve mucho, porque las derivadas de alto orden no son fáciles de calcular. Pero al menos para funciones racionales existe un método sencillo. Primero uno las escribe como una suma finita de términos de la forma $1/(z - a)^k$ (fracciones parciales). Para cualquier $z_0 \neq a$ tenemos la serie

$$(3.3.8) \quad \frac{1}{z - a} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(a - z_0)^{k+1}}.$$

Ella converge en $D_{|a-z_0|}(z_0)$. Para obtener las series de las funciones $1/(z - a)^k$, nada más hay que derivar $k - 1$ veces la serie de $1/(z - a)$.

Por ejemplo, desarrollemos la función

$$f(z) := \frac{-1}{(z - 1)^2(z - 2)}$$

en el punto 0. La representación en fracciones parciales es

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z - 2} = - \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2^{k+1}} \right) z^k. \end{aligned}$$

3.4. Desigualdades de Cauchy

3.4.1 Teorema (Desigualdades de Cauchy). *Sea f holomorfa en una vecindad del disco $\overline{D}_r(z_0)$. Entonces se cumple para todo $\delta \in (0, r]$ la cota*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{\delta} \frac{n!}{\delta^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \text{para todo } z \in \overline{D}_{r-\delta}(z_0).$$

Demostración. Para $z \in D_r(z_0)$ tenemos la fórmula de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Si $z \in \overline{D}_{r-\delta}(z_0)$ entonces $|\zeta - z| \geq \delta$ en el denominador del integrando. La afirmación se sigue de la desigualdad estándar, el Teorema 2.1.6. \square

Usando $\delta = r$ y $\delta = r/2$ en el teorema anterior obtenemos el

3.4.2 Corolario. *En la situación del Teorema 3.4.1 se cumplen*

$$(3.4.1) \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

y

$$(3.4.2) \quad |f^{(n)}(z)| \leq 2^{n+1} \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \text{para todo } z \in \overline{D}_{r/2}(z_0).$$

3.4.3 Nota. Para los coeficientes de la serie de potencias $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ el Corolario 3.4.2 y la fórmula (3.3.2) implican la cota

$$(3.4.3) \quad |a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

3.4.4 Teorema (de convergencia de Weierstraß). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea (f_k) una sucesión de funciones holomorfas en U que converge localmente uniformemente a una función f . Entonces f es holomorfa y todas las derivadas de (f_k) convergen localmente uniformemente a la derivada respectiva de f :*

$$f_k^{(n)} \rightarrow f^{(n)}.$$

Demostración. La función f es continua en U como límite localmente uniforme de una sucesión de funciones continuas. Si γ es una parametrización de la frontera de un triángulo cerrado que está contenido en U , entonces la convergencia uniforme de (f_k) en $\text{tr } \gamma$ y el Teorema de Goursat implican que

$$\int_{\gamma} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_k = 0.$$

Por el Teorema de Morera la función f es holomorfa.

Por inducción es suficiente mostrar que $f_k' \rightarrow f'$ localmente uniformemente en U . Sea entonces $D := D_r(z_0) \subset \subset U$. Apliquemos a $f - f_k$ las desigualdades de Cauchy, ecuación (3.4.2):

$$|f_k'(z) - f'(z)| \leq \frac{4}{r} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta) - f_k(\zeta)| \quad \text{para todo } z \in \overline{D}_{r/2}(z_0).$$

La convergencia uniforme de (f_k) en $\overline{D}_r(z_0)$ implica la convergencia uniforme de (f_k') en $\overline{D}_{r/2}(z_0)$. \square

Otra consecuencia sencilla de las desigualdades de Cauchy son el principio del máximo y del mínimo, de la aplicación abierta y de la invariancia de regiones. Empecemos con un principio del mínimo muy particular:

3.4.5 Lema. *Sea la función f holomorfa en una vecindad de $\overline{D}_r(z_0)$. Si se cumple*

$$|f(z_0)| < \min_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

entonces f tiene un cero en $D_r(z_0)$.

Demostración. Supongamos por contradicción que f no tenga cero en $D_r(z_0)$. Entonces $g := 1/f$ es una función holomorfa en una vecindad de $\overline{D}_r(z_0)$, ya que $|f| > 0$ en $S_r(z_0)$. Las desigualdades de Cauchy para $n = 0$ implican

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|,$$

es decir,

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z)|},$$

en contradicción con la hipótesis. \square

3.4.6 Definición. Sean X y Y dos espacios topológicos. Un mapeo $f: X \rightarrow Y$ es *abierto* si $f(U)$ es abierto en Y para cada subconjunto abierto U de X .

3.4.7 Teorema (Invariancia de la región, función abierta). *Sean G una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Entonces $f(G)$ es una región y f es una función abierta.*

Demostración. Como f es continua, $f(G)$ es conexo. Sea $U \subseteq G$ abierto. Sean $w_0 \in f(U)$ y $z_0 \in U$ tales que $f(z_0) = w_0$. Por el Teorema de Identidad y porque f no es constante existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset\subset U$ y tal que z_0 es el único punto w_0 en $\overline{D}_r(z_0)$. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon \quad \text{para todo } z \in S_r(z_0).$$

Mostremos que $D_\varepsilon(w_0) \subseteq f(U)$. Si $w \in D_\varepsilon(w_0)$, entonces

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{para todo } z \in S_r(z_0).$$

Por otro lado tenemos para $z = z_0$ que

$$|f(z_0) - w| = |w - w_0| < \varepsilon.$$

El Lema 3.4.5 implica que $f - w$ tiene al menos un cero en $D_r(z_0)$, lo que implica que $w \in f(U)$. Con eso hemos mostrado que $D_\varepsilon(w_0) \subseteq f(U)$. Como $w_0 \in f(U)$ era arbitrario, $f(U)$ es abierto. \square

Una implicación del teorema anterior es que una función holomorfa en una región es constante si su parte real o imaginaria es constante, o si su valor absoluto es constante.

3.4.8 Teorema (Principio del Máximo para funciones holomorfas). *Sean G una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.*

- (a) Si $|f|$ tiene en $z_0 \in G$ un máximo local, entonces f es constante en G .
- (b) Si además G es acotado y f continua en \overline{G} , entonces $|f|$ alcanza su máximo sobre \overline{G} en un punto de ∂G :

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial \overline{G}} |f(z)|.$$

Demostración. Sea $U \subseteq G$ una vecindad abierta de z_0 tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$. Entonces

$$f(U) \subseteq \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(z_0)|\}.$$

Esto implica que $f(U)$ no es una vecindad de $f(z_0)$. Por el Teorema 3.4.7 obtenemos que $f \equiv f(z_0)$ en U , y el Teorema 3.3.8 dice que f es constante en todo G .

La segunda afirmación es una consecuencia sencilla de la primera. \square

Análogamente tenemos el

3.4.9 Teorema (Principio de Mínimo para funciones holomorfas). *Sean G una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.*

- (a) *Si $|f|$ tiene en $z_0 \in G$ un mínimo local, entonces $f(z_0) = 0$ o f es constante en G .*
- (b) *Si además G es acotado y f continua en \overline{G} , entonces f tiene ceros en G o $|f|$ alcanza su mínimo sobre \overline{G} en un punto de ∂G :*

$$\min_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \min_{z \in \partial \overline{G}} |f(z)|.$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.4.8 a la función $1/f$. \square

3.5. La Propiedad del Promedio

En la sección anterior deducimos el Principio del máximo de la invariancia de la región. Aquí mostremos que en realidad el principio del máximo es cierto para una clase de funciones más grande, las que satisfacen una propiedad de promedios.

Si f es holomorfa en un conjunto abierto U , $z_0 \in U$ y $D_r(z_0) \subset\subset U$ para un $r > 0$, entonces la fórmula integral de Cauchy implica

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(r, z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

En otras palabras, el valor de f en z_0 es el promedio de los valores de la función $t \mapsto f(z_0 + re^{it})$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

3.5.1 Definición. Una función f en el conjunto abierto U tiene la *propiedad del promedio* si es continua y si existe, para cada $z_0 \in U$, un $R > 0$ tal que para todo $r \in (0, R]$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Denotamos a la integral de arriba por $\mu_r(f, z_0)$. Ya demostramos arriba que

3.5.2 Teorema. *Funciones holomorfas tienen la propiedad del promedio.*

La propiedad del promedio es invariante bajo combinaciones lineales y bajo conjugación:

3.5.3 Teorema. *Tengan f y g la propiedad del promedio. Entonces también $af + bg$ tiene la propiedad del promedio si $a, b \in \mathbb{C}$. Además, \bar{f} , f y $\operatorname{Im} f$ tienen la propiedad del promedio.*

Demostración. Esto se sigue de las propiedades de integrales tratadas en la sección 2.1. \square

Por ejemplo, la función $1/x = \operatorname{Re} z$ tiene la propiedad del promedio.

3.5.4 Teorema. *Sean U abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función con la propiedad del promedio. Si $|f|$ tiene en $z_0 \in U$ un máximo local, entonces f es constante en una vecindad de z_0 .*

Demostración. Si $f(z_0) = 0$, entonces trivialmente $f \equiv 0$ en una vecindad de z_0 . Supongamos que $f(z_0) \neq 0$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $cf(z_0) = |f(z_0)|$. Reemplazando f por cf (la cual también tiene la propiedad del promedio) podemos suponer que $f(z_0) > 0$. Escogemos $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(z_0) &\geq |f(z)| && \text{para todo } z \in D_R(z_0) \\ f(z_0) &= \mu_r(f, z_0) && \text{para todo } r \in (0, R]. \end{aligned}$$

Definimos la función $g(z) := \operatorname{Re} f(z) - f(z_0)$, la cual también tiene la propiedad del promedio. Además se cumple que

$$g(z) \leq |f(z)| - f(z_0) \leq 0 \quad \text{para todo } z \in D_R(z_0)$$

y $g(z_0) = 0$. Si $r \in (0, R]$, entonces

$$0 = g(z_0) = \mu_r(g, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it}) dt.$$

Como el integrando es continuo en $[0, 2\pi]$ y siempre no positivo, se sigue que $g(z_0 + re^{it}) = 0$ para $t \in [0, 2\pi]$. Como $r \in (0, R]$ era arbitrario, obtenemos $g \equiv 0$ en $D_R(z_0)$. Por la definición de g esto implica que $\operatorname{Re} f \equiv f(z_0)$ en $D_R(z_0)$. Las desigualdades

$$|f| \leq f(z_0) \equiv \operatorname{Re} f \leq |f|,$$

implican que $|f| \equiv \operatorname{Re} f$ y luego que $f \equiv \operatorname{Re} f \equiv f(z_0)$ en $D_R(z_0)$. \square

3.5.5 Teorema. *Sean G una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función con la propiedad del promedio. Si $|f|$ alcanza un máximo global en $z_0 \in G$, entonces f es constante. Si G es acotado y f continua en \bar{G} , entonces $|f|$ alcanza su máximo sobre \bar{G} en ∂G .*

Demostración. Sean $f(z_0) = c$ y $M := f^{-1}(c)$. Entonces M es relativamente cerrado en G y no vacío. Para cualquier $z_1 \in M$ se cumple que z_1 es un máximo local de f , así que $f \equiv c$ en una vecindad de z_1 , por el Teorema 3.5.4. Eso implica que $z_1 \in \operatorname{int} M$. Como $z_1 \in M$ era arbitrario, obtenemos que M es abierto. Como G es conexo, $M = G$, es decir, f es constante. La segunda afirmación es una consecuencia sencilla de la primera. \square

3.5.6 Nota. Es un ejercicio sencillo comprobar principios del máximo para funciones reales con la propiedad del promedio, análogos al Teorema 3.5.4 y al Teorema 3.5.5. En esto, veremos más adelante que en verdad un máximo local interior es suficiente en el Teorema 3.5.5 para funciones reales.

3.6. Funciones enteras y polinomios

Recordemos que las funciones enteras son las que son definidas y holomorfas en todo \mathbb{C} . Una función entera es desarrollable en cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ en una serie de potencias con radio de convergencia ∞ . Polinomios son funciones enteras. Una función entera que no es un polinomio se llama una función *trascendente*. Investigaremos aquí el comportamiento de funciones enteras para $|z|$ grande.

Mostremos primero que la potencia más grande de un polinomio domina el comportamiento del mismo.

3.6.1 Teorema. *Sea $p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polinomio del grado n . Entonces se cumple*

$$(3.6.1) \quad |p(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) |z|^n \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus D_1(0).$$

Además existe, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, un $\rho_\varepsilon \geq 1$ tal que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_{\rho_\varepsilon}(0)$ se cumple

$$(3.6.2) \quad (1 - \varepsilon)|a_n| |z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n| |z|^n.$$

Demostración. La desigualdad (3.6.1) es una consecuencia directa de la desigualdad del triángulo, usando $|z| \geq 1$:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) |z|^n.$$

Definimos

$$\tilde{p}(z) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

así que

$$p(z) = \tilde{p}(z) + a_n z^n.$$

Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Como $a_n \neq 0$, podemos definir

$$\rho_\varepsilon := \max \left\{ 1, \frac{1}{\varepsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\}.$$

En consecuencia, con (3.6.1) se sigue para $|z| \geq \rho_\varepsilon$ que

$$|\tilde{p}(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1} = \frac{1}{|z|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^n \leq \varepsilon |a_n| |z|^n,$$

y luego que

$$(1 - \varepsilon)|a_n| |z|^n \leq |a_n| |z|^n - |\tilde{p}(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n| |z|^n + |\tilde{p}(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n| |z|^n. \quad \square$$

3.6.2 Nota. La demostración del Teorema 3.6.1 muestra (dejando $\varepsilon \rightarrow 1$) que todos los ceros del polinomio están contenidos en el disco cerrado

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\} \right\}.$$

3.6.3 Teorema (Teorema fundamental del Álgebra). *Todo polinomio no constante complejo tiene un cero en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio del grado $n \geq 1$. En el Teorema 3.6.1 escogemos $\varepsilon = 1/2$ y $R \geq \max\{1, \rho_\varepsilon\}$ tan grande que $|p(0)| < |a_n|R^n/2$ es cierto. Entonces $|p(0)| < \min_{|z|=R} |p(z)|$, así que el principio del mínimo (Teorema 3.4.9) implica que p tiene un cero en $D_R(0)$. \square

Mostremos ahora la inversión del Teorema 3.6.1, la cual nos proporcionará otra demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

3.6.4 Teorema. *Sea f una función entera. Si existen $n \in \mathbb{N}$ y $M, R > 0$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0)$, entonces f es un polinomio del grado a lo más n .*

Demostración. Consideremos la serie de Taylor de f en 0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Por las desigualdades de Cauchy (3.4.3) tenemos para $r \geq R$ que

$$|a_k| \leq r^{-k} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-k} M r^n.$$

Para $k > n$ dejamos tender $r \rightarrow \infty$ en esta desigualdad y obtenemos $a_k = 0$, es decir, f es un polinomio del grado a lo más n . \square

Un caso particular ($n = 0$) está tan usado que lo formulamos a parte:

3.6.5 Teorema (Liouville). *Una función entera y acotada es constante.*

El Teorema de Liouville nos proporciona otra demostración del Teorema Fundamental del Álgebra: si $p(z)$ es un polinomio sin ceros en \mathbb{C} , entonces la función $f := 1/p$ también es entera. Nuevamente por el Teorema 3.6.1 existen $M, R > 0$ tales que $|p(z)| \geq M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0)$. Aquí n es el grado de p . Esto implica que f es acotada en $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$. Por otro lado, f también es acotada en $\overline{D}_R(0)$, ya que es continua en ese conjunto compacto. Por el Teorema de Liouville f es constante y así p también lo es.

Nótese que todos estos resultados últimamente son consecuencias de las desigualdades de Cauchy.

El Teorema fundamental del Álgebra implica la representación de polinomios por un producto de factores lineales, aplicando la Proposición 3.3.6(III) y división en el anillo de polinomios:

3.6.6 Teorema. Sea $p(z)$ un polinomio del grado $n \geq 1$. Los ceros de p sean denotados por b_1, b_2, \dots, b_k , y sus multiplicidades respectivas por m_1, m_2, \dots, m_k . Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$p(z) = c \prod_{\ell=1}^k (z - b_\ell)^{m_\ell}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Una consecuencia es que p asume cada $w \in \mathbb{C}$ precisamente n veces, contados con las multiplicidades. Esto es porque los puntos en $p^{-1}(w)$ son los ceros del polinomio $p - w$.

En los resultados anteriores vimos que son precisamente los polinomios que crecen a lo más como una potencia de $|z|$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Por otro lado, las funciones trascendentes tienen un comportamiento mucho menos controlado. Recordemos, por ejemplo, que la exponencial es una biyección de la tira

$$\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$$

con \mathbb{C} para cualquier $a \in \mathbb{R}$, así que todo elemento de \mathbb{C} está asumido por \exp infinitas veces. En general podemos mostrar por el momento:

3.6.7 Teorema. Sea f una función entera trascendente. Entonces $f(\mathbb{C} \setminus D_R)$ es denso en \mathbb{C} para todo $R > 0$.

En otras palabras, para cada $w_0 \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $(z_k) \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_k) \rightarrow w_0$ y $|z_k| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. Por contradicción supongamos que existen $w_0 \in \mathbb{C}$, $R \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(\mathbb{C} \setminus D_R) \subseteq \mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(w_0)$. Como f no es constante, f sólo tiene un número finito de puntos w_0 en $\overline{D}_R(0)$, denotados por b_1, b_2, \dots, b_k con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_k . Por la fórmula

$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{\prod_{\ell=1}^k (z - b_\ell)^{m_\ell}}$$

definimos una función entera sin ceros. Aquí usamos la representación de ceros dada en la Proposición 3.3.6(III). En seguida, también $1/g$ es una función entera. Por el Teorema 3.6.1 tenemos que

$$\left| \prod_{\ell=1}^k (z - b_\ell)^{m_\ell} \right| \leq C_1 |z|^n,$$

con una constante $C_1 > 0$ y $n := m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Como además $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$ para $|z| \geq R$, obtenemos

$$\left| \frac{1}{g(z)} \right| \leq C_2 |z|^n \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0).$$

Aquí $C_2 > 0$ es otra constante. Por el Teorema 3.6.4 $1/g$ es un polinomio. Como $1/g$ no tiene ceros, $1/g$ y así también g son funciones constantes, $g \equiv c \in \mathbb{C}$. Esto implica por la definición de g que

$$f(z) = w_0 + c \prod_{\ell=1}^k (z - b_\ell)^{m_\ell}$$

es un polinomio, una contradicción. \square

Una consecuencia inmediata es un resultado análogo al Teorema 3.6.4:

3.6.8 Teorema. *Sea f una función entera. Si existen $n \in \mathbb{N}$ y $M, R > 0$ tales que $|f(z)| \geq M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_R(0)$, entonces f es un polinomio del grado al menos n .*

Demostración. Para $z \in \mathbb{C} \setminus D_R$ se cumple que $|f(z)| \geq MR^n$. Entonces $0 \notin \overline{f(\mathbb{C} \setminus D_R)}$. Por el Teorema 3.6.7 f es un polinomio del grado m . El Teorema 3.6.1 implica que

$$M|z|^n \leq |f(z)| \leq M_1|z|^m$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D_{R_1}$ con un $R_1 \geq R$. Por consiguiente,

$$|z|^{n-m} \leq M_1/M$$

cuando $|z| \rightarrow \infty$, es decir, $m \geq n$. \square

3.7. Funciones realmente analíticas

A las funciones holomorfas también las llamamos (complejamente) analíticas. Para el análisis real existe una noción análoga: sean $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ infinitas veces realmente diferenciable. Si f tiene en cada $x_0 \in U$ una serie de Taylor con radio de convergencia positivo, y si f coincide con las funciones límite de su series de Taylor, entonces f es *realmente analítica*.

En la sección 1.5 vimos que algunas de la funciones realmente analíticas elementales tienen extensiones a funciones holomorfas en subconjuntos abiertos de \mathbb{C} . Introduzcamos ese procedimiento para el caso general:

3.7.1 Definición. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una *extensión holomorfa* de f es una función holomorfa $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que se cumple $I \subseteq U$ y $F|_I = f$.

Polinomios reales y funciones racionales reales tienen extensiones holomorfas inmediatas, simplemente reemplazando a x por z .

Si f tiene una extensión holomorfa F , ella tiene un desarrollo en su serie de Taylor en un $x_0 \in I$. Además, f es infinitas veces diferenciable, y las derivadas de f en x_0 coinciden con las de F . Entonces las series de Taylor de f y F también coinciden en x_0 . Eso muestra que f necesariamente es realmente analítica. Veremos que esa condición es suficiente para la existencia de extensiones holomorfas:

3.7.2 Teorema. Sean I un intervalo abierto y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f tiene una extensión holomorfa si y sólo si f es realmente analítica.

Demostración. Para $x \in I$ sea $r_x > 0$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en x . En el disco $U_x := D_{r_x}(x) \subseteq \mathbb{C}$ definimos la función holomorfa F_x por

$$F_x(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (z-x)^k.$$

Si para $x_1, x_2 \in I$ la intersección $U_{x_1} \cap U_{x_2}$ no es vacía, entonces contiene un subintervalo abierto J no vacío de I . Para $x \in J$ se tiene que $F_{x_1}(x) = f(x) = F_{x_2}(x)$. Por el Teorema 3.3.8 F_{x_1} y F_{x_2} coinciden en $U_{x_1} \cap U_{x_2}$. Eso nos permite definir en $U := \bigcup_{x \in I} U_x$ una extensión holomorfa F de f mediante

$$F(z) := F_x(z) \quad \text{si } z \in U_x. \quad \square$$

Por el Teorema 3.3.8 una función realmente analítica sólo posee a lo más una extensión holomorfa a una región. Por otro lado puede pasar que dos extensiones analíticas de f en abiertos U_1 y U_2 no coinciden en $U_1 \cap U_2$ si esa intersección no es conexa.

3.7.3 Teorema. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es infinitas veces realmente diferenciable. f es realmente analítica si y sólo si para cada $x_0 \in I$ existen constantes $K, \delta > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ se cumple que

$$(3.7.1) \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \cdot \delta^n \leq K.$$

Demostración. Sean $x_0 \in I$ y $K, \delta > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ se cumple (3.7.1). Fijamos tal x y ponemos $r := |x - x_0| < \delta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in [0, 1]$ tal que

$$(3.7.2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0 + s_n(x-x_0))}{n!} (x-x_0)^n$$

por el Teorema de Taylor. Como $x_0 + s_n(x-x_0) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la hipótesis implica que

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0 + s_n(x-x_0))}{n!} (x-x_0)^n \right| \leq K \left(\frac{r}{\delta} \right)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Y como $r/\delta < 1$, esto implica junto con (3.7.2) que la serie de Taylor de f converge en x a $f(x)$. Como eso es cierto en una vecindad de x_0 , y como $x_0 \in I$ era arbitrario, f es realmente analítica.

Inversamente sea f realmente analítica. Sean $x_0 \in I$ y $r' > 0$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en x_0 . Sea F la extensión holomorfa de f a $D_{r'}(x_0)$. Escogemos

$\delta \in (0, r'/2)$ y ponemos $r := 2\delta$. Las desigualdades de Cauchy (Teorema 3.4.1) implican que

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \delta^n \leq 2 \max_{\zeta \in D_r(x_0)} |F(\zeta)|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D_\delta(x_0)$. □

Nótese que en el último teorema utilizamos resultados del análisis complejo (las desigualdades de Cauchy) para demostrar un resultado del análisis real.

3.8. Funciones armónicas

En esta sección estudiaremos las partes reales y imaginarias de funciones holomorfas. Recordemos que una función holomorfa cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0,$$

ya que f es realmente diferenciable infinitas veces. Esto es una consecuencia de las reglas de diferenciación al final de la sección 1.3. Repetimos la calculación explícitamente: si $f = u + iv$ con funciones reales u y v , entonces calculamos con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Similarmente obtenemos

$$v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

Definimos el *Laplaciano*, un operador diferencial dado por

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es *armónica* en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ si es dos veces real y continuamente diferenciable y satisface la ecuación diferencial parcial

$$\Delta f = 0$$

en U . Como el Laplaciano cumple $\Delta \bar{f} = \overline{\Delta f}$, una función $f = u + iv$ con u, v funciones reales es armónica si y sólo si u y v lo son. Como el Laplaciano es un operador \mathbb{C} -lineal, el conjunto de las funciones armónicas en U es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Incluye las funciones constantes.

Ya demostramos arriba que

3.8.1 Teorema. *Funciones holomorfas y sus partes reales y imaginarias son funciones armónicas.*

Inversamente tenemos

3.8.2 Teorema. *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto y convexo. Entonces cada función real armónica en G es parte real de una función holomorfa, y parte imaginaria de otra función holomorfa.*

Demostración. Sea $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ armónica. El campo vectorial

$$V := \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$

satisface $(-u_y)_y = -u_{yy} = u_{xx} = (u_x)_x$ en G , es decir, V es el gradiente de una función $v: G \rightarrow \mathbb{R}$ que es dos veces real y continuamente diferenciable. Ya que $v_x = -u_y$ y $v_y = u_x$, la función $f := u + iv$ es holomorfa. Además, la función $g := if$ es holomorfa y tiene la parte imaginaria u . \square

3.8.3 Corolario. *Una función real armónica en un subconjunto abierto U de \mathbb{C} es infinitas veces realmente diferenciable.*

Demostración. Si $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, $z_0 \in \mathbb{C}$, y si $r > 0$ es tal que $D := D_r(z_0) \subseteq U$, entonces u es la parte real de una función holomorfa f definida en D , por el Teorema 3.8.2. Esto implica que f y por tanto también u son infinitas veces realmente diferenciables en D . \square

3.8.4 Teorema (Teorema de Identidad para funciones armónicas). *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Si existe un subconjunto abierto y no vacío U de G tal que $u|_U \equiv 0$, entonces $u \equiv 0$ en G .*

Demostración. Definimos el conjunto

$$V := \{z \in G \mid u \equiv 0 \text{ en una vecindad de } z\}.$$

Como $U \subseteq V$, $V \neq \emptyset$. Obviamente V es abierto. Mostremos que V es relativamente cerrado en G . Sea $z_0 \in \overline{V} \cap G$ (esta es la cerradura de V en G). Existen un disco $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ y, por el Teorema 3.8.2, una función holomorfa f en D tales que u es la parte real de f en D . El conjunto $D \cap V$ es abierto y no vacío. Sea entonces $z_1 \in V \cap D$. La parte real u de f se anula en una vecindad de z_1 en D . Por el Teorema 3.4.7 f es constante en D , es decir, $u \equiv 0$ en D . Eso implica que $z_0 \in V$. Como $z_0 \in \overline{V} \cap G$ era arbitrario, obtenemos que $\overline{V} \cap G = V$, es decir, que V es relativamente cerrado en G . Como G es conexo, $V = G$. \square

Nótese que el Teorema anterior permite que una función armónica se anule en un conjunto no discreto sin que la función necesariamente sea constante. Por ejemplo, la función $\operatorname{Re} z$ es armónica en \mathbb{C} , no constante, y se anula en el conjunto no discreto $i\mathbb{R}$. El Teorema de Identidad para funciones armónicas es menos fuerte que el para funciones holomorfas.

Una consecuencia inmediata de Teorema 3.8.2, Teorema 3.5.2 y Teorema 3.5.3 es el

3.8.5 Teorema. *Funciones armónicas tienen la propiedad del promedio.*

3.8.6 Teorema (Principio del Máximo y del Mínimo para funciones armónicas). Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica.

- (a) Si u alcanza un máximo (mínimo) local en $z_0 \in G$, entonces u es constante.
- (b) Si G es acotado y u continua en \overline{G} , entonces u alcanza su máximo (mínimo) sobre \overline{G} en ∂G .

Demostración. Si u tiene un máximo local en $z_0 \in G$, Teorema 3.8.5, Teorema 3.5.4 y Nota 3.5.6 implican que u es constante en una vecindad de z_0 . Por el Teorema 3.8.4 u es constante en G . La afirmación para el mínimo se sigue aplicando la anterior a la función $-u$. El inciso (b) es una consecuencia sencilla de estos hechos. \square

Por el Teorema 3.8.2 las funciones reales armónicas determinan las funciones holomorfas, módulo una constante. Esta es la razón para también estudiar las funciones armónicas en el análisis complejo. En el resto de esta sección desarrollaremos una Fórmula de Cauchy real para funciones armónicas reales y veremos consecuencias de ella, por ejemplo una caracterización de las funciones armónicas como las funciones reales que tienen la propiedad del promedio. El problema de Dirichlet, que estudiaremos en esto, es un punto de partida para el campo de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, mostrando nuevamente la conexión del análisis complejo con muchos otros campos de las matemáticas.

Mostremos una variante de la fórmula de Cauchy que conmuta con las proyecciones a las partes reales y imaginarias:

3.8.7 Teorema. Sean $R > 0$ y f holomorfa en una vecindad de \overline{D}_R . Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt \quad \text{para todo } z \in D_R.$$

Demostración. Por la fórmula de Cauchy tenemos, para $z \in D_R$, la expresión

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z} Rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})R}{R - e^{-it}z} dt.$$

Apliquemos esta fórmula a la función $w \mapsto f(w)/(R^2 - \bar{z}w)$, la cual es holomorfa en una vecindad de \overline{D}_R , en el punto $w = z$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})R}{(R^2 - Re^{it}\bar{z})(R - e^{-it}z)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{|R - e^{-it}z|^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{|Re^{it} - z|^2} dt, \end{aligned}$$

es decir, la afirmación. \square

3.8.8 Definición. La función

$$P(\zeta, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

se llama el *Kernel de Poisson*.

3.8.9 Teorema (Fórmula Integral de Poisson). *Si $u: \overline{D}_R \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y armónica en D_R , entonces*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(Re^{it})P(Re^{it}, z) dt \quad \text{para todo } z \in D_R.$$

Demostración. Supongamos primero que u sea armónica en una vecindad convexa U de \overline{D}_R . Entonces u es la parte real de una función holomorfa f en U que tiene la representación

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(Re^{it})P(Re^{it}, z) dt \quad \text{para todo } z \in D_R,$$

por el Teorema 3.8.7. Como P es una función real, basta tomar la parte real en esta identidad para obtener la representación de Poisson para u .

Sea ahora u como en la afirmación. Definimos una sucesión de funciones por

$$u_k(z) := u\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)z\right) \quad \text{para } z \in D_{Rk/(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Entonces cada función u_k es armónica en la vecindad $D_{Rk/(k-1)}$ de \overline{D}_R , así que

$$(3.8.1) \quad u_k(z) = \int_0^{2\pi} u_k(Re^{it})P(Re^{it}, z) dt \quad \text{para todo } z \in D_R.$$

Fijamos $z \in D_R$. Como u es uniformemente continua en \overline{D}_R , la sucesión (u_k) converge uniformemente en \overline{D}_R a la función límite u . Por el Teorema 2.3.1 la afirmación se sigue de (3.8.1). \square

3.8.10 Nota. El Kernel de Poisson tiene, para $R > 0$, $\zeta \in S_R$ y $z \in D_R$, las propiedades $P(\zeta, z) > 0$ y

$$(3.8.2) \quad \int_0^{2\pi} P(Re^{it}, z) dt = 1.$$

La última identidad es una consecuencia del Teorema 3.8.9, aplicado a la función armónica constante 1. En seguida, la Fórmula Integral de Poisson dice que el valor de una función armónica en un punto z en el interior de un disco es un promedio de los valores en la frontera, con un peso que depende de z .

3.8.11 Teorema. Sea $h: S_R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la función

$$u(z) := \begin{cases} \int_0^{2\pi} h(Re^{it})P(Re^{it}, z) dt, & z \in D_R, \\ h(z), & z \in S_R, \end{cases}$$

es continua en \overline{D}_R y armónica en D_R .

Demostración. Para $\zeta \in S_R$ fijo y $z \in D_R$ tenemos que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = P(\zeta, z).$$

Entonces $P(\zeta, z)$ es la parte real de la función holomorfa (en z)

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z},$$

es decir, $P(\zeta, \cdot)$ es armónica en D_R . En la definición de u podemos derivar bajo la integral y obtenemos $\Delta u \equiv 0$ en D_R .

Para mostrar la continuidad sea $z_0 = Re^{it_0} \in S_R$ fijo. Para simplificar la demostración, sólo tratamos el caso de $t_0 \in (0, 2\pi)$. El caso $t_0 = 0$ tiene la misma prueba, con notación modificada. Sea $\varepsilon > 0$. Fijamos $\delta_0 > 0$ tan chico que

$$J := [t_0 - 2\delta_0, t_0 + 2\delta_0] \subseteq [0, 2\pi]$$

y

$$(3.8.3) \quad |h(Re^{it}) - h(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } t \in J.$$

Definimos además el sector

$$\Sigma := \{re^{it} \mid r \in [0, R), t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]\} \subseteq D_R.$$

Fijamos $c > 0$ tal que

$$|Re^{it} - z| \geq c \quad \text{para todo } z \in \Sigma, t \in M := [0, 2\pi] \setminus J.$$

Si $z \in \Sigma$, entonces por (3.8.2)

$$\begin{aligned} u(z) - u(z_0) &= \int_0^{2\pi} (h(Re^{it}) - h(z_0))P(Re^{it}, z) dt \\ &= \int_J (h(Re^{it}) - h(z_0))P(Re^{it}, z) dt + \int_M (h(Re^{it}) - h(z_0))P(Re^{it}, z) dt \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estimamos, usando (3.8.2), $P \geq 0$ y (3.8.3)

$$|I_1| \leq \int_J |h(Re^{it}) - h(z_0)| P(Re^{it}, z) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} P(Re^{it}, z) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, con $K := \max|h|$ estimamos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_M (|h(Re^{it})| + |h(z_0)|) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt \\ &\leq \frac{K}{\pi c^2} \int_0^{2\pi} (R^2 - |z|^2) dt \\ &= \frac{2K}{c^2} (R^2 - |z|^2). \end{aligned}$$

Fijamos $\delta > 0$ tal que

$$\forall z \in D_\delta(z_0) \cap D_R: \quad z \in \Sigma \quad \text{y} \quad R^2 - |z|^2 \leq \frac{c^2 \varepsilon}{4K}.$$

Esto es posible ya que $z_0 \in S_R$ y $z_0 = Re^{it_0}$, donde t_0 es el centro de J . Se sigue que si $z \in D_\delta(z_0) \cap D_R$, entonces

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y luego $|u(z) - u(z_0)| \leq \varepsilon$. Para $z \in D_\delta(z_0) \cap S_R$ tenemos que $z = Re^{it}$ con $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subseteq J$, es decir, $|u(z) - u(z_0)| = |h(z) - h(z_0)| \leq \varepsilon/2$, por la definición de J . Eso muestra que $|u(z) - u(z_0)| \leq \varepsilon$ siempre cuando $z \in \overline{D}_R$ cumple $|z - z_0| \leq \delta$. Como $\varepsilon > 0$ y $z_0 \in S_R$ eran arbitrarios, eso muestra la continuidad de u en \overline{D}_R . \square

En el Teorema anterior resolvimos el caso particular del disco para el *Problema de Dirichlet*: si $G \subseteq \mathbb{C}$ es una región y $h: \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, encontrar una función continua $u: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u es armónica en G y tal que $u|_{\partial G} = h$. Si existe una solución para el problema de Dirichlet, ella siempre es la única:

3.8.12 Teorema. *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región acotada. Entonces existe a lo más una solución de un problema de Dirichlet en G .*

Demostración. Sean $h: \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y u, v dos soluciones del problema de Dirichlet asociado. Entonces $u - v$ es continua en \overline{G} , armónica en G y se anula en ∂G . Por el Teorema 3.8.6 $u - v$ asume su mínimo y su máximo en ∂G , es decir, $u - v \equiv 0$ en \overline{G} . \square

3.8.13 Teorema. *Una función es armónica si y sólo si tiene la propiedad del promedio.*

Demostración. Que una función armónica tiene la propiedad del promedio se demostró en el Teorema 3.8.5. Inversamente, sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función con la propiedad del promedio. Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $D := D_r(z_0) \subset\subset U$. Entonces existe una función continua $v: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que es armónica en D y cumple $v|_{\partial D} = u|_{\partial D}$, por el Teorema 3.8.11. Por el Teorema 3.8.5 la función $u - v$ también tiene la propiedad del promedio, y se anula en ∂D . El Teorema 3.5.5 implica que $u - v$ alcanza su máximo y su mínimo en ∂D , es decir, $u \equiv v$ en \bar{D} y u es armónica en D . Como $z_0 \in U$ era arbitrario, u es armónica en U . \square

3.8.14 Nota. La combinación del Teorema 3.8.13 con el Teorema 3.8.6 mejora el Teorema 3.5.4: si una función real con la propiedad del promedio tiene un máximo o mínimo local en una región, entonces es constante en ella.

3.9. Extensión por reflexión

Mostraremos aquí que una función armónica o holomorfa puede ser extendida al otro lado de la frontera de su dominio si la frontera es suficientemente regular y si la función se comporta bien cerca de la frontera.

Denotaremos en esta sección para $A \subseteq \mathbb{C}$

$$A^\pm := \{z \in A \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Recordemos que el operador de conjugación es un operador real lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , la reflexión en $\mathbb{R} \times \{0\}$. Decimos que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es *simétrico respecto a* (reflexión en) \mathbb{R} si

$$\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in A\} = A.$$

3.9.1 Teorema (Principio de reflexión de Schwarz para funciones armónicas). *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región simétrica respecto a \mathbb{R} y sea $v: G^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica tal que*

$$(3.9.1) \quad \lim_{\substack{\operatorname{dist}(z, \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ z \in G^+}} v(z) = 0.$$

Entonces existe una y sólo una extensión armónica \hat{v} de v a G . Ella tiene las propiedades

$$(3.9.2) \quad \hat{v}(z) = -v(\bar{z}) \quad \text{para todo } z \in G^-$$

y

$$(3.9.3) \quad \hat{v}(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in G \cap \mathbb{R}.$$

Demostración. Definimos la función $\hat{v}: G \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\hat{v}(z) := \begin{cases} v(z), & z \in G^+, \\ 0, & z \in G \cap \mathbb{R}, \\ -v(\bar{z}), & z \in G^-. \end{cases}$$

Por (3.9.1) \hat{v} es continua. Es fácil ver que \hat{v} es armónica en G^- , así que \hat{v} tiene la propiedad del promedio en $G \setminus \mathbb{R}$, por el Teorema 3.8.5. Si $z_0 \in G \cap \mathbb{R}$, sea $R > 0$ tan pequeño que $\overline{D}_R(z_0) \subseteq G$. Para cualquier $r \in (0, R]$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{v}(z_0 + re^{it}) dt &= \int_0^\pi \hat{v}(z_0 + re^{it}) dt + \int_\pi^{2\pi} \hat{v}(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \int_0^\pi v(z_0 + re^{it}) dt - \int_\pi^{2\pi} v(z_0 + re^{-it}) dt \\ &= \int_0^\pi v(z_0 + re^{it}) dt - \int_{-2\pi}^{-\pi} v(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \int_0^\pi v(z_0 + re^{it}) dt - \int_0^\pi v(z_0 + re^{it}) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \hat{v} tiene la propiedad del promedio en todo G , y el Teorema 3.8.13 implica que \hat{v} es armónica en G . Por el Teorema 3.8.4 la función es la única extensión armónica de v a G . \square

3.9.2 Nota. Si $G \subseteq \mathbb{C}$ es una región simétrica respecto a \mathbb{R} y $v: G^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función infinitas veces diferenciable tal que (3.9.1) se cumple, la extensión continua definida por \hat{v} como en el Teorema 3.9.1 en general no es diferenciable en $G \cap \mathbb{R}$. Por ello es sorprendente que en caso de una función armónica la extensión por reflexión da una función infinitas veces diferenciable (vea el Corolario 3.8.3).

3.9.3 Teorema (Principio de reflexión de Schwarz para funciones holomorfas). *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región simétrica respecto a \mathbb{R} y sea $f: G^+ \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que*

$$(3.9.4) \quad \lim_{\substack{\text{dist}(z, \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ z \in G^+}} \text{Im } f(z) = 0.$$

Entonces existe una y sólo una extensión holomorfa \hat{f} de f a G . Ella tiene las propiedades

$$(3.9.5) \quad \hat{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{para todo } z \in G^-$$

y

$$(3.9.6) \quad \text{Im } \hat{f}(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in G \cap \mathbb{R}.$$

Demostración. Primero mostramos que cualquier extensión holomorfa g de f a G cumple que

$$(3.9.7) \quad g(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{para todo } z \in G^-.$$

Definimos $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi(z) := \bar{z}$ y $h(z) := \overline{g(\bar{z})}$ para $z \in G$, así que $h = \bar{g} \circ \varphi$. Usando las fórmulas sobre las derivadas de Wirtinger obtenemos

$$(3.9.8) \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{w}}}_{=0} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}}_{=0} = 0,$$

es decir, h es una función holomorfa en G . Notamos que g y h coinciden en el subconjunto no discreto $G \cap \mathbb{R}$ de G ya que g , siendo una extensión continua de f , necesariamente es real allá. Como también g es holomorfa, $g \equiv h$ en G , por el Teorema 3.3.8. Eso demuestra (3.9.7).

Sea $f = u + iv$ con funciones $u, v: G^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Primero fijamos $z_0 \in G \cap \mathbb{R}$ y $R > 0$ tal que $D := D_R(z_0) \subseteq G$. Por el Teorema 3.9.1 existe una extensión armónica $\hat{v}: D \rightarrow \mathbb{R}$ de $v|_{D^+}$. Sea $\hat{u}: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica tal que $\tilde{g} := \hat{u} + i\hat{v}$ es holomorfa en D . Ella existe según el Teorema 3.8.2. Como $\text{Im}(f - \tilde{g}) \equiv 0$ en D^+ , el Teorema 3.4.7 implica que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv \tilde{g} + C$ en D^+ . En seguida, $g := \tilde{g} + C$ es una extensión holomorfa de $f|_{D^+}$ a D . En particular, $\text{Im} g \equiv 0$ en $D \cap \mathbb{R}$ y existe el límite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^+}} u(z)$$

para todo $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$. Más aún, aplicando lo de arriba, se cumple (3.9.7), reemplazando G por D .

Lo anterior nos permite definir la extensión $\hat{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in G^+, \\ \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in G^+}} f(w), & z \in G \cap \mathbb{R}, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in G^-. \end{cases}$$

Como en (3.9.8) resulta que \hat{f} es holomorfa en $G \setminus \mathbb{R}$. Y para $z_0 \in G \cap \mathbb{R}$ ya mostramos que \hat{f} coincide con una extensión holomorfa de f a una vecindad de z_0 . Por ello \hat{f} es una extensión holomorfa de f a G que cumple (3.9.5) y (3.9.6). \square

El principio de reflexión de Schwarz se puede aplicar más generalmente para extender una función holomorfa al otro lado de ciertos conjuntos suaves.

3.9.4 Definición. Un *arco analítico* es un subconjunto conexo K de \mathbb{C} tal que cada punto $z_0 \in K$ tiene una vecindad abierta V tal que existen un disco D , simétrico con respecto a \mathbb{R} , y una función biholomorfa φ entre D y V tales que $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = V \cap K$. Una vecindad V de z_0 con estas propiedades se llama una *vecindad admisible*. Un arco analítico K es *global* si existen una región $G \subseteq \mathbb{C}$, simétrica con respecto a \mathbb{R} , un intervalo abierto $I \subseteq G \cap \mathbb{R}$, una función biholomorfa $\psi: G \rightarrow \psi(G)$ tal que ψ^{-1} es uniformemente continua y tal que $K = \psi(I)$, y $\varepsilon > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, K) < \varepsilon\} \subseteq \psi(G)$.

Si V es una vecindad admisible de un punto z_0 en un arco analítico K , las dos componentes de $V \setminus K$ se llaman los *lados de la vecindad admisible* V . Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y si $K \subseteq \partial U$ entonces K *está a un lado de* ∂U si cada vecindad admisible tiene sólo un lado contenido en U . Si además $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces decimos que f *tiene una extensión holomorfa a través de* K si existe un conjunto abierto W tal que $W \cap \partial U = K$ y tal que f tiene una extensión holomorfa a $U \cup W$.

3.9.5 Teorema. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $K \subseteq \partial U$ un arco analítico que está a un lado de ∂U . Supongamos además que para cada $z_0 \in K$ existen una vecindad admisible V de z_0 y un arco analítico global L tal que

$$(3.9.9) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow K \\ z \in V}} \text{dist}(f(z), L) = 0.$$

Entonces f tiene una extensión analítica a través de K .

Demostración. Primero mostraremos la existencia de extensiones locales. Para ello sean $z_0 \in K$, V una vecindad admisible de z_0 y L un arco analítico global tal que (5.1.1) se cumple. Existen un disco D y una región G en \mathbb{C} que son simétricos con respecto a \mathbb{R} , un intervalo abierto $I \subseteq G \cap \mathbb{R}$ y mapeos biholomorfos $\varphi: D \rightarrow V$ y $\psi: G \rightarrow G'$ tales que $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = V \cap K$ y $\psi(I) = L$. Tomando D lo suficientemente chico podemos suponer que $f(V \cap U) \subseteq G'$ y que φ es uniformemente continua. Sin pérdida de generalidad $\varphi(D^+) \subseteq U$ y $\varphi(D^-) \cap U = \emptyset$.

Consideremos la función holomorfa $g: D^+ \rightarrow G^+$ dada por $g := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Por las propiedades de φ , f y ψ^{-1} resulta que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \mathbb{R} \\ z \in D^+}} \text{Im } g(z) = 0.$$

Por el Teorema 3.9.3 existe una extensión holomorfa \hat{g} de g a todo D tal que $f(D) \subseteq G$. Entonces la función $\hat{f} := \psi \circ \hat{g} \circ \varphi^{-1}$ es una extensión holomorfa de f a V .

Podemos pegar las extensiones holomorfas locales de f a una extensión global a través de K usando el teorema de identidad. \square

4 El teorema de Cauchy global

En esta sección extenderemos el teorema y las fórmulas de Cauchy para discos a cadenas de caminos en conjuntos abiertos. La condición para que estos resultados sean ciertos es informalmente que los giros que la cadena tiene alrededor de un hoyo en el conjunto se suman a cero. Para exactamente formular este hecho introduciremos una herramienta que mide el número de giros de una cadena respecto a un punto.

4.1. El número de giros

Consideremos el lazo $\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\gamma_n(t) := e^{int}$. Si $n \in \mathbb{N}$ la dirección es positiva, y en un sentido intuitivo ese camino hace n giros alrededor de cada punto en D_1 , y ningún giro alrededor de un punto en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_1$. Si $n \in \mathbb{Z}$ es negativa, entonces γ_n hace $|n|$ giros alrededor de cada punto en D_1 , en dirección negativa. En otras palabras, también en este caso γ_n gira n veces alrededor de cada punto en D_1 .

Definiremos ese número de giros para lazos generales, y además para cadenas de lazos. Necesitamos averiguar esa noción con más cuidado. Para ello, denotaremos el punto inicial de un lazo γ por $\alpha(\gamma)$ y el punto final de γ por $\omega(\gamma)$.

4.1.1 Definición. Una cadena $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_\ell \gamma_\ell$ se llama *cerrada* o un *ciclo* si todo punto $z \in \mathbb{C}$ es el punto inicial de uno de los γ_ℓ tantas veces como es el punto final de uno de los γ_ℓ , tomando en cuenta las multiplicidades n_ℓ . Formalmente la condición es

$$\sum_{\ell: z=\alpha(\gamma_\ell)} n_\ell = \sum_{\ell: z=\omega(\gamma_\ell)} n_\ell \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Notamos que los ciclos forman un subgrupo de todas las cadenas en un conjunto fijo U .

4.1.2 Ejemplo. (a) Cada lazo y cada combinación lineal de lazos es un ciclo. Particularmente, la cadena de la frontera con orientación positiva de un conjunto abierto es un ciclo.

(b) Si γ es un camino de integración, entonces $\gamma + \gamma^{-1}$ es un ciclo.

(c) Si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ son caminos pegables cuyo pegado es un lazo (es decir, $\omega(\gamma_{\ell-1}) = \alpha(\gamma_\ell)$ para $\ell = 2, 3, \dots, k$ y $\alpha(\gamma_1) = \omega(\gamma_k)$), entonces la cadena $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ es un ciclo.

Generalizemos los resultados de la sección 2.2:

4.1.3 Teorema. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ continua. La función f tiene una antiderivada si y sólo si

$$(4.1.1) \quad \int_{\Gamma} f = 0 \quad \text{para todo ciclo } \Gamma \text{ en } G.$$

Demostración. Como todo lazo es un ciclo, el Corolario 2.2.3 dice que (4.1.1) implica que f tiene una antiderivada.

Para mostrar la otra implicación, sean F una antiderivada de f y $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_{\ell} \gamma_{\ell}$ un ciclo en G . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f &= \sum_{\ell=1}^k n_{\ell} \int_{\gamma_{\ell}} f \\ &= \sum_{\ell=1}^k n_{\ell} (F(\omega(\gamma_{\ell})) - F(\alpha(\gamma_{\ell}))) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{C}} \left(\sum_{\ell: \omega(\gamma_{\ell})=z} n_{\ell} - \sum_{\ell: \alpha(\gamma_{\ell})=z} n_{\ell} \right) F(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí la suma sobre los $z \in \mathbb{C}$ se toma para aquellos z que son punto inicial o final de un γ_{ℓ} . \square

4.1.4 Definición. Sean Γ un ciclo y $z \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$. Entonces el *numero de giros de Γ alrededor de z* es

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Esta definición no es geométrica, pero es fácilmente manejable en la manipulación de integrales sobre caminos. Más adelante veremos que ese número corresponde con lo que intuitivamente llamaríamos el número de giros.

Una consecuencia inmediata de la definición es que $n(\cdot, z)$ es lineal en el primer argumento:

$$(4.1.2) \quad n(n_1 \Gamma_1 + n_2 \Gamma_2, z) = n_1 n(\Gamma_1, z) + n_2 n(\Gamma_2, z), \quad z \notin \text{tr } \Gamma_1 \cup \text{tr } \Gamma_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

4.1.5 Ejemplo. (a) Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $\gamma(t) := z_0 + re^{imt}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{imre^{imt}}{re^{imt}} dt = m.$$

Si $m = 1$ entonces la fórmula de Cauchy (Teorema 3.2.1) para la función holomorfa constante 1 implica que

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1 \quad \text{para todo } z \in D_r(z_0).$$

Además,

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(z_0),$$

ya que en ese caso la función $1/(\zeta - z)$ es holomorfa en ζ en una vecindad convexa de $\overline{D}_r(z_0)$, y por el teorema de Cauchy en conjuntos convexos (Teorema 3.1.4).

Aquí queda la duda si $n(\gamma, z)$ también será independiente de $z \in D_r(z_0)$ para otros m .

(b) Sea $\Gamma := \kappa(R, z_0) - \kappa(r, z_1)$ tal que $D_r(z_1) \subset\subset D_R(z_0)$, entonces

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & z \in D_R(z_0) \setminus \overline{D}_r(z_1) \\ 0 & z \in D_r(z_1) \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(z_0)). \end{cases}$$

Esto es una consecuencia del inciso (a) y de (4.1.2).

Para que podamos interpretar el número de giro definido arriba como lo que intuitivamente esperamos, al menos tiene que ser un número entero:

4.1.6 Teorema. Sean Γ un ciclo y $z \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$. Entonces $n(\Gamma, z)$ es un número entero.

Demostración. Sea $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_{\ell} \gamma_{\ell}$. Como las integrales sobre caminos no están afectadas por reparametrizaciones, podemos suponer que todos los caminos γ_{ℓ} son parametrizados sobre $[0, 1]$. Definimos $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$(4.1.3) \quad h(t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^k n_{\ell} \int_0^t \frac{\gamma'_{\ell}(s)}{\gamma_{\ell}(s) - z} ds.$$

Entonces $h(0) = 0$ y $h(1) = n(\Gamma, z)$. Mostremos $e^{2\pi i h(1)} = 1$, lo cual implicará la afirmación por los resultados de la sección 1.5.

La función h es continuamente diferenciable a trozos, ya que los integrandos en (4.1.3) son continuos a trozos y la suma es finita. En consecuencia, la función

$$g(t) := e^{-2\pi i h(t)} \prod_{\ell=1}^k (\gamma_{\ell}(t) - z)^{n_{\ell}}$$

es continuamente diferenciable a trozos. Calculamos

$$g'(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_{\ell=1}^k (\gamma_{\ell}(t) - z)^{n_{\ell}} \left(-2\pi i h'(t) + \sum_{j=1}^k \frac{n_j \gamma'_j(t)}{\gamma_j(t) - z} \right) = 0,$$

por la definición de h . En seguida, g es constante en $[0, 1]$ y existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\prod_{\ell=1}^k (\gamma_{\ell}(t) - z)^{n_{\ell}} = c e^{2\pi i h(t)}.$$

Como el lado izquierdo de esta identidad no se anula, $c \neq 0$.

Basta mostrar que

$$(4.1.4) \quad \prod_{\ell=1}^k (\gamma_\ell(0) - z)^{n_\ell} = \prod_{\ell=1}^k (\gamma_\ell(1) - z)^{n_\ell},$$

ya que en ese caso $e^{2\pi i h(1)} = e^{2\pi i h(0)} = 1$. Sea w un punto en \mathbb{C} que es un punto inicial o final de un γ_ℓ . Entonces

$$\sum_{\ell: w=\gamma_\ell(0)} n_\ell = \sum_{\ell: w=\gamma_\ell(1)} n_\ell$$

porque Γ es un ciclo. Pero eso significa que el factor $(w - z)$ aparece el mismo número de veces en los dos productos de (4.1.4). Como eso es cierto para todos puntos iniciales y finales, (4.1.4) es cierto, lo cual termina la demostración. \square

4.1.7 Teorema. *Sea Γ un ciclo. Entonces el número de giros $n(\Gamma, \cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$, y se anula en la componente conexa no acotada.*

Demostración. Sea $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_\ell \gamma_\ell$. La función $z \mapsto n(\Gamma, z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$ ya que el integrando en la definición de $n(\Gamma, \cdot)$ depende continuamente de z . Como $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$, $n(\Gamma, \cdot)$ es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$ (porque cada punto en \mathbb{Z} forma al mismo tiempo un subconjunto abierto y cerrado de \mathbb{Z}).

El conjunto $\text{tr } \Gamma$ es compacto, así que $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$ para $R > 0$ suficientemente grande. Como $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$ es conexo, esto muestra que sólo existe una componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$. Existe una sucesión (z_j) en esa componente tal que $|z_j| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Obtenemos por la desigualdad estándar (2.1.7) que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} |n(\Gamma, z_j)| &\leq \frac{1}{2\pi} L(\Gamma) \lim_{j \rightarrow \infty} \max_{z \in \text{tr } \Gamma} |z - z_j|^{-1} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} L(\Gamma) \lim_{j \rightarrow \infty} (|z_j| - R)^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $n(\Gamma, \cdot)$ es constante en esa componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$, $n(\Gamma, \cdot) \equiv 0$ allí. \square

El último Teorema resuelve la duda del Ejemplo 4.1.5(a). El Ejemplo 4.1.5(b) muestra que también en componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$ se puede anular el número de giro.

4.2. El teorema y las fórmulas de Cauchy globales

Nos liberaremos en esta sección de la restricción de convexidad para el teorema de Cauchy (Teorema 3.1.4). Además mostraremos las fórmulas de Cauchy para ciclos mucho más generales que fronteras de discos, como en las hipótesis del Teorema 3.2.1. Todavía se requiere de una restricción, la cual formularemos en términos del número de giros.

4.2.1 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y Γ un ciclo en U . Decimos que Γ tiene *homología nula en U* o es *homólogo a cero en U* si $n(\Gamma, \cdot)$ se anula en $\mathbb{C} \setminus U$. Decimos que dos ciclos Γ_1 y Γ_2 son homólogos en U si su diferencia es homóloga a cero en U .

Por ejemplo, el ciclo $\kappa(r, 0)$ no es homólogo a cero en $\dot{\mathbb{C}}$ porque $n(\kappa(r, 0), 0) = 1$. Por otro lado, si $r, r' > 0$ entonces el ciclo $\Gamma := \kappa(r, 0) - \kappa(r', 0)$ es homólogo a cero en $\dot{\mathbb{C}}$ ya que $n(\Gamma, 0) = n(\kappa(r, 0), 0) - n(\kappa(r', 0), 0) = 1 - 1 = 0$.

El siguiente es uno de los resultados fundamentales del análisis complejo:

4.2.2 Teorema (Teorema y fórmulas de Cauchy globales). *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, Γ homólogo a cero en U y f holomorfa en U .*

(a) *Se cumple que $\int_{\Gamma} f = 0$.*

(b) *Para todo $z \in U \setminus \text{tr } \Gamma$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$ se cumple que*

$$n(\Gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Demostración. Primero mostremos el inciso (b). En esto nos restringimos al caso $k = 0$, ya que el caso de $k \geq 1$ se sigue por derivación bajo la integral. Demostremos

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{para todo } z \in U \setminus \text{tr } U.$$

Por la definición de $n(\Gamma, z)$, esta afirmación es equivalente a la afirmación

$$(4.2.1) \quad \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{para todo } z \in U \setminus \text{tr } U.$$

La idea para demostrar (4.2.1) es considerar esta integral como una función de z , mostrar que ella tiene una extensión a una función entera h , y mostrar que esa función verifica $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h(z) = 0$. En seguida, el teorema de Liouville (Teorema 3.6.5) implicará que $h \equiv 0$.

Primero consideraremos el integrando como función de ζ y z al mismo tiempo: sea

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z, \end{cases}$$

definido en $U \times U$. Mostremos la continuidad de g . En un punto $(\zeta_0, z_0) \in U \times U$ tal que $\zeta_0 \neq z_0$ la función g está dada por la primera línea de su definición en una vecindad de (ζ_0, z_0) , es decir, g es continua allí. Sea ahora $\zeta_0 = z_0$. Ya sabemos por el Teorema 3.2.2 (lo cual era una consecuencia del Teorema de Cauchy en conjuntos convexos) que f' es una función continua. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ tan chico que $D_{\delta}(z_0) \subset\subset U$ y

$$(4.2.2) \quad |f'(w) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } w \in D_{\delta}(z_0).$$

Analizamos g en $V := D_\delta(z_0) \times D_\delta(z_0)$. Para $(\zeta, z) \in V$

$$(4.2.3) \quad g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0) \quad \text{si } \zeta = z,$$

y

$$(4.2.4) \quad g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) \\ = \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z, \zeta]} (f'(w) - f'(z_0)) dw \quad \text{si } \zeta \neq z.$$

La integral está bien definida ya que el segmento $[z, \zeta]$ está contenido en el conjunto convexo $D_\delta(z_0) \subseteq U$. Se sigue de (4.2.2) en el caso (4.2.3)

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| \leq \varepsilon$$

y en el caso (4.2.4) (usando la desigualdad estándar, Teorema 2.1.6)

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{|\zeta - z|} |\zeta - z| \max_{w \in [z, \zeta]} |f'(w) - f'(z_0)| \leq \varepsilon,$$

siempre cuando $(\zeta, z) \in V$. Esto muestra la continuidad de g en (z_0, z_0) .

Ponemos

$$h_0(z) := \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta,$$

así que h_0 es continua en todo U (Teorema 2.3.4(a)). Mostremos que h_0 es holomorfa en U , usando el Teorema de Morera (Teorema 3.2.4). Sea γ una parametrización positiva de la frontera de un triángulo en U . Por el teorema de Fubini (Teorema 2.3.5) se sigue que

$$\int_{\gamma} h_0(z) dz = \int_{\gamma} \left(\int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta \right) dz = \int_{\Gamma} \left(\int_{\gamma} g(\zeta, z) dz \right) d\zeta$$

ya que el integrando g es continuo en $U \times U$. Para ζ fijo la función $g(\zeta, \cdot)$ es holomorfa en $U \setminus \{\zeta\}$ y continua en U . Por el teorema de levantamiento de Riemann (Teorema 3.2.6) $g(\zeta, \cdot)$ es holomorfa en todo U . El Teorema de Goursat (Teorema 3.1.1) implica que

$$\int_{\gamma} g(\zeta, z) dz = 0,$$

así que también $\int_{\gamma} h_0(z) dz = 0$. Como el triángulo en U era arbitrario, el Teorema de Goursat implica que h_0 es una función holomorfa en U .

Sea

$$U_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma \mid n(\Gamma, z) = 0\}.$$

En $U \cap U_0$ la función h_0 tiene la representación más sencilla

$$h_0(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i n(\Gamma, z) f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: h_1(z).$$

Como $\text{tr } \Gamma \cap U_0 = \emptyset$, la función h_1 es holomorfa en todo U_0 y coincide con h_0 en $U \cap U_0$. Esto nos permite definir una función holomorfa en $U \cup U_0$ por

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z), & z \in U, \\ h_1(z), & z \in U_0. \end{cases}$$

Como Γ es homólogo a cero, tenemos $U \cup U_0 = \mathbb{C}$, es decir, h es una función entera.

Sea $R > 0$ tan grande que $\text{tr } \Gamma \subseteq D_R$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{2R} \subseteq U_0$ se sigue de la desigualdad estándar (2.1.7) que

$$(4.2.5) \quad |h(z)| = |h_1(z)| = \left| \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq L(\Gamma) \max_{\zeta \in \text{tr } \Gamma} |f(\zeta)| \frac{1}{|z| - R} \leq \frac{L(\Gamma)}{R} \max_{\zeta \in \text{tr } \Gamma} |f(\zeta)|.$$

Esto implica que la función entera h es acotada. Por el Teorema de Liouville (Teorema 3.6.5) h es constante. Como (4.2.5) además implica que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |h(z)| = 0$, $h \equiv 0$ en \mathbb{C} y luego también $h_0 \equiv 0$ en U . Por consiguiente, hemos mostrado (4.2.1).

Para mostrar el inciso (a) sea $a \in U \setminus \text{tr } \Gamma$. La función $F(z) := f(z)(z - a)$ es holomorfa en U y satisface $F(a) = 0$. Una aplicación del inciso (b) da

$$0 = n(\Gamma, a)F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad \square$$

4.2.3 Corolario. Sean Γ_1 y Γ_2 dos ciclos homólogos en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$$

para toda función holomorfa f en U .

Discutimos la condición de homología a cero en el Teorema 4.2.2. Si Γ es un ciclo no homólogo a cero en un conjunto abierto U , entonces existe una función holomorfa f en U tal que $\int_{\Gamma} f \neq 0$: tomamos $a \in \mathbb{C} \setminus U$ tal que $n(\Gamma, a) \neq 0$ y usamos $f(z) := 1/(z - a)$. Eso muestra que la condición no se puede quitar del Teorema.

Sean G abierto y convexo y Γ un ciclo en G . Para $z \in \mathbb{C} \setminus G$ fijo la función $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ es holomorfa en G . Por el Teorema 3.1.3 f tiene una antiderivada en G , así que

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$$

por el Teorema 4.1.3. Eso muestra que cualquier ciclo en G tiene homología nula, y el Teorema de Cauchy para regiones convexas (Teorema 3.1.4) es una consecuencia del Teorema 4.2.2(a).

Si U es abierto, f holomorfa en U y $D_r(z_0) \subset\subset U$, entonces $\kappa(r, z_0)$ es un ciclo homólogo a cero en U , ya que $\mathbb{C} \setminus U \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(z_0)$, y $n(\kappa(r, z_0), \cdot)$ es cero en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(z_0)$. Esto implica que la Fórmula de Cauchy en el disco (Teorema 3.2.1) es un caso especial del Teorema 4.2.2(b).

4.3. Aplicaciones del número de giros

Los resultados de las secciones anteriores sólo son interesantes si tenemos una herramienta para calcular números de giros. Aquí desarrollaremos tal herramienta, mostrando que el número de giros está incrementado por 1 si cruzamos una trayectoria “de la derecha a la izquierda”. Para poder formular precisamente a que se refiere eso, necesitamos una nueva noción: un camino $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ en una región G va de frontera a frontera en G si se cumplen las siguientes condiciones:

- (I) Existen puntos $t_1, t_2 \in I$ tales que $t_1 < t_2$, $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial G$ y $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$;
- (II) para $t \in (t_1, t_2)$ se tiene $\gamma(t) \in G$;
- (III) para $t \in I \setminus [t_1, t_2]$ se tiene $\gamma(t) \notin \overline{G}$;
- (IV) $G \setminus \text{tr } \gamma$ tiene precisamente dos componentes conexas, y $\text{tr } \gamma \cap G$ está contenida en la frontera de cada una de esas componentes.

4.3.1 Ejemplo. Si γ es un camino suave y inyectivo, entonces cada punto $z_0 = \gamma(t_0)$ con $t_0 \in \text{int } I$ tiene una vecindad conexa G tal que γ va de frontera a frontera en G . Para ver eso, sea T el espacio tangente a γ en z_0 . Después de una traslación y rotación podemos suponer que $z_0 = 0$ y $T = \mathbb{R}$ (aquí los ejes reales y imaginarias en \mathbb{C} no tienen ningún significado, ya que sólo consideramos la geometría). Usando el teorema de la función implícita representamos a $\text{tr } \gamma$ localmente como la gráfica de una función continuamente diferenciable h : existen $0 < r_2 \leq r_1$ y $h: (-r_1, r_1) \rightarrow (-r_2, r_2)$ tal que con $G := (-r_1, r_1) \times (-r_2, r_2)$ se tiene

$$(\text{tr } \gamma) \cap G = \{(x, h(x)) \mid |x| < r_1\}.$$

En ese caso γ va de frontera a frontera en G .

En casos concretos normalmente las condiciones de los incisos (I)–(IV) son obvias.

Hagamos precisa la noción del incremento del número de giros cruzando un lazo de la derecha a la izquierda. Sea γ un lazo que va de frontera a frontera en el disco D . Sean $t_1 < t_2$ dados como en la definición de esa propiedad y sean $a := \gamma(t_1)$ y $b := \gamma(t_2)$. Esto implica que $a, b \in \partial D$. Definimos el camino parcial $\gamma_0 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Sea κ una parametrización positiva de la frontera ∂D , sea κ_1 la parte de κ que conecta b con a en el sentido positivo, y sea κ_2 la parte de κ que conecta a con b en el sentido positivo. Las componentes conexas D_1, D_2 de $D \setminus \text{tr } \gamma$ sean enumeradas de tal manera que $\text{tr } \gamma_j \subseteq \partial D_j$ para $j = 1, 2$. Entonces los números de giros satisfacen:

4.3.2 Teorema. Si $z_j \in D_j$, $j = 1, 2$, entonces $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$.

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 caminos parciales de γ tales que $\gamma_1, \gamma_0, \gamma_2$ son pegables en ese orden y tal que $\gamma = \gamma_1 \gamma_0 \gamma_2$. Definimos para el momento para cualquier cadena (¡no ciclo!) y $z \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$ el número

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

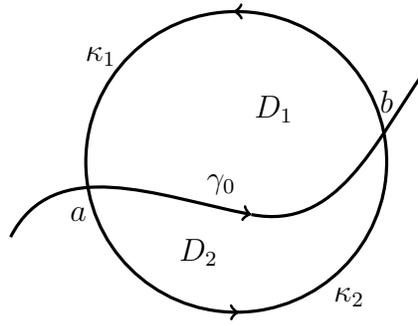


Figura 4.1: La situación en el Teorema 4.3.2

Entonces

$$n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) - n(\gamma_0, z_2) + n(\gamma_1 + \gamma_2, z_1) - n(\gamma_1 + \gamma_2, z_2).$$

Tenemos que $\gamma_1 - \kappa_1 + \gamma_2$ es un lazo (reemplazamos γ_0 por $-\kappa_1$). Además, $D \cap \text{tr}(\gamma_1 - \kappa_1 + \gamma_2) = \emptyset$. Por consiguiente

$$n(\gamma_1 - \kappa_1 + \gamma_2, z_1) = n(\gamma_1 - \kappa_1 + \gamma_2, z_2),$$

así que

$$(4.3.1) \quad n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) - n(\gamma_0, z_2) + n(\kappa_1, z_1) - n(\kappa_1, z_2).$$

Como z_1 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\kappa_2 - \gamma_0)$ y z_2 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(\kappa_1 + \gamma_0)$, tenemos

$$n(\kappa_2 - \gamma_0, z_1) = 0 \quad \text{y} \quad n(\kappa_1 + \gamma_0, z_2) = 0.$$

Con estas identidades concluimos de (4.3.1) que

$$\begin{aligned} n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) &= n(\gamma_0, z_1) + n(\kappa_1, z_1) \\ &= n(\gamma_0, z_1) + n(\kappa_1, z_1) + n(\kappa_2 - \gamma_0, z_1) \\ &= n(\kappa_1 + \kappa_2, z_1) \\ &= 1. \end{aligned} \quad \square$$

Para los próximos resultados necesitamos un resultado técnico:

4.3.3 Lema. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ compacto y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $A \subseteq U$. Entonces existe un ciclo Γ en $U \setminus A$ tal que*

$$\begin{aligned} n(\Gamma, z) &= 1 && \text{para todo } z \in A \\ n(\Gamma, z) &= 0 && \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{aligned}$$

Demostración. Como el caso de $A = \emptyset$ es trivial, podemos suponer que A no es vacío.

En el primer paso sea A conexo. Escogemos $\delta \in (0, \text{dist}(A, \partial U)/\sqrt{2})$ y $a \in A$. Consideramos el cuadrado $Q_0 := [-\delta/2, \delta/2]^2$ con sus vértices $p_1 := (-\delta/2, -\delta/2)$, $p_2 := (\delta/2, -\delta/2)$, $p_3 := (\delta/2, \delta/2)$ y $p_4 := (-\delta/2, \delta/2)$. Consideremos también el conjunto de cuadrados

$$(4.3.2) \quad \mathcal{Q} := \{a + (k\delta, \ell\delta) + Q_0 \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}.$$

Como A es acotado existen $n \in \mathbb{N}$ y cuadrados $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in \mathcal{Q}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^n Q_j \quad \text{y} \quad Q_j \cap A \neq \emptyset \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n.$$

Las definiciones de δ y \mathcal{Q} implican que además

$$Q_j \subseteq U \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n.$$

Fijemos j para un momento. Si $Q_j = a + (k\delta, \ell\delta) + Q_0$ entonces Q_j tiene los vértices $q_m := a + (k\delta, \ell\delta) + p_m$, $m = 1, 2, 3, 4$. Los caminos $\gamma_1 := [q_1, q_2]$, $\gamma_2 := [q_2, q_3]$, $\gamma_3 := [q_3, q_4]$ y $\gamma_4 := [q_4, q_1]$ son pegables, y su pegado $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ es un lazo que da una parametrización positiva de ∂Q_j . En esa situación denotamos por $\Gamma_j := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ el ciclo de los segmentos de ∂Q_j .

Definimos $\Gamma := \sum_{j=1}^n \Gamma_j$. Si un segmento de la frontera de los cuadrados Q_j aparece dos veces en esa combinación lineal de segmentos, los coeficientes son 1 y -1 , es decir, se cancelan. Por ello Γ es la suma de aquellos segmentos que son lado de precisamente un cuadrado Q_j . Sea κ uno de tales segmentos. Si fuera cierto que $\text{tr } \kappa \cap A \neq \emptyset$, entonces los dos cuadrados en \mathcal{Q} de las cuales κ es segmento de la frontera tendrían intersección no vacía con A , es decir, pertenecerían a la lista de los Q_j . Pero esto sería en contradicción con la propiedad de κ mencionada antes. En consecuencia, $\text{tr } \kappa \cap A = \emptyset$ y luego $\text{tr } \kappa \subseteq \mathbb{C} \setminus A$. Por otro lado, κ es segmento de la frontera de un cuadrado que tiene intersección no vacía con A , es decir, que está contenido en U . Por ello $\text{tr } \kappa \subseteq U$. Estos hechos implican que

$$\text{tr } \Gamma \subseteq U \setminus A.$$

Existe precisamente un cuadrado Q_{j_0} tal que $a \in \text{int } Q_{j_0}$. En seguida, $n(\Gamma_{j_0}, a) = 1$. Por otro lado, $n(\Gamma_j, a) = 0$ si $j \neq j_0$. Esto implica que

$$n(\Gamma, a) = \sum_{j=1}^n n(\Gamma_j, a) = 1.$$

Como A es conexo, A está contenido en una sola componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$, así que

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma, a) = 1 \quad \text{para todo } z \in A.$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus U$ entonces $n(\Gamma_j, z) = 0$ para todo j , así que

$$n(\Gamma, z) = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus U.$$

En el segundo paso tenga A a lo más un número finito de componentes conexas. Nuevamente escogemos $\delta \in (0, \text{dist}(A, \partial U)/\sqrt{2})$ y definimos $Q_0 := [-\delta/2, \delta/2]^2$. Tomamos un punto a_i en cada componente conexa de A . Existen puntos únicos $\bar{a}_i \in [-\delta/2, \delta/2]^2$ tales que para todo i existen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ con $a_i = \bar{a}_i + (k\delta, \ell\delta)$ (tomar $k := \lfloor \frac{\text{Re } a}{\delta} + \frac{1}{2} \rfloor$ y $\ell := \lfloor \frac{\text{Im } a}{\delta} + \frac{1}{2} \rfloor$). Como el conjunto de los \bar{a}_i es finito, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $a := (-\varepsilon, -\varepsilon)$ se tiene $\bar{a}_i \in a + \text{int } Q_0$ para todo i . Ahora definimos \mathcal{Q} como en (4.3.2) y seguimos el mismo procedimiento como arriba para definir Γ con $\text{tr } \Gamma \subseteq U \setminus A$. Para cada i se sigue que a_i está en el interior de precisamente un cuadrado de los en \mathcal{Q} que tienen intersección no vacía con A , y como antes se sigue que $n(\Gamma, \cdot)$ es constante 1 en cada componente conexa de A , es decir, en todo A . Igual como antes se sigue que $n(\Gamma, \cdot)$ es igual a cero en $\mathbb{C} \setminus U$.

En el último paso sea A un subconjunto compacto de U general. Cubrimos a A con un número finito de discos abiertos D_j tales que $D_j \subset\subset U$ para todo j . Aplicamos el paso anterior al conjunto $\bigcup_j \bar{D}_j$, el cual es compacto, contenido en U , contiene a A y tiene a lo más un número finito de componentes conexas. \square

Las regiones donde los Teoremas de Cauchy globales son ciertos sin hipótesis sobre el ciclo Γ merecen un nombre particular:

4.3.4 Definición. Una región, en la cual todo ciclo tiene homología cero se llama *simplemente conexa*.

Por ejemplo, vimos en la sección 4.2 que regiones convexas son simplemente conexas. Existe una caracterización más precisa de esas regiones:

4.3.5 Teorema. Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región. Entonces son equivalentes:

- (I) G es simplemente conexo;
- (II) Si $A = A_1 \cup A_2$ es una partición de $A := \mathbb{C} \setminus G$ en dos conjuntos cerrados y ajenos A_1 y A_2 , y si A_1 es compacto, entonces $A_1 = \emptyset$.

Demostración. (I) **implica** (II): Sean G simplemente conexo, $A = A_1 \cup A_2$ una partición de $A := \mathbb{C} \setminus G$ en dos conjuntos cerrados y ajenos A_1 y A_2 , y A_1 compacto. Entonces $U := A_1 \cup G$ es un conjunto abierto, ya que $\mathbb{C} \setminus U = A_2$ es cerrado. Por el Lema 4.3.3 existe un ciclo Γ en $U \setminus A_1 = G$ tal que $n(\Gamma, a) = 1$ para todo $a \in A_1$. Pero como por hipótesis Γ tiene homología nula, $A_1 = \emptyset$.

(II) **implica** (I): Por contradicción supongamos que G no fuera simplemente conexo, y que Γ fuera un ciclo no homólogo a cero en G . Ponemos

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

$$A_2 := \{z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) = 0\}.$$

Esto implica que $A := A_1 \cup A_2 = \mathbb{C} \setminus G$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y que A_1 es acotado y no vacío. Mostremos que A_1 y A_2 son conjuntos cerrados. Sea (z_k) una sucesión en A_1 que converge a z^* en \mathbb{C} . Como A es cerrado, $z^* \in A$, así que $z^* \in \mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$. Como $n(\Gamma, \cdot)$ es localmente

constante en $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \Gamma$, $n(\Gamma, z^*) \neq 0$, es decir, $z^* \in A_1$. Eso muestra que A_1 es cerrado. La prueba para A_2 es análoga. La hipótesis implica que $A_1 = \emptyset$, en contradicción con que Γ no es homólogo a cero. Entonces G tiene que ser simplemente conexo. \square

La propiedad de ser simplemente conexo es invariante bajo ciertas funciones:

4.3.6 Teorema. *Sea G una región simplemente conexa.*

- (a) *Si $F: G \rightarrow G'$ es una función biholomorfa entre G y el conjunto abierto G' , entonces G' es una región simplemente conexa.*
- (b) *Si $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un homeomorfismo, entonces $G' := F(G)$ es una región simplemente conexa.*

Demostración. (a): Sea Γ' cualquier ciclo en G' , $\Gamma' = \sum_{j=1}^k n_j \kappa_j$. Definimos el ciclo $\Gamma := F^{-1} \circ \Gamma' := \sum_{j=1}^k n_j F^{-1} \circ \kappa_j$ en G . Escribimos $\gamma_j := F^{-1} \circ \kappa_j$, así que

$$\gamma_j'(t) = \frac{\kappa_j'(t)}{F'(\gamma_j(t))}.$$

Si f es una función holomorfa en G' , entonces tenemos para cada j , si $[t_0, t_1]$ es el dominio de κ_j :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_j} f(F(z))F'(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(F(\gamma_j(t)))F'(\gamma_j(t)) \frac{\kappa_j'(t)}{F'(\gamma_j(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(\kappa_j(t))\kappa_j'(t) dt = \int_{\kappa_j} f. \end{aligned}$$

Sumando sobre j eso implica $\int_{\Gamma'} f = 0$. Particularmente, si $a \in \mathbb{C} \setminus G'$, la función $z \mapsto 1/(z - a)$ es holomorfa en G' . Entonces $n(\Gamma', a) = 0$ es cierto para todo $a \in \mathbb{C} \setminus G'$, es decir, Γ' tiene homología nula.

(b): Como F es un homeomorfismo de \mathbb{C} en si mismo, aplica el criterio del Teorema 4.3.5(II). \square

Mostremos ahora, aprovechando de la herramienta del número de giros, un caso particular del Teorema de separación de Jordan:

4.3.7 Teorema. *Sea γ un camino de integración simplemente cerrado en \mathbb{C} tal que para cada punto $z_0 \in \text{tr } \gamma$ exista un disco $D_r(z_0)$ tal que γ va de frontera a frontera en el. Entonces γ divide el plano complejo en dos regiones, de las cuales precisamente una es acotada, y tal que la frontera de cada una de ellas es $\text{tr } \gamma$.*

Demostración. Ponemos $C := \text{tr } \gamma$ y $U := \mathbb{C} \setminus C$ y procedemos en tres pasos:

Afirmación (a): *U tiene al menos dos componentes conexas.*

Sean $z_0 \in C$ y D un disco centrado en z_0 , en el cual γ va de frontera a frontera. Sean D_1 y D_2 las componentes conexas de $D \setminus C$, y sean $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$. Por el Teorema 4.3.2 se sigue que

$$n(\gamma, z_1) \neq n(\gamma, z_2).$$

Como el número de giros respecto a γ es constante en las componentes de U , U tiene al menos dos componentes.

Afirmación (b): *Si U_1 es una componente conexa de U , entonces $\partial U_1 = C$.*

Si $z_0 \in \partial U_1 \setminus C$ fuera cierto, entonces existiría un disco D centrado en z_0 tal que $D \subseteq U$. Pero $U_1 \cup D \subseteq U$ sería abierto y conexo (ya que es la unión de conjuntos conexos con intersección no vacía) y $U_1 \neq U_1 \cup D$. Esto sería en contradicción con que U_1 es una componente conexa. Entonces $\partial U_1 \subseteq C$. Observamos que ∂U_1 es cerrado y no vacío (ya que $U_1 \neq \mathbb{C}$). Mostremos que ∂U_1 es relativamente abierto en C . Para ello, sea $z_0 \in \partial U_1$, y sea D un disco centrado en z_0 en el cual γ va de frontera a frontera. Sean D_1 y D_2 las dos componentes de $D \setminus C$. Como $U_1 \cap D \neq \emptyset$ y $U_1 \cap C = \emptyset$,

$$(U_1 \cap D_1) \cup (U_1 \cap D_2) = U_1 \cap (D \setminus C) \neq \emptyset.$$

Podemos suponer que $U_1 \cap D_1 \neq \emptyset$, así que $U_1 \cup D_1$ es conexo, abierto y no vacío. Luego $D_1 \subseteq U_1$. Como γ va de frontera a frontera en D , $D \cap C \subseteq \partial D_1$. Y como $U_1 \cap C = \emptyset$, $D \cap C \subseteq \partial D_1 \cap C \subseteq \partial U_1$. Entonces encontramos una vecindad relativamente abierta $D \cap C$ de z_0 en C que está contenida en ∂U_1 . Como $z_0 \in \partial U_1$ era arbitrario, eso muestra que ∂U_1 es relativamente abierto en C . Y como C es un conjunto conexo (siendo la imagen de un intervalo bajo una función continua), $\partial U_1 = C$.

Afirmación (c): *U tiene a lo más dos componentes conexas.*

Sean U_1 y U_2 dos componentes conexas distintas de U . Por la Afirmación (b) $\partial U_1 = \partial U_2 = C$. Escogemos un disco D en el cual γ va de frontera a frontera. Nuevamente usando la Afirmación (b) enumeramos las componentes conexas D_1, D_2 de $D \setminus C$ de tal manera que $D_1 \subseteq U_1$ y $D_2 \subseteq U_2$. Si V es alguna componente conexa de U , entonces tiene que satisfacer o bien $D_1 \subseteq V$ o bien $D_2 \subseteq V$, es decir, o bien $V = U_1$ o bien $V = U_2$.

Para terminar la prueba, nada más anotamos que, como C es compacto, existe $R > 0$ grande tal que $C \subseteq D_R$. El conjunto $\mathbb{C} \setminus D_R$ es conexo y contenido en una componente conexa de U . Eso muestra que precisamente una de las componentes conexas de U no es acotada. \square

Notamos que en el resultado anterior el número de giros es 1 o -1 en la componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{tr } \gamma$, por el Teorema 4.3.2 y porque ese número es cero en la componente no acotada. En esa situación llamaremos a la componente no acotada lo *exterior de γ* , y a la componente acotada lo *interior de γ* .

5 Las inversas de las funciones elementales

En el análisis real es relativamente sencillo encontrar intervalos en los cuales una función continua localmente inyectiva tiene una inversa (tomar intervalos de monotonía). Por ejemplo, la función x^2 tiene inversas en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$. Ellas son $-\sqrt{y}$ y \sqrt{y} . En el plano complejo la función z^2 tiene dos funciones inversas en cada disco $D_{|w|}(w)$ donde $w \in \dot{\mathbb{C}}$ (lo mostraremos en esta sección). Pero no existen dominios naturales maximales para definir estas extensiones y no existe ninguna inversa de z^2 que esté definida en todo $\dot{\mathbb{C}}$. La búsqueda de dominios naturales para funciones inversas se manifiesta en la definición de superficies de Riemann, lo cual no perseguiremos en el momento. Consideraremos las opciones de definir inversas en subconjuntos de \mathbb{C} .

5.1. El logaritmo

Para cualquier $x > 0$ siempre denotamos por $\log x$ el logaritmo natural real de x . Recordemos que la función \exp es suprayectiva de \mathbb{C} en $\dot{\mathbb{C}}$ y tiene el período $2\pi i$. Para cada $z \in \dot{\mathbb{C}}$ existe una infinidad de puntos w tales que $e^w = z$. Uno de estos puntos es un *logaritmo* de z . Por (1.5.8) todo logaritmo w de z tiene la forma

$$(5.1.1) \quad w = \log|z| + i \arg z,$$

con algún argumento de z . Los logaritmos de z difieren por múltiplos enteros de $2\pi i$. Un número real positivo x tiene los logaritmos $\log x + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Un número real negativo x tiene los logaritmos $\log|x| + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. La unidad imaginaria i tiene el logaritmo $\pi i/2$.

Si w_1 y w_2 son logaritmos de z_1 y z_2 , entonces $e^{w_1+w_2} = e^{w_1}e^{w_2} = z_1z_2$, es decir, w_1+w_2 es un logaritmo de z_1z_2 . No obstante, si w_3 es un logaritmo de z_1z_2 , no siempre es cierto que $w_1+w_2 = w_3$, ya que w_3 puede diferir de la suma por múltiplos enteros de $2\pi i$.

Si $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ es una región, entonces hay muchas funciones que mandan cada punto en G a uno de sus logaritmos. El problema surge si uno quiere una función continua o holomorfa.

5.1.1 Definición. Sea $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ una región. Una función continua $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ con $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in G$ se llama una *rama del logaritmo en G* .

Si f es una rama del logaritmo en una región G , entonces f es inyectiva. Las funciones $f_k := f + 2k\pi i$ también son ramas del logaritmo en G . Estas son todas ramas del logaritmo

en G : si g es una rama del logaritmo en G , entonces se cumple para toda $z \in G$ que $e^{f(z)-g(z)} = e^{f(z)}/e^{g(z)} = z/z = 1$, es decir, $f(z) - g(z) = 2k(z)\pi i$ para un $k(z) \in \mathbb{Z}$. Como f y g son continuas, k también lo es, es decir, k es constante.

El problema análogo existe para el argumento de complejos. Si $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ es una región, una función continua $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ es una *rama del argumento* en G si $\varphi(z)$ es un argumento de z para toda $z \in G$.

5.1.2 Teorema. *En una región $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ existe una rama del argumento si y sólo si existe una rama del logaritmo.*

Demostración. Si φ es una rama del argumento en G , entonces $z \mapsto \log|z| + i\varphi(z)$ es una función continua en G , una rama del logaritmo. Inversamente, si f es una rama del logaritmo en G , entonces por (5.1.1) $\text{Im } f(z)$ es un argumento de z . Como $z \mapsto \text{Im } f(z)$ es una función continua, es una rama del argumento en G . \square

Por el Teorema anterior basta analizar el logaritmo.

5.1.3 Teorema. *Cada rama del logaritmo es holomorfa, con derivada $1/z$.*

Demostración. Sean $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ una región y f una rama del logaritmo en G . La función $f: G \rightarrow f(G)$ es biyectiva, con inversa $\exp: f(G) \rightarrow G$. Para $z_0 \in G$ sea $w_0 := f(z_0)$. Por la continuidad de f y la holomorfía de \exp

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}. \quad \square$$

5.1.4 Teorema. *Sea $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ una región. Entonces son equivalentes:*

- (I) *En G existe una rama del logaritmo.*
- (II) *$1/z$ tiene una antiderivada en G .*
- (III) *Para todo ciclo Γ en G se cumple $n(\Gamma, 0) = 0$.*

Si una de estas condiciones está satisfecha, entonces una rama del logaritmo es

$$(5.1.2) \quad f(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \log a,$$

donde $a \in G$ es un punto fijo, γ_z es un camino de integración de a a z , y $\log a$ cualquier logaritmo de a .

Demostración. **(I) implica (II):** Teorema 5.1.3.

(II) implica (I): Sea $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ una antiderivada de $1/z$. Entonces

$$(5.1.3) \quad (ze^{-g(z)})' = (1 - zg'(z))e^{-g(z)} \equiv 0.$$

Por consiguiente, $ze^{-g(z)}$ es una constante no cero en G . Escribiéndola como e^c , obtenemos la rama del logaritmo $f := g + c$.

(ii) y (iii) son equivalentes: Esto es una consecuencia de la definición de $n(\Gamma, 0)$. Para mostrar que (5.1.2) se cumple, notamos que para $a \in G$ fijo,

$$g(z) := \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

define una antiderivada de $1/z$, con $g(a) = 0$. Como arriba, $ze^{-g(z)}$ es constante, y la constante es $ae^{-g(a)} = a = e^c$, donde c es un logaritmo de a . Nuevamente, $g + c$ define una rama del logaritmo en G . \square

5.1.5 Ejemplo. (a) En $\dot{\mathbb{C}}$ no existe ninguna rama del logaritmo, ya que $n(\kappa(r, 0), 0) \neq 0$ para toda $r > 0$.

(b) Si $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ es simplemente conexo, entonces (iii) del Teorema 5.1.4 se cumple y existe una rama del logaritmo en G .

El caso particular más usado del Ejemplo 5.1.5(b) es el plano complejo cortado a lo largo de los números negativos:

$$\dot{\mathbb{C}} \setminus (-\infty, 0].$$

Denotemos este conjunto por G por el momento. Entonces G es abierto, conexo, y tiene un complemento conexo no acotado, lo cual no es unión ajena de subconjuntos cerrados y no vacíos. En consecuencia, el Teorema 4.3.5 implica que G es simplemente conexo. Definimos en G una rama del logaritmo mediante

$$(5.1.4) \quad \text{Log } z := \int_{[1, z]} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

la cual se llama la *rama principal del logaritmo*. Si $t > 0$, entonces

$$\text{Log } t = \int_{[1, t]} \frac{1}{s} ds = \int_1^t \frac{1}{s} ds = \log t,$$

es decir, Log es una extensión del logaritmo real.

Sea $z \in G$. Existe un argumento $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ de z . Definimos el camino $\kappa(t) := |z|e^{it\arg(z)}$, $t \in [0, 1]$, de 1 a z en G . Como la definición de la rama del logaritmo no depende del camino en G que escogemos, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Log } z &= \int_{[1, |z|]} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{\kappa} \frac{1}{\zeta} d\zeta \\ &= \log|z| + \int_0^1 \frac{1}{|z|e^{it\arg(z)}} |z| i \arg(z) e^{it\arg(z)} dt \\ &= \log|z| + i \arg(z) \end{aligned} \quad \text{con } \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

Como en el análisis real tenemos la serie de Taylor

$$(5.1.5) \quad \text{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k \quad \text{si } |z| < 1.$$

No obstante, la ecuación funcional real $\log(x_1x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$ no es cierta en general para argumentos complejos en G . $\text{Log}(z_1z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$ es cierto si y sólo si para los argumentos $\arg(z_1), \arg(z_2) \in (-\pi, \pi)$ se tiene que también $\arg(z_1) + \arg(z_2) \in (-\pi, \pi)$.

Análogamente, podemos cortar el plano complejo a lo largo de cualquier rayo S que parte de 0. Si $S \neq [0, \infty)$, entonces existe en $G := \mathbb{C} \setminus S$ una extensión holomorfa del logaritmo real. Pero ella sólo coincide con la rama principal en la componente conexa que contiene a $(0, \infty)$ de $G \cap (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.

Usando la exponencial también podemos encontrar regiones con una rama del logaritmo. Sea \tilde{G} una región en \mathbb{C} tal que $z_1 - z_2 \notin 2\pi i\mathbb{Z}$ para todo $z_1, z_2 \in \tilde{G}$. Entonces $\exp|_{\tilde{G}}$ es inyectiva, y en $G := \exp(\tilde{G})$ existe una rama del logaritmo, la inversa de \exp . Si \tilde{G} es una tira $\{z \in \mathbb{C} \mid a < \text{Im } z < a + 2\pi\}$, entonces G es el plano complejo cortado a lo largo del rayo partiendo de 0 por el punto e^{ia} .

Sea \log una rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus S$, donde S es un rayo partiendo de 0. Averiguemos como se comportan los valores de \log cerca de puntos en S . Consideremos un camino $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \dot{\mathbb{C}}$ que corta S precisamente en $\gamma(0)$. La parte $\gamma_1 := \gamma|_{[-1, 0]}$ se encuentre a la izquierda de S , y la parte $\gamma_2 := \gamma|_{[0, 1]}$ se encuentre a la derecha de S , relativamente a la dirección en S de 0 a ∞ . Entonces $\log \gamma_1$ y $\log \gamma_2$ tienen una extensión continua al punto $t = 0$. Se tiene

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \log \gamma(t) - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \log \gamma(t) = 2\pi i.$$

En otras palabras, los valores de \log saltan por $2\pi i$ cuando cruzamos a S .

Nos preguntamos cuando existe un logaritmo de una función holomorfa:

5.1.6 Teorema. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y f una función holomorfa en G sin ceros. Entonces existe una función holomorfa g en G tal que $f = e^g$ en G .

Demostración. Como f no tiene ceros, la función f'/f es holomorfa en G . Como G es simplemente conexa, f'/f tiene una antiderivada h . Calculamos

$$(fe^{-h})' = (f' - fh')e^{-h} \equiv 0,$$

así que $fe^{-h} = e^c$ con una constante $c \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $f = e^{h+c}$. \square

5.1.7 Ejemplo. La importancia del Teorema anterior es que en el conjunto $f(G)$, lo cual es una región si f no es constante, no necesariamente existe una rama del logaritmo. Por ejemplo, si

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0, |z| > 1\}$$

y $f(z) := z^3$, entonces G es simplemente conexo y f no tiene ceros en G . El Teorema 5.1.6 implica la existencia de un logaritmo g de f en G . Por otro lado, $\kappa(2, 0)$ es un lazo en $f(G) = \mathbb{C} \setminus D_1$, y $n(\kappa(2, 0), 0) = 1 \neq 0$, así que no existe una rama del logaritmo en $f(G)$ por el Teorema 5.1.4.

Como ya contamos con ramas del argumento, podemos interpretar en términos geométricos la integral que define un número de giros. Por simplicidad consideramos $n(\gamma, 0)$

para un lazo γ en $\mathring{\mathbb{C}}$ con dominio $[a, b]$. Existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que cada camino parcial $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ tiene traza en un disco D_k abierto en $\mathring{\mathbb{C}}$. Por el Teorema 5.1.2 y el Ejemplo 5.1.5 existen ramas del argumento en aquellos discos. Sean $z_k := \gamma(t_k)$. Inductivamente escogemos ramas del argumento φ_k en D_k de la siguiente manera: la rama φ_1 sea arbitraria. Dado φ_k escogemos φ_{k+1} tal que $\varphi_k(z_k) = \varphi_{k+1}(z_k)$. Esta condición define únicamente la rama φ_{k+1} . Definimos la función continua $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) := \varphi_k(\gamma(t)) \quad \text{si } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Para cada $t \in [a, b]$ $\varphi(t)$ es un argumento de $\gamma(t)$. Como en D_k existe la rama del logaritmo $f_k(z) := \log|z| + i\varphi_k$, obtenemos para cada k por el Teorema 5.1.4

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz = f_k(z_k) - f_k(z_{k-1}) = \log|z_k| - \log|z_{k-1}| + i(\varphi_k(z_k) - \varphi_k(z_{k-1})).$$

La parte imaginaria de esa integral mide el cambio en el argumento de γ cuando pasamos de t_{k-1} a t_k . Sumamos las integrales sobre $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} 2\pi i n(\gamma, 0) &= \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz \\ &= \log|z_n| - \log|z_0| + i(\varphi_n(z_n) - \varphi_1(z_0)) = i(\varphi_n(z_n) - \varphi_1(z_0)). \end{aligned}$$

La interpretación es que $2\pi n(\gamma, 0)$ mide el cambio total del argumento de $\gamma(t)$ a lo largo de $[a, b]$, o, en otras palabras, $n(\gamma, 0)$ cuenta el número de giros γ hace alrededor de 0.

5.2. Potencias

En el análisis real se define la potencia general para $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ por $a^b := \exp(b \log a)$. Análogamente definimos potencias complejas: si $a \in \mathring{\mathbb{C}}$, $b \in \mathbb{C}$ y $\log a$ es algún logaritmo de a , entonces el número $a^b := \exp(b \log a)$ es *un valor de la b-ésima potencia de a*. Siempre hay que tomar en cuenta que a^b depende del logaritmo de a : dos valores de a^b difieren por el factor $\exp(2k\pi i b)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, entonces existe una infinidad numerable de valores de a^b . Si $b \in \mathbb{Z}$, entonces existe un sólo valor de a^b , la potencia usual, el producto de $|b|$ copias de $a^{\text{sgn}(b)}$. Si $b = 1/n$ con $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, entonces $\exp(2\pi i k/n) = \exp(2\pi i k'/n)$ si y sólo si $k - k'$ es un múltiple entero de n . Por consiguiente, escribiendo

$$(5.2.1) \quad \zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right),$$

$\exp(2\pi i k/n)$ asume precisamente los n valores

$$\zeta_n, \zeta_n^2, \zeta_n^3, \dots, \zeta_n^n = 1$$

cuando k varía sobre \mathbb{Z} , las llamadas n -ésimas raíces unitarias. Si fijamos un logaritmo de $a \in \dot{\mathbb{C}}$, entonces $a^{1/n}$ asume precisamente los n valores

$$\exp\left(\frac{\log a}{n}\right), \zeta_n \exp\left(\frac{\log a}{n}\right), \zeta_n^2 \exp\left(\frac{\log a}{n}\right), \dots, \zeta_n^{n-1} \exp\left(\frac{\log a}{n}\right).$$

Como

$$\left(\zeta_n^k \exp\left(\frac{\log a}{n}\right)\right)^n = \left(\exp\left(\frac{\log a}{n} + \frac{2\pi ik}{n}\right)\right)^n = \exp(\log a) = a$$

estos n valores son precisamente las n -ésimas raíces de a . Con la representación $a = |a|e^{i\vartheta}$ en coordenadas polares obtenemos

$$\sqrt[n]{|a|} \exp\left(\frac{i}{n}(\vartheta + 2k\pi)\right)$$

como la representación polar de las n -ésimas raíces de a . Aquí $\sqrt[n]{|a|}$ denota la raíz positiva real usual. Geométricamente las n -ésimas raíces de a se encuentran en un círculo centrado en 0 con radio $\sqrt[n]{|a|}$ y forman los vértices de un polígono regular.

La expresión 0^b sólo la definimos como $0^0 := 1$, y como $0^b = 0$ para $b \in \mathbb{N}$.

Si consideramos a o b en a^b como variable, entonces obtenemos funciones holomorfas: la *exponencial con base a* $z \mapsto a^z$ y la (*función*) *potencia* $z \mapsto z^b$. Discutiremos primero la exponencial con base a . Sea $a \in \dot{\mathbb{C}}$. Entonces $z \mapsto \exp(z \log a)$ es una función entera para cada selección del logaritmo $\log a$; cada una de esas funciones la denotamos por a^z . Se tiene $a^{z_1+z_2} = a^{z_1}a^{z_2}$ y

$$(5.2.2) \quad \frac{d}{dz}(a^z) = (\log a)a^z.$$

En el caso $a = e$ siempre escogemos $\log e = 1$, es decir, siempre se cumple $e^z = \exp(z)$.

La discusión de las potencias es más complicada:

5.2.1 Definición. Sea $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$ una región en la cual existe una rama \log del logaritmo, y sea $b \in \mathbb{C}$. Entonces la función $z \mapsto \exp(b \log z)$ es una rama de la b -ésima potencia en G . También la denotaremos por $z \mapsto z^b$.

Cada rama de la b -ésima potencia es holomorfa, con

$$(5.2.3) \quad \frac{d}{dz}(z^b) = bz^{b-1},$$

donde z^{b-1} está definida con la misma rama del logaritmo. Se cumple la relación funcional

$$(5.2.4) \quad (z_1 z_2)^b = z_1^b z_2^b \quad \text{si } \log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2).$$

Si existe una rama de la b -ésima potencia en una región $G \subseteq \dot{\mathbb{C}}$, entonces en general existe una infinidad numerable de ramas allí. Si $b \in \mathbb{Z}$, entonces solo hay una rama, la potencia usual.

Consideramos en más detalle el caso $b = 1/n$ con $n = 2, 3, 4, \dots$. Si \log es una rama fija en G , entonces existen las n ramas

$$(5.2.5) \quad \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right), \zeta_n \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right), \zeta_n^{n-1} \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$$

de $z^{1/n}$ en G .

5.2.2 Teorema. *Sea G una región en la cual existe una rama del logaritmo. Si f es una función continua en G tal que $f(z)^n = z$ para todo $z \in G$, entonces f es una de las ramas de $z^{1/n}$ dadas en (5.2.5).*

Demostración. Sea \log una rama del logaritmo en G . Ponemos $g(z) := \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$. Como $(f(z)/g(z))^n \equiv 1$ en G , $f(z)/g(z) = \zeta_n^{k(z)}$ en G (donde $k(z) \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$). Como f y g son continuas, la función $z \mapsto \zeta_n^{k(z)}$ es continua. Y como las n -ésimas raíces unitarias forman un subconjunto discreto de S_1 , $z \mapsto \zeta_n^{k(z)}$ es una función constante, $\zeta_n^{k(z)} = \zeta_n^{k_0}$ para un $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y todo z en G . Luego $f(z) = \zeta_n^{k_0} g(z)$ en G . \square

Notamos sin prueba que si existe una función continua f tal que $f(z)^n = z$ ($n \geq 2$) en una región G , entonces existe necesariamente una rama del logaritmo en G .

La rama de la b -ésima potencia definida en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ por medio de la rama principal del logaritmo es la *rama principal de la b -ésima potencia*. Para $b \in \mathbb{R}$ ella coincide con la potencia real usual en $(0, \infty)$. Para $|z| < 1$ la rama principal de $(1+z)^b$ tiene como desarrollo en 0 su serie de Taylor:

$$(5.2.6) \quad (1+z)^b = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{b}{k} z^k \quad \text{para } |z| < 1,$$

donde

$$\binom{b}{k} := \frac{1}{k!} b(b-1)(b-2) \cdots (b-k+1).$$

Si una función holomorfa f sin ceros en una región G tiene un logaritmo holomorfo, es decir, si existe una función holomorfa g en G tal que $f = e^g$, entonces existen b -ésimas potencias de f :

$$f^b := \exp(b(g + 2k\pi i)).$$

Por el Teorema 5.1.6 esto es el caso, por ejemplo, si G es simplemente conexa. Otro caso sería cuando existe una rama holomorfa del logaritmo en $f(G)$.

Consideramos el ejemplo de la función $f(z) := (z - z_1)/(z - z_2)$ en la región $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, $z_1 \neq z_2$. Se cumple que $f(G) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, así que ninguna de las condiciones anteriores está satisfecha para la existencia de un logaritmo holomorfo de f . Definimos $G^* := \mathbb{C} \setminus [z_1, z_2] \subseteq G$. Obtenemos que $f(G^*) \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, en donde existe una rama del logaritmo. En consecuencia, f tiene una rama de la b -ésima potencia en G^* para cada $b \in \mathbb{C}$. Otra posibilidad de definir ramas de potencias de f sería considerar

$$G^{**} := \mathbb{C} \setminus (\{z_1 + t(z_2 - z_1) \mid t < 0\} \cup \{z_2 + t(z_1 - z_2) \mid t < 0\})$$

en vez de G^* . La región G^{**} es simplemente conexa, así que existe un logaritmo holomorfo de f en G^{**} y con el también potencias de f . Las dos regiones G^* y G^{**} donde existen potencias de f fueron construidas de manera arbitraria. Para buscar dominios naturales en los cuales existen potencias de f , uno aplicaría la teoría de superficies de Riemann.

5.3. Las funciones arco

Las funciones del seno, del coseno y de las otras funciones trigonométricas relacionadas son periódicas en \mathbb{C} , así que globalmente no tienen inversas. Buscaremos regiones lo más grande posible en donde las funciones son inyectivas y existen inversas en las imágenes. En esto trataremos de extender las funciones arco conocidas del análisis real.

Tratamos primero la función $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$.

5.3.1 Teorema. Sean

$$G_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\} \quad y \quad G_2 := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}.$$

Entonces existe una rama de $w \mapsto (1 - w^2)^{1/2}$ en G_2 con valor 1 en $w = 0$, la cual denotaremos por $\sqrt{1 - w^2}$. La función sen es biyectiva entre G_0 y G_2 . Su inversa, la cual denotaremos por $\operatorname{arc sen}$, tiene la representación

$$(5.3.1) \quad \operatorname{arc sen}(w) = \frac{1}{i} \operatorname{Log} \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right) \quad \text{para todo } w \in G_2.$$

Demostración. El seno es la composición $g \circ f$ de las funciones

$$f(z) := e^{iz} \quad y \quad g(\zeta) := \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right).$$

Analicemos primero la función g en $\dot{\mathbb{C}}$. Se tiene que $g(\zeta_1) = g(\zeta_2)$ si y sólo si

$$0 = \zeta_1 - \zeta_2 + \left(\frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_1} \right) = (\zeta_1 - \zeta_2) \left(1 + \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \right).$$

Eso muestra que g sería inyectiva en una región que no contenga elementos ζ_1, ζ_2 con $\zeta_1 \zeta_2 = -1$. Tomamos

$$G_1 := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta > 0\}.$$

Si $\zeta \in G_1$, entonces $\operatorname{Re}(-1/\zeta) = -\operatorname{Re}(\bar{\zeta}/|\zeta|^2) < 0$, es decir, $-1/\zeta \notin G_1$. Por consiguiente, g es inyectiva en G_1 .

Mostremos que $G_2 = g(G_1)$ y encontremos la inversa de $g|_{G_1}$. Para $w \in \mathbb{C}$ y $\zeta \in \dot{\mathbb{C}}$ tenemos que

$$(5.3.2) \quad g(\zeta) = w \quad \text{si y sólo si} \quad (\zeta - iw)^2 = 1 - w^2.$$

Si $w \notin G_2$ entonces $w \in \mathbb{R}$ y $w^2 \geq 1$. Si existe $\zeta \in \dot{\mathbb{C}}$ tal que $g(\zeta) = w$, y si $\zeta - iw = e^{i\vartheta}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces por (5.3.2)

$$(\zeta - iw)^2 = e^{2i\vartheta} \leq 0,$$

es decir, $2\vartheta = (2k + 1)\pi$ con un $k \in \mathbb{Z}$. En seguida, $\vartheta = (k + \frac{1}{2})\pi$ y luego $\zeta - iw \in i\mathbb{R}$. Como $w \in \mathbb{R}$, resulta $\zeta \in i\mathbb{R}$. Y como $\zeta \in g^{-1}(w)$ era arbitrario, $w \notin g(\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R})$. Eso muestra que $g(\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}) \subseteq G_2$ y particularmente que $g(G_1) \subseteq G_2$.

Por otro lado, si $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $g(it) = (t + 1/t)/2 \in \mathbb{R}$ y

$$|g(it)|^2 = \frac{1}{4} \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{4} \left(4 + \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \right) \geq 1.$$

En consecuencia, $g(it) \in \mathbb{C} \setminus G_2$. Como $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ era arbitrario, eso muestra que

$$(5.3.3) \quad g^{-1}(G_2) \subseteq \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}.$$

La función $1 - w^2$ no se anula en la región G_2 , la cual es simplemente conexa por el Teorema 4.3.5 ya que su complemento consiste de dos componentes conexas no acotadas. Por el Teorema 5.1.6 existe un logaritmo holomorfo de $1 - w^2$ en G_2 , y por los resultados de la sección 5.2 existen además precisamente dos ramas de la raíz cuadrada de $1 - w^2$. Denotemos por $\sqrt{1 - w^2}$ la rama con valor 1 en $w = 0$ y definamos la función holomorfa $h(w) := iw + \sqrt{1 - w^2}$ para $w \in G_2$. Por (5.3.2) obtenemos que $g(h(w)) = w$ para toda $w \in G_2$. Observamos que $h(G_2)$ es un conjunto conexo. Además, (5.3.3) implica que $h(G_2) \subseteq g^{-1}(G_2) \subseteq \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Como $h(0) = 1 \in G_1$, estos hechos implican que $h(G_2) \subseteq G_1$, es decir, $G_2 \subseteq g(G_1)$. Entonces $g(G_1) = G_2$ y $h = (g|_{G_1})^{-1}$.

La restricción $f: G_0 \rightarrow G_1$ es biyectiva, con inversa $\frac{1}{i} \text{Log}: G_1 \rightarrow G_0$. Luego $\text{sen}|_{G_0} = g \circ f$ es biyectiva, con la inversa

$$\text{arc sen}(w) := f^{-1}(g^{-1}(w)) = \frac{1}{i} \text{Log} \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right). \quad \square$$

5.3.2 Nota. Si uno escoge una otra rama del logaritmo en (5.3.1), entonces uno obtiene una inversa de la restricción del seno a una tira trasladada por un múltiplo entero de 2π , con la misma región G_2 como imagen. Si uno escoge en (5.3.1) la otra rama de la raíz cuadrada de $1 - w^2$ y una rama “log” del logaritmo en $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z < 0\}$, entonces uno obtiene una inversa del seno en la tira

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \text{Re } z < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Como $\cos(z) = \text{sen}(z + \pi/2)$, construir una inversa arc cos del coseno es sencillo, aprovechándose de la inversa del seno. Analicemos la arcotangente, una inversa de la tangente.

5.3.3 Teorema. Sean

$$G_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2\} \quad \text{y} \quad G_3 := \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}.$$

La función \tan es biyectiva entre G_0 y G_3 . Su inversa, la cual denotaremos por \arctan , tiene la representación

$$(5.3.4) \quad \arctan(w) = \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1 + iw}{1 - iw} \quad \text{para todo } w \in G_3.$$

Demostración. Recordemos la definición

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Escribimos $\tan = g \circ f$ con $f(z) := e^{2iz}$ y $g(\zeta) := \frac{1}{i} \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$. La función f es una biyección entre G_0 y $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Mostremos que $g: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow G_3$ es biyectiva, con inversa $h(w) := \frac{1+iw}{1-iw}$.

Si $\zeta \neq -1$ y $g(\zeta) \notin G_3$, entonces existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tal que $\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = a$ y $|a| \geq 1$. Se sigue que

$$\zeta = (1 + a)/(1 - a) = -1 + \frac{2}{1 - a} \in \mathbb{R}.$$

Si $a > 1$ entonces $1 - a < 0$ y luego $\zeta < -1$. Si $a \leq -1$ entonces $\zeta \leq 0$. En ambos casos $g(\zeta) \notin G_3$ implica que $\zeta \in (-\infty, 0]$, es decir, $g(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \subseteq G_3$.

Si $w \neq -i$ cumple $h(w) \in (-\infty, 0]$, entonces existe $a \in (-\infty, 0] \setminus \{-1\}$ tal que $\frac{1+iw}{1-iw} = a$. En consecuencia,

$$w = \frac{1}{i} \frac{a - 1}{a + 1} \in i\mathbb{R} \quad \text{y} \quad |w| = \left| \frac{a - 1}{a + 1} \right| = \frac{|a| + 1}{||a| - 1|} \geq 1,$$

es decir, $w \notin G_3$. Entonces $h(G_3) \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Un cálculo directo muestra que $h \circ g = \operatorname{id}_{\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}$ y $g \circ h = \operatorname{id}_{G_3}$, así que $g: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow G_3$ es invertible con inversa h . Estos hechos implican la fórmula (5.3.4). \square

Para buscar regiones en las cuales las funciones hiperbólicas son invertibles, y para calcular las inversas al respecto, basta usar las relaciones entre ellas y las funciones trigonométricas de la sección 1.5.

6 Singularidades aisladas

Funciones como $\frac{1}{1+z^2}$, $\tan z$ y $\exp(1/z)$ son holomorfas en el complemento de un conjunto discreto de singularidades. El análisis del comportamiento de una función holomorfa en una vecindad de una singularidad aislada contribuye conocimientos teóricos y prácticos importantes. Existen desarrollos en series de potencias positivas y negativas alrededor de una singularidad aislada (series de Laurent), análogamente a las series de Taylor. Existe una clasificación sencilla de las singularidades por medio del comportamiento de la función en una vecindad. Generalizamos el teorema global de Cauchy por el teorema de los residuos, el cual aplica a funciones holomorfas con singularidades aisladas. Ese resultado tiene numerosas consecuencias en el cálculo de integrales, y en el análisis de las propiedades de funciones holomorfas.

6.1. Funciones holomorfas en anillos

Para $0 < r < R$ y $a \in \mathbb{C}$ denotamos por

$$K_a(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$
$$\overline{K}_a(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - a| \leq R\}$$

al anillo centrado en a con radios r y R . En esto permitimos $r = 0$ y $R = \infty$ en la definición de $K_a(r, R)$:

$$K_a(0, R) = \dot{D}_R(a) \quad \text{y} \quad K_a(r, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a).$$

Si f es holomorfa en $K_a(r, R)$, entonces en general no tiene una extensión a una región más grande. No obstante, mostraremos que f es la suma de funciones holomorfas en $D_R(a)$ y $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$.

6.1.1 Teorema. *Sea f holomorfa en el anillo $K_a(r, R)$. Entonces existen una función holomorfa f_1 en $U_1 := \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$ y una función holomorfa f_2 en $U_2 := D_R(a)$ tal que en $K_a(r, R) = U_1 \cap U_2$ se cumple $f = f_1 + f_2$. En esto podemos escoger f_1 de tal manera que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Esta condición determina a f_1 y f_2 .*

Demostración. Para cualquier $\rho \in (r, R)$ definimos en $D_\rho(a)$ una función holomorfa $f_{2,\rho}$ mediante

$$f_{2,\rho}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si $z \in U_2$ y $\max\{r, |z - a|\} < \rho < \rho' < R$, la función $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ es holomorfa en un anillo abierto U que es una vecindad U de $\overline{K}_a(\rho, \rho')$. Como los lazos $\kappa(\rho, a)$ y $\kappa(\rho', a)$

son homólogos en U , el teorema global de Cauchy implica que $f_{2,\rho}(z) = f_{2,\rho'}(z)$. Por ello tiene sentido la definición

$$f_2(z) := f_{2,\rho}(z) \quad \text{donde } z \in U_2, \rho \in (\max\{r, |z-a|\}, R),$$

y f_2 es holomorfa en U_2 . Similarmente definimos la función holomorfa

$$f_1(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\kappa(\sigma,a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{donde } z \in U_1, \sigma \in (r, \min\{R, |z-a|\}).$$

Fijemos $\sigma_1 \in (r, R)$. Si $|z-a| \geq 2R$, la desigualdad estándar implica que

$$|f_1(z)| \leq \max_{|\zeta-a|=\sigma_1} |f(\zeta)| \frac{\sigma_1}{|z-a| - R},$$

así que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$.

Sean ahora $z \in K_a(r, R)$ y $r < \sigma < |z-a| < \rho < R$. El ciclo $\Gamma := \kappa(\rho, a) - \kappa(\sigma, a)$ tiene homología cero en $K_a(r, R)$. Además, $n(\Gamma, z) = 1$. Por consiguiente, la fórmula de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(\sigma,a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_2(z) + f_1(z).$$

Nada más falta ver la unicidad de la descomposición. Sea $f = g_1 + g_2$ una descomposición análoga tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g_1(z) = 0$, entonces $f_1 - g_1 = -f_2 + g_2$ en $U_1 \cap U_2$. En seguida definimos por $h := f_1 - g_1$ en U_1 , $h := -f_2 + g_2$ en U_2 , una función entera con $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h(z) = 0$. Por el teorema de Liouville, $h \equiv 0$, es decir, $f_1 = g_1$ y $f_2 = g_2$. \square

En la situación del Teorema 6.1.1 llamamos a f_1 la *parte principal* de f , y a f_2 la *parte secundaria* de f .

6.1.2 Teorema. *Sea f holomorfa en el anillo $K_a(r, R)$. Entonces existe una representación*

$$(6.1.1) \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

La primera serie converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$ localmente uniformemente a la parte principal de f , y la segunda serie converge en $D_R(a)$ localmente uniformemente a la parte secundaria de f . Para cualquier $\rho \in (r, R)$ los coeficientes a_k están dados por

$$(6.1.2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. La parte secundaria tiene un desarrollo en una serie de potencias en U_2 :

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Para encontrar un desarrollo análogo para f_1 usaremos la función

$$F(w) := a + \frac{1}{w},$$

la cual es una función biholomorfa entre $\dot{D}_{1/r}$ y $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$. La función $f_1 \circ F$ es holomorfa en $\dot{D}_{1/r}$. Como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$, también $\lim_{w \rightarrow 0} f_1(F(w)) = 0$, así que $f_1 \circ F$ tiene una extensión holomorfa a a con el valor 0 (teorema de levantamiento de Riemann, Teorema 3.2.6). Por consiguiente, existe el desarrollo de $f_1 \circ F$ en su serie de Taylor alrededor de 0 en el disco $D_{1/r}$:

$$f_1(F(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k,$$

la cual converge uniformemente en $\overline{D}_{1/\rho}$ para todo $\rho > r$. Reemplazando $(z - a)^{-1}$ por w obtenemos

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - a)^{-k},$$

así que la definición $a_k := b_{-k}$ para $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, implica la representación (6.1.1). Esta serie converge uniformemente en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_\rho(a)$ para todo $\rho > r$.

Falta demostrar la fórmula para los coeficientes a_n . Para $\rho \in (r, R)$ y $n \in \mathbb{Z}$ las series

$$\frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_{k+n+1} (z - a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} (z - a)^k$$

convergen uniformemente en $\kappa(\rho, a)$. Por el Corolario 2.3.2 y por el Ejemplo 2.2.4 obtenemos

$$\int_{\kappa(\rho, a)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz = a_n \int_{\kappa(\rho, a)} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i a_n. \quad \square$$

Ese nuevo tipo de serie merece un nombre propio:

6.1.3 Definición. Una *Serie de Laurent* es una serie de la forma

$$(6.1.3) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - a)^k.$$

Se llama *convergente en z_1* si ambas series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - a)^{-k}$ convergen en z_1 ; en ese caso su suma es el valor de la serie (6.1.3) en z_1 . La serie

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - a)^k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - a)^{-k}$$

se llama la *parte principal* de (6.1.3), y la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k$$

es la *parte secundaria* de (6.1.3). Si la parte principal y la parte secundaria convergen (localmente) uniformemente entonces (6.1.3) *converge (localmente) uniformemente*.

6.1.4 Teorema. (a) *Sea $L(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ una serie de Laurent. Entonces existen $r, R \in [0, \infty]$ tales que la parte principal de L converge localmente uniformemente en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$, y la parte secundaria de L converge localmente uniformemente en $D_R(a)$. Si $r < R$, entonces L converge localmente uniformemente en el anillo $K_a(r, R)$ a una función holomorfa. En ese caso se tiene que*

$$(6.1.4) \quad |a_n| \leq \rho^{-n} \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)| \quad \text{para todo } \rho \in (r, R), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) *Sean $L_1(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ y $L_2(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(z-a)^k$ dos series de Laurent que convergen a la misma función f en un anillo $K_a(r, R)$. Entonces $a_n = b_n$ para toda n .*

Demostración. Inciso (a): La parte secundaria de L tiene un radio de convergencia $R \in [0, \infty]$. La serie de potencias

$$g(w) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$$

tiene un radio de convergencia $1/r \in [0, \infty]$. Entonces la parte principal de L converge localmente uniformemente en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$ a la función $g(1/(z-a))$. Si $r < R$ ambas partes de L convergen localmente uniformemente en $K_a(r, R)$, y L representa una función holomorfa allí. La desigualdad (6.1.4) se sigue de (6.1.2) por la desigualdad estándar Teorema 2.1.6.

Inciso (b): Si $\rho \in (r, R)$, entonces integración de

$$\frac{1}{(z-a)^{n+1}} L_1(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}} L_2(z)$$

sobre $\kappa(\rho, a)$ implica la identidad $a_n = b_n$. □

La serie de Laurent de una función holomorfa en un anillo normalmente no se calcula explícitamente usando la fórmula (6.1.2). Es más común usar series de Taylor ya conocidas para calcular los coeficientes. Particularmente, en el caso de las funciones racionales basta usar las series geométricas y sus derivadas.

6.1.5 Ejemplo. Consideremos la función

$$f(z) := \frac{1}{z(z-i)^2}.$$

Existen cuatro anillos distintos naturales en donde la serie de Laurent de f es interesante, dos para cada una de las singularidades 0 y i .

(a) Desarrollo en $K_0(0, 1)$:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{i}\right)^2} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{z}{i}\right)^k = -\frac{1}{z} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{i^k} z^k$$

(b) Desarrollo en $K_0(1, \infty)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{i}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{i}{z}\right)^k = \sum_{k=-3}^{-\infty} (k+2) i^{-k-1} z^k.$$

(c) Desarrollo en $K_i(0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{-i}{1-i(z-i)} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2} \sum_{k=0}^{\infty} i^{k-1} (z-i)^k = \sum_{k=-2}^{\infty} i^{k+1} (z-i)^k. \end{aligned}$$

(d) Desarrollo en $K_i(1, \infty)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{(z-i)^3} \frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i(z-i)}\right)^k = \sum_{k=-3}^{-\infty} i^{k+3} (z-i)^k. \end{aligned}$$

6.2. Singularidades aisladas

Usaremos la siguiente noción: si $z_0 \in \mathbb{C}$ y U es una vecindad de z_0 entonces $U \setminus \{z_0\}$ es una *vecindad pinchada* de z_0 .

6.2.1 Definición. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y f es una función holomorfa en una vecindad pinchada de z_0 entonces z_0 se llama una *singularidad aislada* de f .

6.2.2 Ejemplo. (a) La función $f(z) := \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ es holomorfa en $\dot{\mathbb{C}}$ y no definida en $z = 0$. Entonces 0 es una singularidad aislada de f .

(b) La función $f(z) := \frac{1}{z(z-i)^2}$ tiene las singularidades aisladas 1 y i .

(c) La función $f(z) := e^{1/z}$ tiene una singularidad aislada en 0.

(d) La función $f(z) := \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ es definida y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, así que todos los puntos de \mathbb{Z} son singularidades aisladas de f .

- (e) La función $f(z) := \cot \frac{\pi}{z}$ es definida y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (A \cup \{0\})$, donde $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}\}$. El origen no es una singularidad aislada de f ya que es un punto de acumulación de los puntos de A . No existe una vecindad pinchada de 0 en la cual f es holomorfa. Pero A es un conjunto discreto en $\hat{\mathbb{C}}$, así que los puntos $1/k$ para $k \in \mathbb{Z}$ son singularidades aisladas de f en $\hat{\mathbb{C}}$.

6.2.3 Definición. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, U una vecindad de z_0 y f holomorfa en la vecindad pinchada $U \setminus \{z_0\}$.

- (I) Si f es acotada en una vecindad pinchada $V \setminus \{z_0\} \subseteq U \setminus \{z_0\}$ de z_0 , entonces z_0 se llama una *singularidad levantable (o removable)* de f .
- (II) Si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, entonces z_0 se llama un *polo* de f .
- (III) Si z_0 ni es una singularidad levantable ni un polo de f , entonces z_0 se llama una *singularidad esencial* de f .

Por el Teorema 3.2.6 de levantamiento de Riemann una singularidad aislada es levantable si y sólo si existe una extensión holomorfa \hat{f} al conjunto U en la situación de la Definición 6.2.3.

Analizamos primero los polos. Si f tiene un polo en z_0 , la función $1/f$ no se anula en una vecindad pinchada $V \setminus \{z_0\}$ de z_0 . En seguida, $1/f$ es holomorfa allí y cumple que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Entonces $1/f$ tiene una singularidad levantable en z_0 , un cero.

6.2.4 Definición. Si f tiene un polo en z_0 entonces el *orden (o la multiplicidad) del polo de f en z_0* es el orden del cero z_0 de $1/f$.

6.2.5 Teorema. Para una singularidad aislada z_0 de f y $n \in \mathbb{N}$ son equivalentes:

- (I) z_0 es un polo de f del orden n ;
- (II) existe una función holomorfa h en una vecindad pinchada $U \setminus \{z_0\}$ de z_0 tal que $h(z_0) \neq 0$ y

$$(6.2.1) \quad f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z) \quad \text{para todo } z \in U \setminus \{z_0\};$$

- (III) existen una vecindad pinchada $U \setminus \{z_0\}$ de z_0 y constantes positivas M_1, M_2 tales que

$$(6.2.2) \quad M_1 |z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2 |z - z_0|^{-n} \quad \text{para todo } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Demostración. **Inciso (I) implica (II):** Existen una vecindad pinchada $V \setminus \{z_0\}$ y una función holomorfa g en V tal que $g(z_0) \neq 0$ y

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n g(z) \quad \text{para todo } z \in V.$$

La función $h := 1/g$ es bien definida y holomorfa en una vecindad $U \subseteq V$, y se cumple (6.2.1).

Inciso (ii) implica (iii): Como $h(z_0) \neq 0$ y h es holomorfa, existen una vecindad U de z_0 y constantes $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$M_1 \leq |h| \leq M_2 \quad \text{en } U.$$

En seguida, (6.2.1) implica (6.2.2).

Inciso (iii) implica (i): Por (6.2.2) se cumple

$$\frac{1}{M_1} |z - z_0|^n \leq \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{M_2} |z - z_0|^n$$

para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$, es decir, f tiene un polo en z_0 y $1/f$ tiene una extensión holomorfa a U . Además, z_0 es un cero de ella. Sea k el orden de ese cero. Existe una función holomorfa g en U tal que $g(z_0) \neq 0$ y $1/f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$. La desigualdad anterior implica que $k = n$, es decir, n es el orden del polo z_0 de f . \square

Para el comportamiento cerca de singularidades esenciales tenemos

6.2.6 Teorema (Casorati y Weierstraß). *Sea z_0 una singularidad aislada de f . Entonces z_0 es esencial si y sólo si para cada vecindad pinchada $U \setminus \{z_0\}$ de z_0 donde f está definida se tiene que $f(U \setminus \{z_0\})$ es denso en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea z_0 esencial. Por contradicción supongamos que existe una vecindad pinchada $U \setminus \{z_0\}$ tal que $f(U \setminus \{z_0\})$ no es denso en \mathbb{C} . Entonces existe un disco $D_r(w)$ tal que $f(U \setminus \{z_0\}) \cap D_r(w) = \emptyset$. Eso implica que la función $g(z) := 1/(f(z) - w)$ es holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ y tiene valor absoluto acotado por $1/r$. Por lo tanto, g tiene una extensión holomorfa a U . En consecuencia, $f(z) = w + 1/g$ tiene una singularidad levantable (si $g(z_0) \neq 0$) o un polo (si $g(z_0) = 0$) en z_0 , una contradicción.

La afirmación inversa es una consecuencia directa de la clasificación de las singularidades aisladas. \square

Consideremos la relación entre el tipo de una singularidad aislada y el desarrollo de la función en una serie de Laurent:

6.2.7 Teorema. *Sea f holomorfa en $\dot{D}_R(a)$ con la serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k$$

La singularidad aislada a de f es

- (I) *levantable si y sólo si $a_k = 0$ para todo $k < 0$;*
- (II) *un polo del orden n si y sólo si $a_{-n} \neq 0$ y $a_k = 0$ para todo $k < -n$;*
- (III) *esencial si y sólo si $a_k \neq 0$ para una infinidad de índices $k < 0$.*

Demostración. **Inciso (I):** Si a es levantable, entonces la serie de Laurent es la serie de Taylor de la extensión holomorfa de f a a por el Teorema 6.1.4(b) (unicidad de la serie de Laurent), es decir, $a_k = 0$ para $k < 0$. Inversamente, si la serie de Laurent de f es una serie de potencias, su función límite es la extensión holomorfa de f a a .

Inciso (II): La representación

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad a_{-n} \neq 0,$$

es equivalente a $f(z) = (z-a)^{-n}h(z)$ con una función holomorfa h tal que $h(a) \neq 0$, usando

$$h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-a)^k.$$

eso muestra la afirmación.

inciso (III): Se sigue de (I) y (II). □

6.2.8 Ejemplo. (a) La serie de Laurent de $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ es

$$\frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} z^{2\nu},$$

es decir, la singularidad $z = 0$ es levantable, la función es extensible a 0 por el valor 1.

(b) Por el Ejemplo 6.1.5 la función

$$f(z) := \frac{1}{z(z-i)^2}$$

tiene un polo del orden 1 en 0 y un polo del orden 2 en i .

(c) La serie de Laurent de $e^{1/z}$ en $\dot{\mathbb{C}}$ es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k},$$

es decir, el origen es una singularidad esencial.

6.3. Funciones meromorfas y la esfera de Riemann

El comportamiento de una función holomorfa cerca de un polo es muy simple, así que las funciones holomorfas con polos no son más complicadas de tratar que las funciones holomorfas.

6.3.1 Definición. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una función meromorfa en U es una función holomorfa $f: U \setminus P_f \rightarrow \mathbb{C}$ donde P_f es un subconjunto discreto de U y todos los puntos de P_f son polos de f .

Por el Teorema 6.2.7 f tiene en cada punto $z_0 \in U$ un desarrollo en una serie de Laurent con un número finito de coeficientes negativos, lo cual es cero en los puntos de holomorfa de f . Esa serie converge al menos en el anillo más grande centrado en z_0 que es un subconjunto de U .

Si f y g son funciones meromorfas en una región G entonces definimos $f + g$ y fg en $G \setminus (P_f \cup P_g)$ como suma y producto de funciones holomorfas. En un punto $a \in P_f \cup P_g$ la función $f + g$ tiene una singularidad aislada, y su serie de Laurent L_{f+g} en $\dot{D}_r(a)$ para $r > 0$ suficientemente chico es la suma de las series de Laurent L_f y L_g de f y g en $\dot{D}_r(a)$. Como las partes principales de L_f y L_g son finitos, también la parte principal de L_{f+g} es finito, es decir, o bien a es una singularidad removible o un polo de $f + g$. Las representaciones en (3.3.6) de ceros y en (6.2.1) de polos implican que las singularidades aisladas $a \in P_f \cup P_g$ de fg o bien son removibles o son polos. Quitamos de $f + g$ y de fg todas las singularidades removibles y obtenemos como resultado funciones meromorfas en G con $P_{f+g} \subseteq P_f \cup P_g$ y $P_{fg} \subseteq P_f \cup P_g$. Similarmente, si $f \neq 0$ entonces el conjunto de ceros en G es discreto y forma el conjunto de polos de $1/f$, donde nuevamente quitamos las singularidades removibles. Resulta que $f \cdot (1/f)$ es la función constante 1 en $G \setminus (P_f \cup P_{1/f})$ y todas sus singularidades son removibles con valor 1. Entonces $1/f$ es la inversa multiplicativa de f en el anillo de las funciones meromorfas. En consecuencia, es fácil verificar el

6.3.2 Teorema. *Las funciones meromorfas en una región forman un campo.*

El resultado anterior implica que el cociente f/g de dos funciones holomorfas en G , donde $g \neq 0$, es una función meromorfa. Por ejemplo, las funciones racionales y las funciones tangente y cotangente son meromorfas en \mathbb{C} . De esto surge inmediatamente la pregunta si *todas* las funciones meromorfas en G son el cociente de dos funciones holomorfas. Localmente esto es cierto:

6.3.3 Teorema. *Sea f una función meromorfa en U . Entonces cada punto $a \in U$ tiene una vecindad V en U tal que f es el cociente de dos funciones holomorfas g y h en V : $f = g/h$.*

Demostración. Si a no es un polo de f entonces tomamos $g := f$ y $h \equiv 1$ en $V := U \setminus P_f$. Si a es un polo de f del orden n entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}$$

cerca de a , por (6.2.1). □

Si la función meromorfa f tiene nada más un número finito a_1, a_2, \dots, a_m de polos en U , con los ordenes n_1, n_2, \dots, n_m , entonces la función

$$g(z) := (z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2} \dots (z - a_m)^{n_m} f(z)$$

tiene singularidades levantables en a_1, a_2, \dots, a_m . En seguida, f es el cociente de dos funciones holomorfas en U . Ese resultado también es cierto si f tiene un número infinito de polos en U , pero la demostración es mucho más difícil. La veremos después del teorema de Mittag-Leffler.

En el campo de las funciones meromorfas los ceros y los polos de funciones juegan un papel muy similar. Quitemos la asimetría entre estos conceptos, la cual es el hecho que $0 \in \mathbb{C}$ pero que no podemos dar un valor definitivo a una función meromorfa en un polo.

6.3.4 Definición. Formamos la unión de \mathbb{C} con un punto adicional que no está en \mathbb{C} , lo cual denotaremos por “ ∞ ” y lo llamaremos el “punto infinito”:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

El conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ se llama la *esfera de Riemann* o el *plano complejo cerrado*.

6.3.5 Teorema. *Sea \mathcal{O} la colección de los subconjuntos abiertos de \mathbb{C} y de los complementos en $\hat{\mathbb{C}}$ de subconjunto compactos de \mathbb{C} . Entonces el conjunto \mathcal{O} es una topología en $\hat{\mathbb{C}}$ y $\hat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico de Hausdorff compacto. La topología inducida en \mathbb{C} coincide con la topología usual, y \mathbb{C} es un subconjunto abierto y denso de $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. El conjunto vacío es un subconjunto abierto y compacto de \mathbb{C} , así que \mathcal{O} contiene a \emptyset y a $\hat{\mathbb{C}}$. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{O}$, sean $B, C \subseteq A$ subconjuntos que forman una partición de A ($A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$), tales que U_β es un subconjunto abierto de \mathbb{C} para $\beta \in B$ y $U_\gamma = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_\gamma$ donde K_γ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} para $\gamma \in C$. El conjunto

$$V := \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$$

es abierto en \mathbb{C} . Si $C = \emptyset$, entonces V coincide con $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. En consecuencia, ese conjunto es un elemento de \mathcal{O} . Si $C \neq \emptyset$, entonces

$$K := \bigcap_{\gamma \in C} K_\gamma$$

es compacto en \mathbb{C} . Se sigue que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta \cup \bigcup_{\gamma \in C} \hat{\mathbb{C}} \setminus K_\gamma = V \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus K) = \hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus V \cap K), = \hat{\mathbb{C}} \setminus (K \setminus V),$$

donde $K \setminus V$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} . Por consiguiente, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ es un elemento de \mathcal{O} también en este caso.

Si U, V son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} , entonces $U \cap V$ es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, entonces

$$U \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus K) = U \setminus K,$$

lo cual es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Y si K_1, K_2 son subconjuntos compactos de \mathbb{C} entonces

$$(\hat{\mathbb{C}} \setminus K_1) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus K_2) = \hat{\mathbb{C}} \setminus (K_1 \cup K_2),$$

lo cual es un elemento de \mathcal{O} ya que $K_1 \cup K_2$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} . En todo caso, la intersección de dos elementos de \mathcal{O} es un elemento de \mathcal{O} . Estos hechos muestran que \mathcal{O} es una topología en $\hat{\mathbb{C}}$.

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son puntos distintos, entonces existen vecindades abiertas ajenas de ellos en \mathbb{C} , las cuales son también conjuntos abiertos en $\hat{\mathbb{C}}$. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces para cualquier $r > 0$ el disco $D_r(z)$ es una vecindad abierta de z en $\hat{\mathbb{C}}$ y el conjunto $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_r(z)$ es una vecindad abierta de ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$. Estas dos vecindades son además ajenas. Por lo tanto, $\hat{\mathbb{C}}$ es un espacio de Hausdorff.

Notamos que por la propiedad de Hausdorff un punto de $\hat{\mathbb{C}}$ forma un conjunto cerrado en $\hat{\mathbb{C}}$. Particularmente, si U es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces el conjunto $U \setminus \{\infty\}$ es un conjunto abierto en $\hat{\mathbb{C}}$, y también un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de $\hat{\mathbb{C}}$. Existe $\alpha_0 \in A$ tal que $\infty \in U_{\alpha_0}$. El conjunto $K := \hat{\mathbb{C}} \setminus U_{\alpha_0}$ es compacto en \mathbb{C} y $\{U_\alpha \setminus \{\infty\}\}_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}}$ es una cubierta abierta en \mathbb{C} de K . Entonces existe un número finito de índices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A \setminus \{\alpha_0\}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \setminus \{\infty\} \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}.$$

En seguida, $\{U_{\alpha_k}\}_{k=0}^n$ forma una subcubierta abierta finita de $\hat{\mathbb{C}}$. Esto muestra que $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto.

La topología inducida de \mathcal{O} en \mathbb{C} es, por definición, precisamente la colección

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}} := \{U \setminus \{\infty\} \mid U \in \mathcal{O}\}.$$

Como ya vimos arriba, estos conjuntos son conjuntos abiertos de \mathbb{C} . Inversamente, todo subconjunto abierto de \mathbb{C} es un elemento de \mathcal{O} , particularmente \mathbb{C} . Esto muestra que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ coincide con la topología usual en \mathbb{C} y que \mathbb{C} es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$. Si U es una vecindad abierta de ∞ entonces $K := \hat{\mathbb{C}} \setminus U$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} . En seguida, $U \cap \mathbb{C} = (\hat{\mathbb{C}} \setminus K) \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus K \neq \emptyset$ y luego \mathbb{C} es denso en $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Construiremos ahora un homeomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y un espacio métrico: sea

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 . Como subconjunto del espacio normado \mathbb{R}^3 ella es un espacio métrico. Denotamos por

$$\text{PN} := (0, 0, 1) \quad \text{y} \quad \text{PS} := (0, 0, -1)$$

al *polo norte* y al *polo sur* de S^2 . Consideremos el mapeo $\varphi: S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definido como la proyección estereográfica: para $x \in S^2 \setminus \{\text{PN}\}$ sea $\varphi(x)$ el punto único de intersección del rayo pasando por PN y x con el subespacio $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de \mathbb{R}^3 , ver Figura 6.1. Resulta explícitamente la representación

$$(6.3.1) \quad \varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2), & x \neq \text{PN}, \\ \infty, & x = \text{PN}. \end{cases}$$

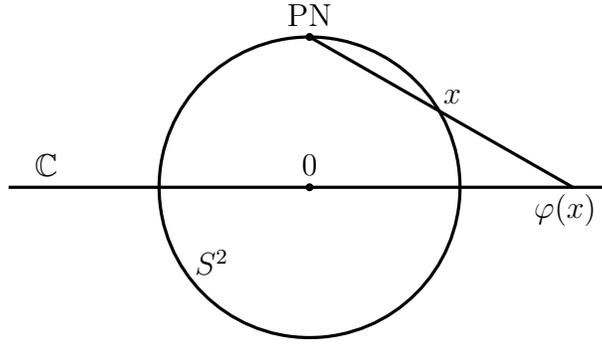


Figura 6.1: Proyección estereográfica

6.3.6 Teorema. *La proyección estereográfica es un homeomorfismo entre S^2 y $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Geométricamente es obvio que φ es biyectiva. Lo verifiquemos algebraicamente: sean $\varphi(x) = \varphi(y)$. Basta considerar el caso $x, y \in S^2 \setminus \{\text{PN}\}$. Usando $|x| = |y| = 1$ obtenemos

$$|\varphi(x)|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3} = \frac{2}{1 - x_3} - 1$$

y similarmente

$$|\varphi(y)|^2 = \frac{2}{1 - y_3} - 1$$

Como $|\varphi(x)| = |\varphi(y)|$, se sigue que $x_3 = y_3$. Además,

$$x_1 = (1 - x_3) \operatorname{Re} \varphi(x) = (1 - x_3) \operatorname{Re} \varphi(y) = y_1$$

y similarmente $x_2 = y_2$. Entonces φ es inyectiva.

Consideremos el mapeo $\vartheta: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ dado por

$$\vartheta(z) := \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1), & z = x + iy \in \mathbb{C}, \\ \text{PN} & z = \infty. \end{cases}$$

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces

$$1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1},$$

así que

$$\varphi(\vartheta(x + iy)) = x + iy.$$

Como además $\varphi(\vartheta(\infty)) = \infty$, se tiene que $\varphi \circ \vartheta = \operatorname{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$. En consecuencia, φ es biyectiva y $\varphi^{-1} = \vartheta$.

Es obvio que $\varphi|_{S^2 \setminus \{PN\}}$ y $\vartheta|_{\mathbb{C}}$ son mapeos continuos respecto a las topologías de S^2 y $\hat{\mathbb{C}}$ (recordando que la topología inducida por la de $\hat{\mathbb{C}}$ en \mathbb{C} coincide con la usual). Falta nada más comprobar continuidad en PN y ∞ . Notamos primero que una vecindad abierta U en S^2 de PN satisface que $S^2 \setminus U$ es un subconjunto compacto de $S^2 \setminus \{PN\}$. Como φ y ϑ son continuas en $S^2 \setminus \{PN\}$ y \mathbb{C} , respectivamente, mandan conjuntos compactos a conjuntos compactos. Por la biyectividad esto implica que la imagen de una vecindad de PN en S^2 bajo φ es una vecindad de ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$, y que la imagen de una vecindad de ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$ bajo ϑ es una vecindad de PN en S^2 . Esto prueba la continuidad de φ y ϑ en PN y ∞ . \square

El Teorema 6.3.6 implica que también $\hat{\mathbb{C}}$ es un espacio métrico, con la métrica inducida por S^2 mediante el homeomorfismo φ , la proyección estereográfica: se define

$$(6.3.2) \quad d_{\hat{\mathbb{C}}}(z, w) := d_{S^2}(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w))$$

para $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$. Obviamente φ y φ^{-1} son isometrías respecto a las dos métricas. Si \mathcal{O} es la topología en $\hat{\mathbb{C}}$ construida en el Teorema 6.3.5 y si \mathcal{O}_d es la topología inducida en $\hat{\mathbb{C}}$ por la métrica, entonces φ y φ^{-1} son continuas respecto a las dos topologías en $\hat{\mathbb{C}}$. Como $\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}} = \varphi \circ \varphi^{-1}$, los mapeos

$$\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}: (\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_d) \quad \text{y} \quad \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}: (\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_d) \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O})$$

son continuos, es decir, \mathcal{O} y \mathcal{O}_d coinciden. En otras palabras, \mathcal{O} es también la topología inducida en $\hat{\mathbb{C}}$ por la métrica $d_{\hat{\mathbb{C}}}$.

Topológicamente identifiquemos los dos espacios S^2 y $\hat{\mathbb{C}}$ y obtenemos así una intuición buena de la topología en $\hat{\mathbb{C}}$. Podemos tratar, como siempre, continuidad de funciones usando sucesiones en $\hat{\mathbb{C}}$. Aquí una sucesión $(z_k) \subseteq \mathbb{C}$ tiende a ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$ si y sólo si $|z_k| \rightarrow \infty$.

También queremos tratar el punto ∞ como una singularidad. Diremos para $z_0 \in \mathbb{C}$ que f es una función meromorfa en z_0 si f está definida y meromorfa en una vecindad abierta de z_0 en \mathbb{C} .

6.3.7 Definición. Sean $r > 0$ y $f: \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Definimos la función $g: \dot{D}_{1/r} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) := f(1/z)$. Entonces f tiene una singularidad aislada en ∞ , y su tipo es el mismo que el de la singularidad 0 de g . Si g es una función meromorfa en $D_{1/r}$ entonces f es una función meromorfa en ∞ . Si $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ es abierto, entonces $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa en U si f es meromorfa en cada punto de U .

Escribiendo $h(z) := 1/z$ quitamos la asimetría entre 0 y ∞ como puntos donde está definida una función f meromorfa considerando la composición $f \circ h$.

Inversamente, trataremos de quitar la asimetría entre 0 y ∞ como valores de f considerando la composición $h \circ f$. Esto es razonable ya que si f tiene un polo en $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ entonces $1/f$ tiene una singularidad removible en z_0 .

6.3.8 Definición. Sea U un subconjunto abierto de $\hat{\mathbb{C}}$. Un mapeo $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se llama un mapeo holomorfo si f es una función meromorfa en U .

Notamos que un mapeo holomorfo es continuo. Si $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un mapeo holomorfo, entonces necesariamente $P_f := f^{-1}(\infty)$ es un subconjunto discreto de U .

Construiremos una asociación entre funciones meromorfas en subconjuntos abiertos de \mathbb{C} y mapeos holomorfos en subconjuntos abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Si U es una vecindad pinchada da ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$ (es decir, si $\mathbb{C} \setminus U$ es compacto) también pedimos que f sea meromorfa en ∞ . Recordemos que f está definida en $U \setminus P_f$. Sea $V \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ el conjunto U si $\mathbb{C} \setminus U$ no es compacto, y sea $V = U \cup \{\infty\}$ si $\mathbb{C} \setminus U$ es compacto. Definimos $\hat{f}: V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ por

$$\hat{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in U \setminus P_f, \\ \infty, & \text{si } z \in P_f \\ \infty, & \text{si } z = \infty \text{ y si } \infty \text{ es un polo,} \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z), & \text{si } z = \infty \text{ y si } \infty \text{ es removible.} \end{cases}$$

En ese caso \hat{f} es un mapeo holomorfo.

Inversamente, sea $V \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ abierto y $\hat{f}: V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un mapeo holomorfo. Definimos el conjunto $U := V \setminus \{\infty\}$. Entonces $f := \hat{f}|_{U \setminus P_f}$ es una función meromorfa. Si V es una vecindad de ∞ , entonces además se tiene que f es meromorfa en ∞ .

Nótese que damos importancia a la distinción entre una función meromorfa, la cual toma valores en \mathbb{C} , y un mapeo holomorfo, lo cual toma valores en $\hat{\mathbb{C}}$. Siempre identifiquemos los mapeos f y \hat{f} de la asociación de arriba. No definimos qué es la derivada de un mapeo holomorfo $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ en los puntos de U , lo cual requeriría un tratamiento mucho más profundo de la geometría diferencial compleja. Tampoco trataremos caminos de integración que pasan por ∞ .

Con esas nuevas nociones formulamos algunos resultados sobre mapeos holomorfos definidos en todo $\hat{\mathbb{C}}$.

6.3.9 Teorema. *Un mapeo holomorfo f en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $f^{-1}(\infty) = \emptyset$ es constante.*

Demostración. Por la hipótesis, $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo, así que $f(\hat{\mathbb{C}})$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} . Particularmente, $g := f|_{\mathbb{C}}$ es una función entera acotada. Por el Teorema de Liouville g es constante. Por la continuidad de f en ∞ también f es constante. \square

Un polinomio tiene sólo una singularidad aislada, un polo en ∞ , así que es un mapeo holomorfo en $\hat{\mathbb{C}}$. Inversamente tenemos

6.3.10 Teorema. *Un mapeo holomorfo f en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ es un polinomio.*

Demostración. Por la hipótesis, $g := f|_{\mathbb{C}}$ es una función entera tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = \infty$. Denotamos su serie de potencias por

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

la cual converge en todo \mathbb{C} . En consecuencia, la función $h(z) := g(1/z)$, la cual está definida en $\hat{\mathbb{C}}$, tiene un polo en 0. Su serie de Laurent

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k},$$

la cual converge en $\hat{\mathbb{C}}$, tiene sólo una parte principal finita, es decir, existe k_0 tal que $a_k = 0$ para todo $k > k_0$. Eso implica que f es un polinomio. \square

Cada función racional es meromorfa y tiene un límite en ∞ , así que es también un mapeo holomorfo en $\hat{\mathbb{C}}$. Mostremos que lo inverso también es cierto:

6.3.11 Teorema. *Los mapeos holomorfos en $\hat{\mathbb{C}}$ son precisamente las funciones racionales.*

Demostración. Nada más falta demostrar que un mapeo holomorfo f en $\hat{\mathbb{C}}$ es una función racional. El conjunto P_f es discreto en $\hat{\mathbb{C}}$ por la definición de un mapeo holomorfo. Como $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, P_f es finito, digamos $P_f \setminus \{\infty\} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. Para todo k sea h_k la parte principal de la serie de Laurent de f en z_k . Entonces h_k es racional y un mapeo holomorfo en $\hat{\mathbb{C}}$. Además, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} h_k(z) = 0$ para todo k , así que $g = f - \sum_{k=1}^m h_k$ es un mapeo holomorfo en $\hat{\mathbb{C}}$. El único posible polo de g es ∞ . Por Teorema 6.3.9 y Teorema 6.3.10 g es un polinomio, y luego f una función racional. \square

6.3.12 Corolario (Fracciones parciales para una función racional). *Toda función racional es la suma de un polinomio y de una combinación lineal sobre \mathbb{C} de términos de la forma*

$$\frac{1}{(z - z_0)^\ell},$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\ell \in \mathbb{N}$.

6.4. El teorema de los residuos

El teorema de los residuos es una generalización del teorema global de Cauchy a funciones con singularidades aisladas.

6.4.1 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y f holomorfa en U con excepción de singularidades aisladas. El *residuo de f en $z \in U$* es el número

$$\operatorname{res}_z f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} f,$$

donde κ es una parametrización de $S_r(z)$ con $r > 0$ tal que z es la única posible singularidad de f en $\overline{D}_r(z)$.

6.4.2 Nota. (a) En la Definición 6.4.1 no importa el radio $r > 0$ mientras que todas las condiciones están satisfechas. En vez de κ uno podría usar cualquier ciclo Γ tal que $n(\Gamma, z) = 1$ y $n(\Gamma, w) = 0$ para toda singularidad no igual a z de f . Eso es una consecuencia del teorema global de Cauchy aplicado en el conjunto $U \setminus P_f$, ya que en ese conjunto los ciclos Γ y κ son homólogos.

(b) Si f es holomorfa en $a \in U$ entonces $\text{res}_a f = 0$ por el teorema de Cauchy. Si a es un polo o una singularidad esencial de f entonces sea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k$$

la serie de Laurent correspondiente de f en a . Se sigue que

$$(6.4.1) \quad \text{res}_a f = a_{-1}.$$

6.4.3 Ejemplo. (a) La función $1/(z - a)$ tiene en a el residuo 1; para $n \geq 2$ la función $1/(z - a)^n$ tiene en a el residuo 0.

(b) Según el Ejemplo 6.1.5 los residuos interesantes de la función $f(z) := 1/z(z - i)^2$ son

$$\text{res}_0 f = -1 \quad \text{y} \quad \text{res}_i f = 1.$$

6.4.4 Teorema (de los residuos). Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, f una función holomorfa en U con la posible excepción de singularidades aisladas y Γ un ciclo con homología nula en U en cuyo traza no hay ninguna singularidad de f . Entonces $n(\Gamma, z) \text{res}_z f \neq 0$ sólo en un subconjunto finito de U y se cumple

$$(6.4.2) \quad \int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{z \in U} n(\Gamma, z) \text{res}_z f.$$

Demostración. El conjunto

$$V := \{z \in U \setminus \text{tr } \Gamma \mid n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

es relativamente compacto en U por el Teorema 4.1.7, es decir, V sólo contiene un número finito de singularidades de f . Y como $\text{res}_z f = 0$ si $z \in \text{tr } \Gamma$ y $n(\Gamma, z) = 0$ si $z \in U \setminus \overline{V}$, la suma en (6.4.2) solo se toma sobre las singularidades de f en V . Sean entonces z_1, z_2, \dots, z_m las singularidades no removibles de f en V , y sea M el conjunto de las singularidades no removibles de f en $U \setminus \overline{V}$. Además, sea h_k la parte principal de la serie de Laurent de f en z_k . Como h_k es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$, la función $f - \sum_{k=1}^m h_k$ es una función holomorfa en $U \setminus M$. Todos los puntos $z \in M$ cumplen $n(\Gamma, z) = 0$. Ese hecho, junto con que Γ es homólogo a cero en U , implica que Γ es homólogo a cero en $U \setminus M$. Por consiguiente, el teorema global de Cauchy implica

$$\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma} h_k.$$

Escribiendo

$$h_k(z) := \sum_{\ell=-1}^{-\infty} a_{k,\ell}(z - z_k)^\ell$$

obtenemos

$$\int_{\Gamma} h_k = \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \int_{\Gamma} a_{k,\ell}(z - z_k)^\ell dz = 2\pi i a_{k,-1} n(\Gamma, z_k) = 2\pi i n(\Gamma, z_k) \operatorname{res}_{z_k} f. \quad \square$$

6.4.5 Definición. Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ abiertos y $V \subset\subset U$. Un ciclo Γ en U es un *ciclo de frontera de V* si satisface

$$\partial V = \operatorname{tr} \Gamma, \quad \forall z \in V: n(\Gamma, z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{V}: n(\Gamma, z) = 0.$$

Un ciclo de la frontera de V en U tiene homología nula en U .

6.4.6 Corolario (del Teorema 6.4.4). *Sean Γ un ciclo de frontera de $V \subset\subset U$ y f holomorfa en U con la posible excepción de singularidades aisladas. Ninguna de las singularidades se encuentre en $\operatorname{tr} \Gamma$. Entonces $\operatorname{res}_z f \neq 0$ sólo en un subconjunto finito de V y se cumple*

$$(6.4.3) \quad \int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{z \in V} \operatorname{res}_z f.$$

Para poder aplicar el Teorema 6.4.4 necesitamos herramientas para calcular residuos.

6.4.7 Teorema. *Sean f, g funciones holomorfas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, posiblemente con excepción de singularidades aisladas, y sea $z_0 \in U$.*

(a) $\operatorname{res}_{z_0}(af + bg) = a \operatorname{res}_{z_0} f + b \operatorname{res}_{z_0} g$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) Si z_0 es un polo del orden n de f , entonces

$$(6.4.4) \quad \operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z - z_0)^n f(z)).$$

Particularmente, si z_0 es un polo del primer orden, entonces

$$(6.4.5) \quad \operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(c) Si f es holomorfa y tiene un cero del primer orden en z_0 , entonces

$$(6.4.6) \quad \operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

(d) Si g es holomorfa en z_0 y si f tiene un polo del primer orden en z_0 , entonces

$$(6.4.7) \quad \operatorname{res}_{z_0}(gf) = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f.$$

Demostración. Inciso (a): Esto es una consecuencia de la Definición 6.4.1 y de la linealidad de la integral.

Inciso (b): Si z_0 es un polo del orden n de f entonces la serie de Laurent de f en z_0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

con $a_{-n} \neq 0$. Se sigue que

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z - z_0)^k.$$

Por (6.4.1) necesitamos encontrar a $a_{-1} = a_{k-n}$ con $k = n - 1$. La fórmula para los coeficientes de una serie de potencias implica (6.4.4).

Inciso (c): La función $1/f$ tiene un polo del primer orden en z_0 , así que (6.4.5) implica que

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{f} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Inciso (d): Si $g(z_0) \neq 0$ entonces gf tiene un polo del primer orden en z_0 , así que el inciso (b) implica

$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z)f(z) = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f.$$

Si g tiene un cero en z_0 entonces gf tiene una singularidad removible en z_0 , por la Proposición 3.3.6 y por el Teorema 6.2.5. Por (6.4.1)

$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = 0 = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f. \quad \square$$

6.5. Aplicaciones del teorema de los residuos en el análisis real

Con el teorema de los residuos uno puede calcular varios integrales sobre funciones reales, para las cuales no se conocen las antiderivadas en forma explícita, es decir, expresas por funciones elementales. El procedimiento es extender los integrandos a funciones holomorfas con singularidades aisladas en subconjuntos abiertos de \mathbb{C} (para ello los integrandos deben de ser realmente analíticos) y calcular la integral de esa extensión sobre un ciclo adecuado en \mathbb{C} . A veces esta manera de calcular una integral es más fácil que la manera directa aún si se conocen antiderivadas.

6.5.1 Teorema. *Sea $R(x, y)$ una función racional de dos variables, con coeficientes complejos, que esté definida siempre si $x^2 + y^2 = 1$. Formamos la función meromorfa en \mathbb{C}*

$$f(z) := \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right).$$

Entonces

$$(6.5.1) \quad \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z f.$$

Demostración. Escribimos $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$ y $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/2i$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right) dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{\kappa(1,0)} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz \\ &= \frac{1}{i} \int_{\kappa(1,0)} f \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z f, \end{aligned}$$

por el Corolario 6.4.6. □

6.5.2 Ejemplo. Sean $a > 1$ y $R(x, y) := 1/(a + x)$. Entonces

$$f(z) := \frac{\frac{1}{z}}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

con $z_1 := -a + \sqrt{a^2 - 1} \in D_1$ y $z_2 := -a - \sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}_1$. En seguida, la simetría del coseno, el Teorema 6.5.1 y el Teorema 6.4.7 implican

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \pi \operatorname{res}_{z_1} f = \frac{2\pi}{z_1 - z_2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Para los próximos resultados necesitamos definir el valor de la integral de una función posiblemente no integrable en un intervalo:

6.5.3 Definición. (a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ continua. La integral

$$\int_a^b f := \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$$

es la *integral impropia de f en $[a, b]$* si existe el límite. Una definición análoga aplica si $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua. Si $c \in (a, b)$ y $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$$

es la *integral impropia de f en $[a, b]$* si existen las dos integrales impropias por separado.

(b) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ continua. La integral

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f$$

es la *integral impropia de f en $[a, +\infty)$* si existe el límite. Una definición análoga aplica si $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua. Si $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^a f + \int_a^{+\infty} f$$

es la *integral impropia de f en $(-\infty, +\infty)$* si existen las dos integrales impropias por separado.

Nótese que una integral impropia, por ejemplo $\int_a^{+\infty} f$, puede ser bien definida aún si la función no es integrable en $[a, +\infty)$, es decir, si $\int_a^{+\infty} |f| = +\infty$.

6.5.4 Definición. (a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, y sea $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ continua.

El límite

$$\text{VP-} \int_a^b f := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right),$$

si existe, es el *valor principal de la integral de f en $[a, b]$* .

(b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua. El límite

$$\text{VP-} \int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f,$$

si existe, es el *valor principal de la integral de f en \mathbb{R}* .

Para una función continua como en Definición 6.5.3 y Definición 6.5.4 la integrabilidad de Lebesgue implica existencia de la integral impropia, la cual implica existencia del valor principal. Las inversas implicaciones no son ciertas en general.

6.5.5 Teorema. *Sea $f(z)$ una función holomorfa con singularidades aisladas en una vecindad de la cerradura del semiplano superior H tal que ninguna singularidad cae en \mathbb{R} . Adicionalmente, supongamos que*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in H}} z f(z) = 0.$$

Entonces

$$(6.5.2) \quad \text{VP-} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{res}_z f.$$

Demostración. Definimos $\gamma_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ por $\gamma_r(t) := re^{it}$. Si r es suficientemente grande, entonces todos los polos de f en el semiplano superior están en D_r , ya que $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. En consecuencia, el Corolario 6.4.6 implica

$$(6.5.3) \quad \int_{[-r, r]} f + \int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f.$$

Estimamos

$$\left| \int_{\gamma_r} f \right| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| L(\gamma_r) = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow \infty$, por la hipótesis en f . Dejamos $r \rightarrow \infty$ en (6.5.3) y obtenemos (6.5.2). \square

Particularmente, si f es una función racional tal que el grado del denominador es al menos el grado del numerador más dos, el Teorema 6.5.5 aplica. En ese caso f es Lebesgue-integrable en \mathbb{R} así que el valor principal de la integral es la integral propia de f en el sentido de Lebesgue, y a la vez la integral impropia en el sentido de Riemann.

6.5.6 Ejemplo. Mostremos que

$$(6.5.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

La función $f(z) := z^2/(1+z^4)$ tiene polos del primer orden en las cuartas raíces de -1 ; con $\zeta := e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i)/2$ ellas son $\zeta, \zeta^3, \zeta^5, \zeta^7$. Precisamente ζ y ζ^3 se encuentran en el semiplano superior, así que el Teorema 6.5.5 y un cálculo elemental implican

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i (\operatorname{res}_\zeta f + \operatorname{res}_{\zeta^3} f) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\zeta^2}{(\zeta - \zeta^3)(\zeta - \zeta^5)(\zeta - \zeta^7)} + \frac{\zeta^6}{(\zeta^3 - \zeta)(\zeta^3 - \zeta^5)(\zeta^3 - \zeta^7)} \right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

6.5.7 Teorema. Sea $f(z)$ una función holomorfa con singularidades aisladas en una vecindad de la cerradura del semiplano superior H tal que ninguna singularidad cae en \mathbb{R} . Adicionalmente, supongamos que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \overline{H}}} f(z) = 0.$$

Entonces

$$(6.5.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Por otro lado, si $f(z)$ es como arriba usando el semiplano inferior, entonces

$$(6.5.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z < 0} \text{res}_z(f(\zeta)e^{-i\zeta}).$$

Que las integrales posiblemente impropias existen es parte de la afirmación.

Antes de la demostración notamos un resultado muy útil:

6.5.8 Lema. Sea $r > 0$. Entonces

$$r \int_0^{\pi/2} |\exp(ire^{it})| dt < \frac{\pi}{2}$$

y

$$r \int_{\pi/2}^{\pi} |\exp(ire^{it})| dt < \frac{\pi}{2}.$$

Demostración. La concavidad del seno en $[0, \pi/2]$ implica que

$$\text{sen } t \geq \frac{2t}{\pi} \quad \text{para todo } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calculamos con (1.5.8):

$$\begin{aligned} r \int_0^{\pi/2} |\exp(ire^{it})| dt &= r \int_0^{\pi/2} \exp(-r \text{sen } t) dt \leq r \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2r}{\pi}t\right) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{2r}{\pi}t\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r \int_{\pi/2}^{\pi} |\exp(ire^{it})| dt &= r \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(-r \text{sen } t) dt = r \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(-r \text{sen}(\pi - t)) dt \\ &= r \int_0^{\pi/2} \exp(-r \text{sen } t) dt < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 6.5.7. Nada más mostraremos (6.5.5), ya que la demostración de (6.5.6) es análoga. Sea U la vecindad de \overline{H} donde f está definida. Como $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ existe $r_0 > 0$ tal que todas las singularidades de f en el semiplano superior se encuentran en D_{r_0} . El número de aquellas singularidades es finito. Sea γ_0 un camino de 0 a ir_0 tal que ninguna de las singularidades de f cae en $\text{tr } \gamma_0$ y tal que γ_0 va de frontera a frontera en $D := \{z \in D_{r_0} \mid \text{Im } z > 0\}$. Sea U_1 la componente de $D \setminus \text{tr } \gamma_0$ a la derecha de γ_0 , y sea U_2 la componente de $D \setminus \text{tr } \gamma_0$ a la izquierda de γ_0 .

Para $r > r_0$ definimos caminos

$$\begin{aligned}\gamma_{r,1}(t) &:= re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ \gamma_{r,2}(t) &:= re^{it}, & t &\in [\pi/2, \pi].\end{aligned}$$

Se sigue que $[0, r] + \gamma_{r,1} - [ir_0, ir] - \gamma_0$ y $[-r, 0] + \gamma_0 + [ir_0, ir] + \gamma_{r,2}$ son ciclos de homología nula en U . Por el Corolario 6.4.6

$$(6.5.7) \quad \left(\int_{[0,r]} + \int_{\gamma_{r,1}} - \int_{[ir_0,ir]} - \int_{\gamma_0} \right) f(z)e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{z \in U_1} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta})$$

y

$$(6.5.8) \quad \left(\int_{[-r,0]} + \int_{\gamma_0} + \int_{[ir_0,ir]} + \int_{\gamma_{r,2}} \right) f(z)e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{z \in U_2} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Por el Lema 6.5.8 se tiene

$$\begin{aligned}(6.5.9) \quad \left| \int_{\gamma_{r,1}} f(z)e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} f(re^{it}) \exp(ire^{it}) ire^{it} dt \right| \\ &\leq \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z)| r \int_0^{\pi/2} |\exp(ire^{it})| dt \\ &\leq \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z)| \frac{\pi}{2} \\ &\rightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow \infty$, por la hipótesis en f . La función $t \mapsto f(it)$ es acotada en $[r_0, \infty)$ por la definición de r_0 y por las hipótesis en f . En seguida, la función $t \mapsto f(it)e^{-t}$ es Lebesgue integrable en $[r_0, \infty)$ y existe

$$C := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[ir_0,ir]} f(z)e^{iz} dz = i \int_{r_0}^{+\infty} f(it)e^{-t} dt.$$

estos hechos implican, si dejamos $r \rightarrow \infty$ en (6.5.7), que existe el límite

$$\begin{aligned}(6.5.10) \quad \int_0^{\infty} f(x)e^{ix} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[0,r]} f(z)e^{iz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{z \in U_1} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) + C + \int_{\gamma_0} f(z)e^{iz} dz.\end{aligned}$$

Por otro lado, el Lema 6.5.8 implica que $\int_{\gamma_{r,2}} f(z)e^{iz} dz \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, similarmente como en (6.5.9). Entonces dejar $r \rightarrow \infty$ en (6.5.8) implica que existe el límite

$$\begin{aligned}(6.5.11) \quad \int_{-\infty}^0 f(x)e^{ix} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r,0]} f(z)e^{iz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{z \in U_2} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) - C - \int_{\gamma_0} f(z)e^{iz} dz.\end{aligned}$$

La suma de las ecuaciones (6.5.10) y (6.5.11) implica (6.5.5), ya que $U_1 \cup U_2$ contiene todas las singularidades de f en el semiplano superior. \square

6.5.9 Nota. Si f es holomorfa en \mathbb{C} con singularidades aisladas y tal que $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ en \mathbb{C} , entonces (6.5.5) y (6.5.6) implican que

$$(6.5.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = \pi i \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) - \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{-i\zeta}) \right)$$

y

$$(6.5.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx = \pi \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) + \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{-i\zeta}) \right).$$

Si $f(x) \in \mathbb{R}$ para $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$(6.5.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} \, dx = -2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) \right)$$

y

$$(6.5.15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} \, dx = 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) \right).$$

6.5.10 Ejemplo. Sea $a > 0$. Entonces por (6.5.14)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} \, dx = -\pi \operatorname{Im} \left(\operatorname{res}_{ia} \frac{e^{iz}}{(z - ia)(z + ia)} \right) \\ &= -\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-a}}{2ia} \right) = \frac{\pi}{2a} e^{-a}. \end{aligned}$$

El Teorema 6.5.7 no permite calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$, ya que el integrando $\frac{e^{ix}}{x}$ tendría un polo en 0. No obstante, podemos extender el método de ese teorema para cubrir el caso de un polo del primer orden en \mathbb{R} :

6.5.11 Teorema. Sea $f(z)$ una función holomorfa con singularidades aisladas en una vecindad de la cerradura del semiplano superior H . Supongamos que las singularidades de f en \mathbb{R} forman un subconjunto finito de $(-R, R)$, $R > 0$, y que sean exclusivamente polos del primer orden. Adicionalmente, supongamos que

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in \bar{H}}} f(z) = 0.$$

Entonces

$$(6.5.16) \quad \left(\int_{-\infty}^{-R} + \operatorname{VP} \int_{-R}^R + \int_R^{+\infty} \right) f(x)e^{ix} \, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}) + \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} \operatorname{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Demostración. Sean $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ las singularidades de f en \mathbb{R} , todas polos del primer orden, y sea h_k la parte principal de la serie de Laurent de f en z_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Entonces $h_k(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ y $z \in \overline{H}$. Luego la función

$$g := f - \sum_{k=1}^m h_k$$

satisface todas las hipótesis del Teorema 6.5.7. Además, como $z \mapsto h_k(z)e^{iz}$ es holomorfa en H , $\text{res}_z(g(\zeta)e^{i\zeta}) = \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta})$ para todo $z \in H$. Estos hechos implican que

$$(6.5.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{res}_z(f(\zeta)e^{i\zeta}).$$

Fijemos k . Para $r, \rho > 0$ definimos caminos

$$\begin{aligned} \gamma_{r,1}(t) &:= R + re^{it}, & t \in [0, \pi/2] \\ \gamma_{r,2}(t) &:= -R + re^{it}, & t \in [\pi/2, \pi] \\ \gamma_\rho(t) &:= z_k + \rho e^{it}, & t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Por el Corolario 6.4.6

$$(6.5.18) \quad \left(\int_{[R, R+r]} + \int_{\gamma_{r,1}} + \int_{[R+ir, R]} \right) h_k(z)e^{iz} dz = 0,$$

$$(6.5.19) \quad \left(\int_{[-R, z_k - \rho]} - \int_{\gamma_\rho} + \int_{[z_k + \rho, R]} + \int_{[R, R+ir]} + \int_{[R+ir, -R+ir]} + \int_{[-R+ir, -R]} \right) h_k(z)e^{iz} dz = 0,$$

y

$$(6.5.20) \quad \left(\int_{[-R-r, -R]} + \int_{[-R, -R+ir]} + \int_{\gamma_{r,2}} \right) h_k(z)e^{iz} dz = 0.$$

Denotamos

$$C_1 := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[R, R+ir]} h_k(z)e^{iz} dz = i \int_0^{+\infty} h_k(R+it)e^{-t} dt$$

y

$$C_2 := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-R, -R+ir]} h_k(z)e^{iz} dz = i \int_0^{+\infty} h_k(-R+it)e^{-t} dt.$$

Estas integrales existen porque h_k es una función acotada en $\mathbb{C} \setminus D_R$. Por otro lado, el Lema 6.5.8 implica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{r,1}} h_k(z)e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} h_k(R+re^{it}) \exp(i(R+re^{it})) ire^{it} dt \right| \\ (6.5.21) \quad &\leq \max_{|z-R|=r} |h_k(z)| r \int_0^{\pi/2} |\exp(ire^{it})| dt \\ &\leq \max_{|z-R|=r} |h_k(z)| \frac{\pi}{2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow \infty$, ya que $h_k(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Similarmente,

$$(6.5.22) \quad \int_{\gamma_{r,2}} h_k(z) e^{iz} dz \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow +\infty$. Dejamos $r \rightarrow \infty$ en (6.5.18) y usamos (6.5.21):

$$(6.5.23) \quad \int_R^{+\infty} h_k(x) e^{ix} dx = C_1.$$

Similarmente, (6.5.20) y (6.5.22) implican

$$(6.5.24) \quad \int_{-\infty}^{-R} h_k(x) e^{ix} dx = -C_2.$$

Estimamos para $r \geq R$:

$$(6.5.25) \quad \left| \int_{[R+ir, -R+ir]} h_k(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_R^{-R} h_k(ir+t) e^{i(ir+t)} dt \right| \leq 2R \max_{|z| \geq R} |h_k(z)| e^{-r} \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow \infty$. La ecuación (6.5.25) implica, dejando $r \rightarrow \infty$ en (6.5.19):

$$(6.5.26) \quad \left(\int_{[-R, z_k - \rho]} - \int_{\gamma_\rho} + \int_{[z_k + \rho, R]} \right) h_k(z) e^{iz} dz = C_2 - C_1,$$

para toda ρ suficientemente chica.

La función $h_k(z) e^{iz}$ tiene un polo del primer orden en z_k . Si ponemos

$$c := \text{res}_{z_k}(h_k(z) e^{iz}) = \text{res}_{z_k}(f(z) e^{iz})$$

entonces existe una función entera h tal que $h_k(z) e^{iz} = c/(z - z_k) + h$. Para $\rho \in (0, R - |z_k|)$ se sigue que

$$(6.5.27) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} h_k(z) e^{iz} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{c}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\pi h(\gamma_\rho(t)) \rho i e^{it} dt \\ = i\pi \text{res}_{z_k}(f(z) e^{iz}).$$

Este hecho nos da, dejando $\rho \rightarrow 0$ en (6.5.26):

$$(6.5.28) \quad \text{VP-} \int_{-R}^R h_k(x) e^{ix} dx = C_2 - C_1 + i\pi \text{res}_{z_k}(f(z) e^{iz}).$$

Juntando (6.5.23), (6.5.24) y (6.5.28) obtenemos

$$(6.5.29) \quad \left(\int_{-\infty}^{-R} + \text{VP-} \int_{-R}^R + \int_R^{+\infty} \right) h_k(x) e^{ix} dx = i\pi \text{res}_{z_k}(f(z) e^{iz}).$$

En el último pasa sumamos (6.5.17) con (6.5.29) para todo k y obtenemos (6.5.16). \square

6.5.12 Ejemplo. Calculemos la integral de $\operatorname{sen} x/x$ sobre \mathbb{R} en el sentido del Teorema 6.5.11:

$$\left(\int_{-\infty}^{-1} + \text{VP-} \int_{-1}^1 + \int_1^{+\infty} \right) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{iz}}{z} \right) = \operatorname{Im}(\pi i) = \pi.$$

Y como el integrando tiene extensión continua a \mathbb{R} , el valor principal de la integral en $[-1, 1]$ es la integral propia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

Mostremos tres variantes de calcular integrales sobre $[0, \infty)$.

6.5.13 Teorema. Sea f una función racional tal que el grado del denominador es al menos el grado del numerador más dos, tal que f no tiene polos en $(0, \infty)$ y tal que f es holomorfa en 0 o tiene un polo del primer orden en 0. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Entonces la función $x \mapsto x^\alpha f(x)$ es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$ y

$$(6.5.30) \quad \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z(\zeta^\alpha f(\zeta)).$$

Aquí la función ζ^α es la rama de la α -ésima potencia en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con $(-1)^\alpha = e^{\alpha\pi i}$.

Demostración. Consideramos la rama de la α -ésima potencia en $G := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ dada por

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log|z| + i\alpha \arg z), \quad \arg z \in (0, 2\pi).$$

Para $0 < \varepsilon < \rho < r$ definimos caminos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= [\rho + i\varepsilon, r + i\varepsilon], \\ \gamma_3 &:= [\rho - i\varepsilon, r - i\varepsilon]. \end{aligned}$$

Con la notación $r_\varepsilon := \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$ y $\rho_\varepsilon := \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2}$ definimos

$$\gamma_2(t) := r_\varepsilon e^{it}, \quad t \in [s_0, s_1], \quad \gamma_2(s_0) = r + i\varepsilon, \quad \gamma_2(s_1) = r - i\varepsilon$$

y

$$\gamma_4(t) := \rho_\varepsilon e^{it}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \gamma_4(t_0) = \rho + i\varepsilon, \quad \gamma_4(t_1) = \rho - i\varepsilon.$$

En esto supongamos que $s_0, s_1, t_0, t_1 \in [0, 2\pi]$. En seguida, $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ es un ciclo de frontera de un conjunto abierto $U \subset\subset G$. Siempre tomamos ρ y ε tan chicos y r tan grande que todos los polos de f (con excepción del posible polo en 0) se encuentran en U . El Corolario 6.4.6 implica que

$$(6.5.31) \quad \int_\Gamma z^\alpha f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in \dot{C}} \operatorname{res}_z(\zeta^\alpha f(\zeta)),$$

independientemente de ε, ρ, r .

Por la condición en los grados, por el Teorema 3.6.1 y por la cota estándar (Teorema 2.1.6) obtenemos para r grande que

$$\left| \int_{\gamma_2} z^\alpha f(z) dz \right| \leq 2\pi r_\varepsilon C r_\varepsilon^{\alpha-2},$$

para una constante C que no depende de ε, ρ, r . Como $r_\varepsilon \rightarrow r$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, esto implica que

$$(6.5.32) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} z^\alpha f(z) dz = 0.$$

Por otro lado, $|f(z)| \leq C/|z|$ para una constante C en una vecindad de 0, por el Teorema 6.2.5. En consecuencia,

$$\left| \int_{\gamma_4} z^\alpha f(z) dz \right| \leq 2\pi \rho_\varepsilon C \rho_\varepsilon^{\alpha-1},$$

así que

$$(6.5.33) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} z^\alpha f(z) dz = 0.$$

Notemos que nuestra elección de rama de z^α implica para $z = x + iy$, $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (x + iy)^\alpha = \lim_{y \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{\alpha}{2} \log(x^2 + y^2) + i\alpha \operatorname{Arg}(x + iy)\right) = \exp(\alpha \log x) = x^\alpha$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} (x + iy)^\alpha &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{\alpha}{2} \log(x^2 + y^2) + i\alpha(\operatorname{Arg}(x + iy) + 2\pi)\right) \\ &= \exp(\alpha \log x + 2\pi i\alpha) = x^\alpha e^{2\pi i\alpha}. \end{aligned}$$

Para ρ, r fijos la función Arg es continua en una vecindad del conjunto $[\rho, r] \subseteq \mathbb{C}$. Luego la función $t \mapsto (t + i\varepsilon)^\alpha f(t + i\varepsilon)$ converge a $t \mapsto t^\alpha f(t)$ uniformemente en $[\rho, r]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por consiguiente,

$$(6.5.34) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} z^\alpha f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\rho^r (t + i\varepsilon)^\alpha f(t + i\varepsilon) dt = \int_\rho^r t^\alpha f(t) dt.$$

Similarmente,

$$(6.5.35) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} z^\alpha f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\rho^r (t - i\varepsilon)^\alpha f(t - i\varepsilon) dt = e^{2\pi i\alpha} \int_\rho^r t^\alpha f(t) dt.$$

Juntando (6.5.34), (6.5.35), (6.5.32), (6.5.33) y (6.5.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
 (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x) dx &= (1 - e^{2\pi i \alpha}) \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_\rho^r x^\alpha f(x) dx \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1 - \gamma_3} z^\alpha f(z) dz \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Gamma z^\alpha f(z) dz \\
 &= 2\pi i \sum_{z \in \dot{C}} \text{res}_z(\zeta^\alpha f(\zeta)),
 \end{aligned}$$

es decir, (6.5.30). □

6.5.14 Ejemplo. para $\alpha \in (0, 1)$ calculamos con el Teorema 6.5.13:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(x+1)} dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \text{res}_{-1} \left(\frac{\zeta^\alpha}{\zeta(\zeta+1)} \right) \\
 &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \frac{e^{i\pi\alpha}}{-1} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi\alpha)}.
 \end{aligned}$$

6.5.15 Teorema. Sea f una función racional tal que el grado del denominador es al menos el grado del numerador más dos, tal que f no tiene polos en $[0, \infty)$. Entonces f es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$ y

$$(6.5.36) \quad \int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{z \neq 0} \text{res}_z(f(\zeta) \log \zeta).$$

Aquí \log es la rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con $\log(-1) = i\pi$.

Demostración. Usamos los mismos caminos de integración como en la demostración del Teorema 6.5.13. Sea \log una rama del logaritmo en $G := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y $\arg := \text{Im} \log$ la rama del argumento respectiva. Para r grande y ε chica

$$\sup_{z \in \text{tr } \gamma_2} |\log z| = \sqrt{(\log r_\varepsilon)^2 + \sup_{z \in \text{tr } \gamma_2} (\arg z)^2} \leq \sqrt{2} \log r_\varepsilon.$$

Estimamos

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) \log z dz \right| \leq 2\pi r_\varepsilon C r_\varepsilon^{-2} \sqrt{2} \log r_\varepsilon,$$

así que

$$(6.5.37) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2} f(z) \log z dz = 0.$$

Similarmente,

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) \log z dz \right| \leq 2\pi \rho_\varepsilon C \sqrt{2} |\log \rho_\varepsilon|,$$

así que

$$(6.5.38) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_4} f(z) \log z \, dz = 0.$$

Notemos que nuestra elección de rama del logaritmo implica para $z = x + iy$, $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Log}(x + iy) = \log x$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \log(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \text{Log}(x + iy) + 2\pi i = \log x + 2\pi i.$$

Como en la demostración del Teorema 6.5.13 se sigue que

$$(6.5.39) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z) \log z \, dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho}^r f(t + i\varepsilon) \log(t + i\varepsilon) \, dt = \int_{\rho}^r f(t) \log t \, dt$$

y

$$(6.5.40) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} f(z) \log z \, dz = \int_{\rho}^r f(t) (\log t + 2\pi i) \, dt = \int_{\rho}^r f(t) \log t \, dt + 2\pi i \int_{\rho}^r f(t) \, dt.$$

Juntando (6.5.39), (6.5.40), (6.5.37), (6.5.38) y (6.5.36) obtenemos

$$\begin{aligned} 2\pi i \int_0^{+\infty} f(t) \, dt &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow +\infty} 2\pi i \int_{\rho}^r f(t) \, dt = - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1 - \gamma_3} f(z) \log z \, dz \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma} f(z) \log z \, dz = -2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{res}_z(f(\zeta) \log \zeta), \end{aligned}$$

es decir, (6.5.36). □

6.5.16 Ejemplo. La función $f(z) := 1/(1 + z^3)$ tiene polos del primer orden en -1 , $z_0 := e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$ y \bar{z}_0 . Se sigue que

$$\text{res}_{-1} \frac{\log z}{1 + z^3} = \text{res}_{-1} \frac{\log z}{(1 + z)(1 - z + z^2)} = \frac{i\pi}{3},$$

$$\text{res}_{z_0} \frac{\log z}{1 + z^3} = \text{res}_{z_0} \frac{\log z}{(z + 1)(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} = \frac{2i\pi/3}{(3 + i\sqrt{3})i\sqrt{3}} = \frac{\pi(\sqrt{3} - i)}{18}$$

y

$$\text{res}_{\bar{z}_0} \frac{\log z}{1 + z^3} = -\frac{5\pi(\sqrt{3} + i)}{18}.$$

Se sigue del Teorema 6.5.15 que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3} \, dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.5.17 Teorema. Sea f una función racional como en el Teorema 6.5.15, y sea \log la misma rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Adicionalmente supongamos que f toma valores reales en \mathbb{R} . Entonces

$$(6.5.41) \quad \int_0^{\infty} f(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta) \log^2 \zeta).$$

Aquí $\log^2 z := (\log z)^2$.

Demostración. Usamos los mismos caminos como en la demostración del Teorema 6.5.13. Sea \log la rama del logaritmo en $G := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con $\log(-1) = i\pi$. Como en la demostración del Teorema 6.5.15 obtenemos que

$$(6.5.42) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2} f(z) \log^2 z \, dz = 0$$

y

$$(6.5.43) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_4} f(z) \log^2 z \, dz = 0.$$

Similarmente como allá

$$(6.5.44) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z) \log^2 z \, dz = \int_{\rho}^r f(t) \log^2 t \, dt$$

y

$$(6.5.45) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} f(z) \log^2 z \, dz &= \int_{\rho}^r f(t) (\log t + 2\pi i)^2 \, dt \\ &= \int_{\rho}^r f(t) \log^2 t \, dt + 4\pi i \int_{\rho}^r f(t) \log t \, dt - 4\pi^2 \int_{\rho}^r f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Entonces (6.5.44), (6.5.45), (6.5.42) y (6.5.43) implican que

$$\begin{aligned} -4\pi i \int_0^{+\infty} f(t) \log t \, dt &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma} f(z) \log^2 z \, dz - 4\pi^2 \int_0^{+\infty} f(t) \, dt \\ &= 2\pi i \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z(f(\zeta) \log^2 \zeta) - 4\pi^2 \int_0^{+\infty} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Como la última integral es real, basta tomar la parte imaginaria para obtener (6.5.41). \square

6.5.18 Ejemplo. Sea $a > 0$. Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \operatorname{res}_{ia} \frac{\log^2 z}{(z - ia)(z + ia)} &= \operatorname{Re} \frac{(\log ia)^2}{2ia} = \operatorname{Re} \frac{(\log a + i\pi/2)^2}{2ia} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\log^2 a + i\pi \log a - \pi^2/4}{2ia} = \frac{\pi \log a}{2a} \end{aligned}$$

y

$$\operatorname{Re} \operatorname{res}_{-ia} \frac{\log^2 z}{(z-ia)(z+ia)} = \operatorname{Re} \frac{(\log(-ia))^2}{-2ia} = \operatorname{Re} \frac{(\log a + i3\pi/2)^2}{-2ia} = \frac{-3\pi \log a}{2a}.$$

En seguida, el Teorema 6.5.17 implica que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \log a}{2a}.$$

6.6. Consecuencias teóricas del teorema de los residuos

El teorema de los residuos tiene también consecuencias importantes para el desarrollo de la teoría del análisis complejo. El próximo resultado es básico en esto.

6.6.1 Teorema (Principio del argumento). *Sean G una región, f una función meromorfa no constante en G y $w \in \mathbb{C}$. Escribimos $f^{-1}(w) = \{a_1, a_2, \dots\}$ y $P_f = \{b_1, b_2, \dots\}$, con los ordenes $\operatorname{ord}(a_1), \operatorname{ord}(a_2), \dots$ y $\operatorname{ord}(b_1), \operatorname{ord}(b_2), \dots$. Si Γ es un ciclo en G con homología nula que no pasa por ninguno de estos puntos, entonces*

$$(6.6.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_k n(\Gamma, a_k) \operatorname{ord}(a_k) - \sum_k n(\Gamma, b_k) \operatorname{ord}(b_k).$$

Las sumas tienen nada más un número finito de sumandos no nulos.

Demostración. Para cualquier k tenemos $\operatorname{ord}(a_k) < \infty$, ya que G es conexo y f no es constante, por el Teorema 3.3.7. Por la Proposición 3.3.6 existe una función holomorfa g sin ceros en una vecindad de a_k tal que $f(z) = w + (z - a_k)^{\operatorname{ord}(a_k)} g(z)$. Para $\mu := \operatorname{ord}(a_k)$ se sigue que

$$\frac{f'(z)}{f(z) - w} = \frac{\mu(z - a_k)^{\mu-1} g(z) + (z - a_k)^{\mu} g'(z)}{(z - a_k)^{\mu} g(z)} = \frac{\mu}{z - a_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como g'/g es una función holomorfa,

$$\operatorname{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z) - w} = \operatorname{ord}(a_k).$$

Similarmente, para todo k

$$\operatorname{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z) - w} = -\operatorname{ord}(b_k).$$

Por consiguiente, (6.6.1) es una consecuencia del teorema de los residuos. Que las sumas son finitas es una afirmación de ese teorema. \square

6.6.2 Corolario. En la situación del Teorema 6.6.1 sea Γ un ciclo de frontera de un subconjunto abierto $V \subset\subset G$. Sea $N(w)$ el número de puntos en $f^{-1}(w) \cap V$, contando las multiplicidades, y sea $N(\infty)$ el número de polos de f en V , contando las multiplicidades. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = N(w) - N(\infty).$$

6.6.3 Nota. El nombre del Teorema 6.6.1 significa lo siguiente: si γ es un lazo en G , entonces podemos escribir la integral como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{\zeta - w} d\zeta = n(f \circ \gamma, w).$$

Y esta representación cuenta las vueltas la imagen de γ bajo f da alrededor del punto w , lo cual es, módulo el factor 2π , el cambio del argumento a lo largo de $f \circ \gamma$ respecto a w .

6.6.4 Teorema. Sean G una región y f una función holomorfa en G . $f - w_0$ tenga en z_0 un cero del orden finito $\mu \geq 1$. Entonces existen vecindades abiertas $V \subseteq G$ de z_0 y W de w_0 tal que $W \subseteq f(V)$ y tal que para todo $w \in W \setminus \{w_0\}$ existen precisamente μ puntos $z \in V \cap f^{-1}(w)$. Además, cada uno de estos puntos es un cero del primer orden de $f - w$.

Demostración. Los ceros de $f - w_0$ y de f' forman un conjunto discreto en G ya que f no es constante. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}_{\varepsilon}(z_0) \subseteq G$ y tal que $\overline{D}_{\varepsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$ no contiene ceros de $f - w_0$ y f' . Ponemos $V := D_{\varepsilon}(z_0)$ y $\kappa := \kappa(\varepsilon, z_0)$. Sea W la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{tr}(f \circ \kappa)$ que contiene a w_0 . Para $w \in \mathbb{C} \setminus \text{tr}(f \circ \kappa)$ el número de ceros de $f - w$ en V según las multiplicidades es

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \kappa} \frac{1}{\zeta - w} d\zeta = n(f \circ \kappa, w).$$

Como la función $n(f \circ \kappa, \cdot)$ es constante en W y como f' no tiene ceros en $V \setminus \{z_0\}$ se sigue la afirmación. \square

6.6.5 Corolario. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y f una función holomorfa en U . Existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de z_0 tal que $f|_V$ es una biyección entre V y la vecindad abierta $f(V)$ de $f(z_0)$ si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$.

6.6.6 Nota. Podemos analizar de manera todavía más fina el comportamiento de una función holomorfa. Sea $z_0 \in G$ en el Teorema 6.6.4 un cero del orden μ de $f - w_0$. Por la Proposición 3.3.6 existe un función holomorfa g en G tal que $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = w_0 + (z - z_0)^{\mu} g(z)$. En una vecindad abierta y suficientemente chica $V \subseteq G$ de z_0 existe una rama g_1 de la μ -ésima raíz de g , ya que $g(z_0) \neq 0$. Definimos $h(z) := (z - z_0)g_1(z)$, así que $f(z) = w_0 + h(z)^{\mu}$ para $z \in V$. Como $h'(z_0) = g_1(z_0) \neq 0$, por el Corolario 6.6.5 la función h es una biyección de una vecindad abierta $V_1 \subseteq V$ de z_0 y la vecindad abierta $h(V_1)$ de $f(z_0)$. Entonces $f|_{V_1}$ es la composición de la función biholomorfa h , la potencia $\zeta \mapsto \zeta^{\mu}$ y la traslación $\xi \mapsto \xi + w_0$.

6.6.7 Teorema (Rouché). Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y f, g funciones holomorfas en U . Sea Γ un ciclo de frontera de un subconjunto abierto $V \subset\subset U$. Si $|f - g| < |f|$ en $\text{tr } \Gamma$ entonces f y g tienen el mismo número de ceros en V , contados con multiplicidades.

Demostración. Para $\lambda \in [0, 1]$ consideremos las funciones $h_\lambda := f + \lambda(g - f)$ en U . Se tiene $h_0 = f$ y $h_1 = g$. Como $|\lambda(g - f)| \leq |g - f| < |f|$ la función h_λ no tiene cero en $\text{tr } \Gamma$. En seguida, el número de ceros de h_λ en V es dado por

$$N_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))} dz.$$

Como el integrando depende continuamente de λ , el Teorema 2.3.4(a) implica que la función $\lambda \mapsto N_\lambda$ es continua en $[0, 1]$. Ya que $N_\lambda \in \mathbb{Z}$, esa función es constante, y particularmente $N_0 = N_1$. \square

7 Transformaciones conformes

Los mapeos conformes de subconjuntos del plano preservan ángulos y orientación. Muchas aplicaciones del análisis complejo en la teoría de fluidos, en elasticidad y en electromagnetismo están basadas en estas propiedades.

7.1. Transformaciones conformes

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea γ un camino suave con punto inicial $z_0 = \gamma(0)$. La *semitangente* de γ en z_0 es el rayo $\{z_0 + s\gamma'(0) \mid s \geq 0\}$. Si γ_1, γ_2 son dos caminos de ese tipo, entonces el *ángulo orientado* entre γ_1 y γ_2 en z_0 es el ángulo entre las semitangentes:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \in [0, 2\pi).$$

Si f es una función realmente diferenciable en una vecindad de z_0 que además tiene una inversa diferenciable, entonces $f \circ \gamma$ es un camino suave para todo camino suave γ . Decimos que f *preserva ángulos y orientación* si se cumple

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$$

para todos caminos suaves con punto inicial z_0 como arriba.

7.1.1 Definición. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ una función. f se llama *localmente conforme* si es realmente diferenciable, local y diferenciablemente invertible y si f preserva ángulos y orientación en cada punto de G . f se llama *conforme* si f es localmente conforme y una biyección entre G y $f(G)$.

7.1.2 Teorema. Una función f entre regiones en \mathbb{C} es localmente conforme si y sólo si f es localmente biholomorfa. f es conforme si y sólo si f es biholomorfa.

Demostración. Basta mostrar las afirmaciones locales. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea f definida en una vecindad de z_0 . Sea primero f biholomorfa, es decir, f' no tiene ceros. Si γ_1, γ_2 son caminos suaves con $\gamma_j(0) = z_0$ para $j = 1, 2$, entonces las reglas de derivación al final de la sección 1.3 implican que

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{(f \circ \gamma_2)'(0)}{(f \circ \gamma_1)'(0)} = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_2'(0)}{f'(z_0)\gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Inversamente, sea f conforme. Definimos caminos $\gamma_s(t) := z_0 + te^{is}$ para $s \in [0, 2\pi)$. Se sigue para toda s que

$$\begin{aligned} \arg e^{is} &= \angle(\gamma_0, \gamma_s) = \angle(f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_s) \\ &= \arg \frac{f_z(z_0)e^{is} + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-is}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} = \arg \left(\frac{e^{is}f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2is}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} \right). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2is}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} \in \mathbb{R} \quad \text{para todo } s \in [0, 2\pi).$$

Supongamos por contradicción que $f_{\bar{z}}(z_0) \neq 0$. Poniendo $\alpha := f_z(z_0)/f_{\bar{z}}(z_0)$ obtenemos que

$$(7.1.1) \quad h(s) := \frac{\alpha + e^{-2is}}{\alpha + 1} \in \mathbb{R} \quad \text{para todo } s \in [0, 2\pi).$$

Definimos

$$(7.1.2) \quad \beta := h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\alpha - i}{\alpha + 1} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \gamma := h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que

$$\alpha = \frac{i + \beta}{1 - \beta} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$$

y luego que

$$i = (1 - \beta) \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - \beta \in \mathbb{R},$$

una contradicción. Entonces $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ es cierto y f es complejamente diferenciable en z_0 . Como z_0 era arbitrario, f es holomorfa. Y como f es biyectiva, el Corolario 6.6.5 implica que f' no tiene ceros, es decir, que f es biholomorfa. \square

7.1.3 Ejemplo. La exponencial es biholomorfa entre la tira $G := \{\text{Im } z \in (-\pi, \pi)\}$ y $G^* := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Una línea paralela al eje real $\{t + ir \mid t \in \mathbb{R}\}$ tiene como imagen un rayo saliendo de 0: $\{te^{ir} \mid t > 0\}$. Una línea paralela al eje imaginario $\{r + it \mid t \in (-\pi, \pi)\}$ tiene como imagen una circunferencia perforada $\{e^r e^{it} \mid t \in (-\pi, \pi)\}$. Particularmente, se preservan los ángulos rectos entre ese tipo de caminos suaves.

Analícemos que pasa con los ángulos bajo una función holomorfa no inyectiva. En esto necesitaremos definir la semitangente también para caminos no suaves. Si γ es un camino tal que $\gamma(0) = z_0$, entonces decimos que existe la semitangente a γ en z_0 si existe el límite

$$a := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}.$$

En este caso, la semitangente es $\{z_0 + sa \mid s \geq 0\}$. Si γ es suave entonces esta definición de semitangente coincide con la anterior ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\gamma(t) - z_0}{t - 0}}{\left| \frac{\gamma(t) - z_0}{t - 0} \right|} = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|}.$$

Análogamente como antes, definimos

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) := \arg \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_2(t) - z_0}{|\gamma_2(t) - z_0|}}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_1(t) - z_0}{|\gamma_1(t) - z_0|}}.$$

si existen los límites y si $\gamma_j(0) = z_0$ para $j = 1, 2$.

7.1.4 Teorema. *Sea f holomorfa en z_0 tal que z_0 es un cero del orden $k \geq 1$ de $f - f(z_0)$. Si γ_1 y γ_2 son caminos suaves con $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$. Entonces*

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = k \cdot \angle(\gamma_1, \gamma_2) \pmod{2\pi}.$$

Demostración. Sea $w_0 := f(z_0)$. Existe una función holomorfa g con $g(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = w_0 + (z - z_0)^k g(z)$. Se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\gamma_j(t)) - w_0}{|f(\gamma_j(t)) - w_0|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\gamma_j(t) - z_0}{|\gamma_j(t) - z_0|} \right)^k \frac{g(\gamma_j(t))}{|g(\gamma_j(t))|} = \left(\frac{\gamma_j'(0)}{|\gamma_j'(0)|} \right)^k \frac{g(z_0)}{|g(z_0)|}$$

para $j = 1, 2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) &= \arg \left(\frac{|\gamma_1'(0)|}{|\gamma_2'(0)|} \right)^k \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right)^k = \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right)^k \\ &= k \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \pmod{2\pi} = k \cdot \angle(\gamma_1, \gamma_2) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

□

Consideremos transformaciones conformes como mapeos entre subconjuntos abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$. Primero notamos que la composición de mapeos holomorfos entre subconjuntos abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$ da un mapeo holomorfo. Sean $G, G^* \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ regiones, es decir, abiertos y conexos en $\hat{\mathbb{C}}$. Si $f: G \rightarrow G^*$ es un mapeo holomorfo biyectivo, entonces la inversa f^{-1} es un mapeo holomorfo, por la Proposición 1.2.8 y el Corolario 6.6.5. Nótese en esto para la aplicación de la Proposición 1.2.8 que la inversa de f en una vecindad de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ donde $f(z_0) \neq \infty$ y $f'(z_0) \neq 0$ es continua, por el teorema de la función inversa del análisis real.

7.1.5 Definición. Sean $G, G^* \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ y $f: G \rightarrow G^*$ un mapeo holomorfo y biyectivo. Entonces f^{-1} es un mapeo holomorfo y f se llama un *mapeo biholomorfo* o un *mapeo conforme* (aunque no hablamos de ángulos en ∞). Además, G y G^* se llaman *biholomorfamente equivalente* o *conformemente equivalente*. Un mapeo conforme de G en si se llama un *automorfismo* de G . Los automorfismos de G forman el grupo $\text{Aut}(G)$ bajo composición.

7.1.6 Nota. Una composición de mapeos conforme es un mapeo conforme. Sean G, G^* y f como en la Definición. Si $h \in \text{Aut}(G^*)$ entonces $h \circ f$ es un mapeo conforme entre G y G^* . Inversamente, si g es otro mapeo conforme entre G y G^* , entonces $h := g \circ f^{-1} \in \text{Aut}(G^*)$ y $g = h \circ f$. Eso muestra que los mapeos conformes entre G y G^* son precisamente las composiciones de f con los automorfismos de G^* .

Como un mapeo conforme $f: G \rightarrow G^*$ es un homeomorfismo, las regiones G y G^* necesariamente son topológicamente equivalentes. Por ejemplo, vimos en el Teorema 4.3.6(a) que si $G, G^* \subseteq \mathbb{C}$ son biholomorfamente equivalentes y si G es simplemente conexo, necesariamente G^* es simplemente conexo. No obstante, si $G, G^* \subseteq \mathbb{C}$ son simplemente conexos, no necesariamente son conformemente equivalentes: para $G = \mathbb{C}$ y $G^* := D_1$ cualquier función holomorfa $f: G \rightarrow G^*$ es constante, por el teorema de Liouville, así que no existe una función conforme entre G y G^* .

7.2. Transformaciones de Möbius

En esta sección veremos como construir mapeos conformes particulares. Recordemos que a cada función meromorfa asociamos un mapeo holomorfo, y al revés.

7.2.1 Definición. Un mapeo holomorfo en $\hat{\mathbb{C}}$ del tipo

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

se llama una *transformación lineal fraccionaria* o una *transformación de Möbius*. Particularmente se llaman

$$z \mapsto az + b, \quad a \neq 0, \quad \text{una transformación lineal entera (o afín)}$$

$$z \mapsto az, \quad a \neq 0, \quad \text{una rotación-extensión}$$

$$z \mapsto z + b, \quad \text{una traslación}$$

y

$$z \mapsto 1/z, \quad \text{la inversión.}$$

7.2.2 Lema. Las transformaciones de Möbius forman un grupo de automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración. Sea

$$Tz := \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación de Möbius. Para

$$T'z := \frac{-dz + bz}{cz - a}$$

calculamos $T \circ T' = T' \circ T = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$, así que T es biyectiva con inversa $T^{-1} = T'$, es decir, un automorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$.

Si

$$Sz := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

es otra transformación de Möbius, entonces

$$(S \circ T)(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (P_T \cup T^{-1}(P_S))$. Además,

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

es decir, también $S \circ T$ es una transformación de Möbius. \square

Como vimos en la demostración del Lema, el mapeo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

es un homomorfismo entre $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ y el grupo de las transformaciones de Möbius. Su núcleo no es trivial y es el subgrupo formado por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Es obvio que las transformaciones afines forman un subgrupo de las transformaciones de Möbius.

7.2.3 Teorema. (a) $\text{Aut}(\mathbb{C})$ es el grupo de las transformaciones afines.

(b) $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ es el grupo de las transformaciones de Möbius.

Demostración. Inciso (a): Una transformación afín es un automorfismo de \mathbb{C} . Sea inversamente f un automorfismo de \mathbb{C} , es decir, una función entera biyectiva. Se sigue que

$$(7.2.1) \quad f(D_1) \cap f(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_1) = \emptyset.$$

Si f fuera trascendente entonces $f(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_1)$ sería denso en \mathbb{C} , por el Teorema 3.6.7. Junto con (7.2.1) eso implicaría que $f(D_1)$ no tendría ningún punto interior. Por otro lado, como f no es constante en \mathbb{C} , f es una función abierta por el Teorema 3.4.7, es decir, $f(D_1)$ es abierto y no vacío. ¡Contradicción! Entonces f es un polinomio del orden al menos 1. Por el teorema fundamental del álgebra f tiene un cero z_0 , lo cual es el único cero por la inyectividad de f . Si el orden del cero fuera mayor que uno, entonces $f'(z_0) = 0$ y f no sería inyectiva, por el Corolario 6.6.5. ¡Contradicción! Entonces f nada más tiene un sólo cero, lo cual es del primer orden. En consecuencia, f es un polinomio del primer orden, es decir, una transformación afín.

Inciso (b): Ya vimos en el Lema 7.2.2 que las transformaciones de Möbius son automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$. Inversamente, sea $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Si $f(\infty) = \infty$ entonces $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, es decir, f es una transformación afín, por el inciso (a). Si $f(\infty) = c \in \mathbb{C}$ entonces definimos el automorfismo g de $\hat{\mathbb{C}}$ por $g(z) := 1/(z - c)$. Se sigue que $h := g \circ f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y $h(\infty) = \infty$, es decir, h es una transformación afín. Por el Lema 7.2.2 también $f = g^{-1} \circ h$ es una transformación de Möbius. \square

7.2.4 Lema. Una transformación de Möbius es una composición de las transformaciones particulares de la inversión y de las traslaciones y rotaciones-extensiones.

Demostración. Sea

$$Tz := \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación de Möbius. Si $c = 0$ entonces $Tz = (a/d)z + b/d$ es una transformación afín. Si $c \neq 0$ entonces

$$Tz = \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c} \right)^{-1} + \frac{a}{c}.$$

□

Consideremos ahora puntos fijos de una transformación de Möbius T , es decir, puntos $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $Tz_0 = z_0$. Para $Tz = az + b$ el punto ∞ es un punto fijo. Si además $a \neq 1$ entonces $b/(1-a) \neq \infty$ es otro punto fijo, y no hay más si T no es la identidad. Si $Tz = (az + b)/(cz + d)$ con $c \neq 0$ entonces los puntos fijos de T son precisamente las soluciones de la ecuación cuadrática

$$cz^2 + (d - a)z = b.$$

En todo caso, si $T \neq \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ entonces T tiene a lo más dos puntos fijos. Una consecuencia es la siguiente: Si S y T son dos transformaciones de Möbius que coinciden en tres puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$, entonces la transformación de Möbius $S^{-1} \circ T$ tiene tres puntos fijos distintos, es decir, $S^{-1} \circ T = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ y $S = T$. En otras palabras, los valores de una transformación de Möbius en tres puntos la determinan en completo. Por otro lado, veremos en seguida que podemos prescribir arbitrariamente los valores en tres puntos para una transformación de Möbius.

7.2.5 Definición. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ puntos distintos. Si ninguno de estos puntos es ∞ entonces definimos la *fracción doble* como la transformación de Möbius

$$\text{FD}(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} \div \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Si uno de los puntos es ∞ , entonces consideramos el límite en la definición de arriba:

$$\text{FD}(z, \infty, z_2, z_3) := \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

$$\text{FD}(z, z_1, \infty, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

y

$$\text{FD}(z, z_1, z_2, \infty) := \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

En todo caso, $\text{FD}(z, z_1, z_2, z_3)$ es aquella transformación de Möbius que toma los valores 0, 1 y ∞ en los puntos z_1, z_2 y z_3 .

7.2.6 Teorema. Sean (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) triples de puntos distintos en $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces existe precisamente una transformación de Möbius T tal que $Tz_k = w_k$ para $k = 1, 2, 3$.

Demostración. Si escribimos $T_1z := \text{FD}(z, z_1, z_2, z_3)$ y $T_2z := \text{FD}(z, w_1, w_2, w_3)$, entonces $T_2^{-1} \circ T_1$ es la transformación de Möbius buscada. \square

Las fracciones dobles son invariantes bajo transformaciones de Möbius:

7.2.7 Teorema. Sean $z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, tales que z_1, z_2 y z_3 son distintos dos a dos. Entonces se cumple para todo $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ que

$$\text{FD}(z, z_1, z_2, z_3) = \text{FD}(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3).$$

Demostración. El mapeo $S: z \mapsto \text{FD}(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3)$ es la composición de las transformaciones de Möbius T y $w \mapsto \text{FD}(w, Tz_1, Tz_2, Tz_3)$, es decir, S es una transformación de Möbius. se tiene

$$Sz_1 = \text{FD}(Tz_1, Tz_1, Tz_2, Tz_3) = 0, \quad Sz_2 = 1, \quad Sz_3 = \infty.$$

Entonces

$$Sz = \text{FD}(z, z_1, z_2, z_3).$$

\square

Hay también invariantes geométricas de las transformaciones de Möbius. Un círculo en S^2 que no pasa por el polo norte tiene como imagen bajo la proyección estereográfica un círculo en \mathbb{C} , y un círculo que pasa por PN tiene como imagen una recta en \mathbb{C} . Por ello podemos identificar círculos en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ con círculos en \mathbb{C} y círculos en $\hat{\mathbb{C}}$ que contienen a ∞ con rectas en \mathbb{C} .

7.2.8 Teorema. Las imágenes de círculos y rectas bajo transformaciones de Möbius son círculos y rectas.

Demostración. Por el Lema 7.2.4 basta mostrar el resultado para traslaciones, rotaciones-extensiones y la inversión. Para las primeras dos la afirmación es trivial. Mostremos la invariancia de círculos y rectas bajo la inversión.

Las rectas en \mathbb{C} son precisamente los conjuntos de la forma

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid c_1x - c_2y = -\delta/2\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\text{Re}(cz) + \delta = 0\},$$

donde $c_1, c_2, \delta \in \mathbb{R}$, $c = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$. Los círculos en \mathbb{C} son precisamente los conjuntos de la forma

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{\bar{c}}{\alpha} \right|^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha} \right\} = \{z \mid \alpha z \bar{z} + cz + \bar{c} \bar{z} + \delta = 0\}$$

para $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$ tales que $|c|^2 > \alpha\delta$. Entonces, Los círculos y las rectas son los conjuntos de soluciones de

$$\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c} \bar{z} + \delta = 0, \quad \alpha, \delta \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad |c|^2 > \alpha\delta.$$

Si reemplazamos en esta ecuación z por $1/w$ y multiplicamos la ecuación resultante por $w\bar{w}$, entonces obtenemos una ecuación del mismo tipo para w . \square

Por tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ pasa precisamente una recta o un círculo. Se tiene:

7.2.9 Teorema. *Un punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ se encuentra en el círculo o en la recta definido por los puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ si y sólo si $\text{FD}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Sea K el círculo o la recta que pasa por z_1, z_2, z_3 y sea $T = \text{FD}(\cdot, z_1, z_2, z_3)$ la transformación de Möbius que manda (z_1, z_2, z_3) a $(0, 1, \infty)$. Por el Teorema 7.2.8 se sigue que $TK = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y luego que $z \in K$ si y sólo si $Tz \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

7.2.10 Nota. Un círculo o una recta K divide a $\hat{\mathbb{C}}$ en dos regiones ajenas, $\hat{\mathbb{C}} \setminus K = G_1 \cup G_2$. Cada una de ellas tiene K como su frontera. Si $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ entonces $L := f(K)$ es un círculo o una recta por el Teorema 7.2.8, la cual divide a $\hat{\mathbb{C}} \setminus L$ en dos regiones ajenas H_1 y H_2 . Como f es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$, se tiene o bien $f(G_1) = H_1$ y $f(G_2) = H_2$ o bien $f(G_1) = H_2$ y $f(G_2) = H_1$.

7.2.11 Teorema. *Sea G una región en $\hat{\mathbb{C}}$ que tiene como frontera un círculo o una recta. Entonces existe una transformación de Möbius que mapea G al semiplano superior. En particular, todas estas regiones son conformemente equivalentes.*

Demostración. Sea K la frontera de G , sea H el semiplano superior y sea H_- el semiplano inferior. Por el Teorema 7.2.6 existe $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $TK = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Por la Nota 7.2.10 tenemos o bien $TG = H$ o bien $TG = H_-$. En el primer caso terminamos, y en el segundo caso componemos T con la inversión para obtener la transformación buscada. \square

7.2.12 Ejemplo. La transformación de Möbius $Tz := \text{FD}(z, 1, i, -1) = i(1-z)/(1+z)$ manda S^1 a \mathbb{R} . Como $T0 = i$, se sigue que $TD_1 = H$.

7.3. Automorfismos del disco unitario

En esta sección denotaremos el disco unitario por $\mathbb{D} := D_1(0)$. Para el subgrupo de los automorfismos de \mathbb{D} que tienen 0 como punto fijo escribiremos Γ_0 . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la rotación $T_\lambda z := e^{i\lambda}z$ pertenece a Γ_0 . Mostraremos que estos ya son todos los elementos de Γ_0 .

7.3.1 Teorema (El lema de Schwarz). *Sea $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$. Si se cumple $|f(z_0)| = |z_0|$ en un punto $z_0 \neq 0$, o si $|f'(0)| = 1$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\lambda}z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Demostración. En \mathbb{D} definimos $g(z) := f(z)/z$. Como $f(0) = 0$, g tiene extensión holomorfa a \mathbb{D} mediante $g(0) := f'(0)$. Para $|z| \leq r < 1$ el principio del máximo implica que

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Dejamos $r \rightarrow 1$ en esta desigualdad, así que $|g(z)| \leq 1$, es decir, $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$.

Si $|f(z_0)| = |z_0|$ o $|f'(0)| = 1$ entonces $|g(z_0)| = 1$ o $|g(0)| = 1$, y el principio del máximo implica que g es una constante con valor absoluto uno en \mathbb{D} . \square

7.3.2 Corolario. *Sea f holomorfa en $D_r(a)$, y sea $f(D_r(a)) \subseteq D_R(f(a))$.*

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{R}{r}|z - a|.$$

Demostración. La función $h(\zeta) := (f(r\zeta + a) - f(a))/R$ cumple las hipótesis del Teorema 7.3.1, así que $|h(\zeta)| \leq |\zeta|$ implica la afirmación. \square

Consideramos para $z_0 \in \mathbb{C}$ la transformación de Möbius

$$(7.3.1) \quad f_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Mostremos que $f_{z_0} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$: si $|z| = 1$, entonces

$$\overline{f_{z_0}(z)} f_{z_0}(z) = \frac{|z|^2 - z_0 \bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2}{1 - z_0 \bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 |z|^2} = 1,$$

es decir, $f_{z_0}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, por el Teorema 7.2.8. Por otro lado, $f_{z_0}(z_0) = 0 \in \mathbb{D}$, así que $f_{z_0}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ por la Nota 7.2.10. En consecuencia, $f_{z_0} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

7.3.3 Teorema. (a) *El grupo Γ_0 está formado por las rotaciones.*

(b) *El grupo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ está formado por las transformaciones de Möbius de la forma*

$$(7.3.2) \quad e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad z_0 \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Inciso (a): Ya vimos que toda rotación es un elemento de Γ_0 . Sea $f \in \Gamma_0$. Entonces f y f^{-1} cumplen las hipótesis del Teorema 7.3.1, y luego $|f(z)| \leq |z|$ y $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En seguida, $|f(z)| = |z|$ en todo \mathbb{D} , y el mismo Teorema 7.3.1 implica que f es una rotación.

Inciso (b): Como T_λ y f_{z_0} son automorfismos de \mathbb{D} para $\lambda \in [0, 2\pi)$ y $z_0 \in \mathbb{D}$, también $T_\lambda \circ f_{z_0} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Sea inversamente $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Para $z_0 := f^{-1}(0)$ se tiene que $f \circ f_{z_0}^{-1} \in \Gamma_0$, es decir, por el inciso (a) existe $\lambda \in [0, 2\pi)$ tal que $f = T_\lambda \circ f_{z_0}$. \square

Para dos puntos $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ siempre existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(z_0) = w_0$: con la notación de (7.3.1) basta definir $f := f_{w_0}^{-1} \circ f_{z_0}$. En otras palabras, el grupo $\text{Aut}(\mathbb{D})$ opera transitivamente en \mathbb{D} .

7.3.4 Proposición. *Sean $z_0, z_1, w_0, w_1 \in \mathbb{D}$.*

(a) *Los automorfismos de \mathbb{D} con $f(z_0) = w_0$ son precisamente de la forma $f_{w_0}^{-1} \circ T_\lambda \circ f_{z_0}$, con $\lambda \in [0, 2\pi)$.*

(b) Existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(z_j) = w_j$ para $j = 0, 1$ si y sólo si

$$(7.3.3) \quad \left| \frac{w_1 - w_0}{1 - \bar{w}_0 w_1} \right| = \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|.$$

Demostración. Inciso (a): Para todo $\lambda \in [0, 2\pi)$ el automorfismo $f_{w_0}^{-1} \circ T_\lambda \circ f_{z_0}$ de \mathbb{D} satisface $f(z_0) = w_0$. Inversamente, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ cumple $f(z_0) = w_0$, entonces $f_{w_0} \circ f \circ f_{z_0}^{-1} \in \Gamma_0$, es decir, existe $\lambda \in [0, 2\pi)$ tal que $f = f_{w_0}^{-1} \circ T_\lambda \circ f_{z_0}$.

Inciso (b) Por el inciso (a) existe un automorfismo f de \mathbb{D} tal que $f(z_0) = w_0$ y $f(z_1) = w_1$ si y sólo si existe λ tal que $(f_{w_0}^{-1} \circ T_\lambda \circ f_{z_0})(z_1) = w_1$, es decir, si y sólo si

$$\exists \lambda \in [0, 2\pi): \frac{w_1 - w_0}{1 - \bar{w}_0 w_1} = e^{i\lambda} \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}.$$

Esta condición es equivalente a (7.3.3). \square

Si K es un círculo o una recta y G es una componente conexa de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ (es decir, un disco o un semiplano), entonces existe un mapeo conforme $f: G \rightarrow \mathbb{D}$ (una transformación de Möbius), por el Teorema 7.2.11. La Nota 7.1.6 implica que

$$\text{Aut}(G) = \{f^{-1} \circ h \circ f \mid h \in \text{Aut}(\mathbb{D})\}.$$

Entonces el Teorema 7.3.3 también proporciona una clasificación de $\text{Aut}(G)$. Particularmente, todos los automorfismos de G son transformaciones de Möbius. Calculemos explícitamente el grupo de los automorfismos del semiplano superior:

7.3.5 Teorema. *Los automorfismos del semiplano superior son precisamente las transformaciones de Möbius de la forma*

$$(7.3.4) \quad Tz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

Demostración. Sea f un automorfismo del semiplano superior H . Ya mencionamos arriba que $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Necesariamente se cumple que $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ya que f es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$. Sean z_1, z_2, z_3 las preimágenes de $0, 1, \infty$ bajo f . Como $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, existen coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = \text{FD}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{az + b}{cz + d}$$

para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Tenemos además que

$$(7.3.5) \quad \text{Im} \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Como $f(i) \in H$, esto implica que $ad - bc > 0$.

Sea inversamente $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ dado como en (7.3.4). Como los coeficientes son reales, claramente $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. La ecuación (7.3.5) implica que $Ti \in H$, así que $T \in \text{Aut}(H)$ por la Nota 7.2.10.. \square

7.4. Geometría no Euclidiana

Introduciremos una nueva métrica en \mathbb{D} para entender mejor la fórmula (7.3.3). Empecemos con una versión infinitesimal de ella:

7.4.1 Lema. Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$(7.4.1) \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{D}$ y $w_0 := f(z_0)$. Por la Proposición 7.3.4(a) existe $\lambda \in [0, 2\pi)$ tal que $f_{w_0} \circ f = T_\lambda \circ f_{z_0}$, es decir, tal que

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \bar{w}_0 f(z)} \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|.$$

Dividimos de esta identidad entre $(z - z_0)$ y tomamos el límite $z \rightarrow z_0$. Esto demuestra (7.4.1) para z_0 . \square

7.4.2 Definición. Para un camino de integración $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ definimos su *longitud hiperbólica* o *no euclidiana* por

$$(7.4.2) \quad L_h(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

Intuitivamente, esta longitud es casi igual a la usual cerca de 0, pero está deformada más y más cuando el camino se acerca a $\partial\mathbb{D}$.

Las propiedades básicas son las siguientes:

7.4.3 Proposición. Sean γ, γ_1 y γ_2 caminos de integración en \mathbb{D} , y sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Entonces se cumplen:

- (a) $L_h(\gamma) \geq L(\gamma) \geq 0$;
- (b) $L_h(\gamma^{-1}) = L_h(\gamma)$;
- (c) $L_h(\gamma_1 \gamma_2) = L_h(\gamma_1) + L_h(\gamma_2)$.
- (d) $L_h(f \circ \gamma) = L_h(\gamma)$.

Demostración. **Inciso (a):** Como $\gamma(t) \in \mathbb{D}$, $(1 - |\gamma|^2) \in (0, 1]$ para todo t . Esto implica la afirmación.

Inciso (b): Se tiene $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a + b - t)$, así que $|\gamma^{-1}(t)| = |\gamma(a + b - t)|$ y $|(\gamma^{-1})'(t)| = |\gamma'(a + b - t)|$. La afirmación es una consecuencia de cambiar la variable de integración.

Inciso (c): Obvio.

Inciso (d): Si γ está definida en $[a, b]$ calculamos con el Lema 7.4.1:

$$L_h(f \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))\gamma'(t)|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt = L_h(\gamma).$$

\square

7.4.4 Definición. Definimos la *métrica hiperbólica* o *no euclidiana* en \mathbb{D} por la expresión

$$(7.4.3) \quad d_h(z_0, z_1) := \inf\{L_h(\gamma) \mid \gamma \text{ es un camino de integración en } \mathbb{D} \text{ de } z_0 \text{ a } z_1\}.$$

Las propiedades de una métrica son consecuencias inmediatas de la Proposición 7.4.3.

7.4.5 Nota. Por la Proposición 7.4.3 (d) la métrica hiperbólica es invariante bajo automorfismos de \mathbb{D} :

$$d_h(f(z_0), f(z_1)) = d_h(z_0, z_1) \quad \text{para todo } z_0, z_1 \in \mathbb{D}, f \in \text{Aut}(\mathbb{D}).$$

Inmediatamente surge la duda si entre dos puntos $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ siempre existe un camino de integración con longitud hiperbólica minimal, es decir, una *línea geodésica*. Para caracterizar las líneas geodésicas llamaremos a un arco circular que interseca a $\partial\mathbb{D}$ en ángulos rectos un *ortocírculo*. También los diámetros de \mathbb{D} los llamaremos ortocírculos.

7.4.6 Teorema. *Las líneas geodésicas en \mathbb{D} son precisamente los arcos de ortocírculos. La conexión hiperbólica más corta entre dos puntos distintos $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ es el arco entre z_0 y z_1 del único ortocírculo que pasa por z_0 y z_1 .*

Demostración. Basta mostrar que existe un camino de integración más corto entre dos puntos distintos $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$, y que este es un arco de un ortocírculo.

Existe $\lambda \in [0, 2\pi)$ tal que $c := (T_\lambda \circ f_{z_0})(z_1) \in (0, 1)$. Para $f := T_\lambda \circ f_{z_0} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tenemos $f(z_0) = 0$ y $f(z_1) = c$. Si $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ($\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$, $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) es un camino de integración en \mathbb{D} de 0 a c , entonces

$$(7.4.4) \quad L_h(g) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{1 - \gamma_1(t)^2} dt \\ = \int_0^c \frac{1}{1 - s^2} ds = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c} = L_h([0, c]).$$

Aquí usamos la regla de sustitución presentada en la sección 2.1. En seguida, la conexión hiperbólica más corta entre 0 y c es el segmento $[0, c]$, y su longitud hiperbólica es $\frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c}$. Por la invariancia de d_h bajo f la línea geodésica entre z_0 y z_1 es $\gamma := f^{-1} \circ [0, c]$. Por la invariancia de círculos y rectas bajo f también γ es un arco o un segmento, y porque f es conforme en \mathbb{C} , los ángulos de intersección de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con $\partial\mathbb{D}$ y de $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ con $\partial\mathbb{D}$ son los mismos. En consecuencia, $\text{tr } \gamma$ es un arco de un ortocírculo. \square

7.4.7 Teorema. *Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ y sean $a, b \in \partial\mathbb{D}$ los puntos de intersección del ortocírculo pasando por z_0 y z_1 con $\partial\mathbb{D}$. Entonces*

$$(7.4.5) \quad d_h(z_0, z_1) = \frac{1}{2} |\log \text{FD}(z_0, a, z_1, b)| = \text{artanh} \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|$$

y

$$(7.4.6) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d_h(z, z_0)}{|z - z_0|} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

Las topologías generadas por la métrica hiperbólica y por la métrica euclidiana coinciden.

Demostración. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ el automorfismo de la demostración del Teorema 7.4.6 tal que $f(z_0) = 0$ y $f(z_1) = c \in (0, 1)$. Según (7.4.4) tenemos que

$$(7.4.7) \quad d_h(z_0, z_1) = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c}.$$

Representemos la fracción de manera invariante bajo automorfismos de \mathbb{D} :

$$(7.4.8) \quad \frac{1+c}{1-c} = \text{FD}(0, 1, c, -1) = \text{FD}(c, -1, 0, 1) = \text{FD}(0, -1, c, 1)^{-1} = \text{FD}(c, 1, 0, -1)^{-1}.$$

El automorfismo f^{-1} manda los puntos -1 y 1 a los Puntos a, b de intersección del ortocírculo pasando por z_0 y z_1 con $\partial\mathbb{D}$. Luego la invariancia de las fracciones dobles bajo transformaciones de Möbius (Teorema 7.2.7), (7.4.7) y (7.4.8) implican la primera igualdad de (7.4.5). Aquí el orden de z_0 y z_1 y de a y b no importa porque un intercambio nada más causa un cambio de signo en el logaritmo por (7.4.8).

Para $w_0 := 0$ y $w_1 := c$ la Proposición 7.3.4 implica que

$$(7.4.9) \quad c = \left| \frac{w_1 - w_0}{1 - \bar{w}_0 w_1} \right| = \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|.$$

La areatangente hiperbólica real está definida en $(-1, 1)$ y tiene la forma

$$\text{artanh } c = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c},$$

así que (7.4.7) y (7.4.9) implican la segunda igualdad de (7.4.5).

Usamos la serie de Taylor

$$\text{artanh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Con (7.4.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d_h(z, z_0)}{|z - z_0|} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|^{2k+1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|1 - \bar{z}_0 z|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|^{2k} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}, \end{aligned}$$

es decir, (7.4.6). En consecuencia, existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2(1 - |z_0|^2)} < \frac{d_h(z, z_0)}{|z - z_0|} < \frac{2}{1 - |z_0|^2} \quad \text{para todo } z \in \dot{D}_{r_0}(z_0).$$

Esto muestra que localmente las métricas son equivalentes y que luego generan las mismas topologías. \square

7.4.8 Nota. La ecuación (7.4.5) y la Proposición 7.3.4 implican para $z_0, z_1, w_0, w_1 \in \mathbb{D}$ que existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(z_j) = w_j$ para $j = 0, 1$ si y sólo si $d_h(z_0, z_1) = d_h(w_0, w_1)$.

7.4.9 Nota. Para todo $z_0 \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ el disco cerrado

$$\{z \in \mathbb{D} \mid d_h(z, z_0) \leq r\}$$

en la métrica hiperbólica es un subconjunto compacto de \mathbb{D} : basta mostrarlo para $z_0 = 0$. En esa situación,

$$\{z \in \mathbb{D} \mid d_h(z, 0) \leq r\} = \overline{D}_{\tanh r}(0)$$

por (7.4.5), y $\tanh r < 1$.

7.4.10 Teorema. *Sea $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa. Entonces h no incrementa distancias hiperbólicas, es decir, para $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ se tiene que $d_h(f(z_0), f(z_1)) \leq d_h(z_0, z_1)$. Si para un par de puntos distintos aquí se tiene igualdad, entonces h es un automorfismo de \mathbb{D} .*

Demostración. Sean $z_0 \in \mathbb{D}$ y $w_0 := h(z_0)$. Entonces $g := f_{w_0} \circ h \circ f_{z_0}^{-1}$ cumple con las hipótesis del Lema de Schwarz (Teorema 7.3.1), con la notación de (7.3.1). Si existe $\lambda \in [0, 2\pi)$ tal que $g = T_\lambda$, entonces $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Si esto no sucede, entonces por el Teorema 7.3.1 se tiene que $|g(\zeta)| < |\zeta|$ para todo $\zeta \in \mathbb{D}$, es decir, $|f_{w_0}(h(z))| < |f_{z_0}(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$. Por consiguiente, usando (7.4.5) obtenemos

$$(7.4.10) \quad \tanh d_h(h(z), h(z_0)) = \left| \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}h(z)} \right| < \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| = \tanh d_h(z, z_0).$$

La monotonía estricta de la areatangente hiperbólica implica la afirmación. \square

Una consecuencia es una generalización del Lema 7.4.1:

7.4.11 Corolario (Lema de Schwarz-Pick). *Para una función holomorfa $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ se tiene que*

$$\frac{|h'(z)|}{1 - |h'(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Basta dejar $z \rightarrow z_0$ en (7.4.10). \square

La métrica hiperbólica genera una *geometría hiperbólica* en \mathbb{D} . El espacio métrico hiperbólico \mathbb{D} se llama el *plano hiperbólico*, los ortocírculos son las *rectas hiperbólicas*, y los automorfismos de \mathbb{D} se llaman *movimientos hiperbólicos*. Como ángulos uno toma los ángulos euclidianos ya que automorfismos son conformes. Se cumplen los mismos axiomas para la geometría hiperbólica como para la geometría euclidiana, con excepción del axioma de las rectas paralelas: dado una recta y un punto en el plano hiperbólico, tales que el punto no se encuentre en la recta, por el punto pasa un número *infinito* de rectas que no intersecan a la recta dada. Una consecuencia de la falta del axioma de las paralelas es que en un triángulo hiperbólico la suma de los ángulos interiores es menor que π .

7.5. Familias normales de funciones holomorfas

En la construcción de funciones conformes un método importante es formar límites de sucesiones de funciones conformes. Para asegurar que tal límite es conforme necesitamos buenos criterios que aseguran la holomorfia de un límite de funciones holomorfas, y que aseguran que el límite es inyectivo si todas las funciones de la sucesión son inyectivas. La rigidez de las funciones holomorfas implica que ambas propiedades son un resultado de la acotación localmente uniforme de la sucesión de funciones.

La función límite de una sucesión de funciones holomorfas que converge localmente uniformemente siempre es holomorfa por el Teorema 3.4.4.

7.5.1 Teorema (Hurwitz). *Sea (f_j) una sucesión de funciones holomorfas en la región G que converge localmente uniformemente a una función no constante f . Si $f - w_0$ tiene un cero del orden n en $z_0 \in G$, entonces existen vecindades arbitrariamente chicas V de z_0 en G tal que cada $f_j - w_0$ tiene, para j suficientemente grande, precisamente n ceros en V , contados con multiplicidades.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_0 = 0$. Escogemos $\varepsilon > 0$ suficientemente chico tal que el único cero de f en $\overline{D}_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ es z_0 . Ponemos $\delta := \min_{z \in S_\varepsilon(z_0)} |f(z)| > 0$. Sea j tan grande que para $j \geq j_0$ siempre se cumple que $\min_{z \in S_\varepsilon(z_0)} |f(z) - f_j(z)| < \delta$. para $j \geq j_0$ el teorema de Rouché (Teorema 6.6.7), aplicado a $f_j = f + (f_j - f)$ en $D_\varepsilon(z_0)$, implica la afirmación. \square

7.5.2 Corolario. *En la situación del Teorema 7.5.1 sean las funciones f_j inyectivas. Si su límite f no es constante, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Si f no fuera inyectiva, entonces existirían puntos distintos $z_0, z_1 \in G$ tal que $w_0 := f(z_0) = f(z_1)$. Por el Teorema 7.5.1 existirían vecindades ajenas V_0 y V_1 de z_0 y z_1 en G tales que $f_j - w_0$ tiene al menos un cero en cada una de ellas para j suficientemente grande, en contradicción con la inyectividad de f_j . \square

Recordemos algunas nociones necesarias para el teorema de Arzelá-Ascoli. Una familia \mathcal{F} de funciones $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ en un espacio métrico X es *equicontinua* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall x, y \in X: (d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

La familia \mathcal{F} es *acotada* si existe $M > 0$ tal que

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall x \in X: |f(x)| \leq M.$$

\mathcal{F} es *localmente equicontinua* respectivamente *localmente acotada* si para cada $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que $\mathcal{F}|_{D_r(x_0)}$ es una familia equicontinua respectivamente acotada.

7.5.3 Lema. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una familia \mathcal{F} localmente acotada de funciones holomorfas \mathcal{F} en U es localmente equicontinua.*

Demostración. Sean $|f| \leq M$ en $\overline{D}_r(a) \subseteq U$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $f \in \mathcal{F}$ y $z_0, z_1 \in K := \overline{D}_{r/2}(a)$, entonces

$$|f(z_0) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_0, z_1]} f'(z) dz \right| \leq |z_0 - z_1| \max_{z \in K} |f'(z)|.$$

La desigualdad de Cauchy (3.4.2) implica que

$$|f'(z)| \leq \frac{4M}{r} \quad \text{para todo } z \in K.$$

Ponemos $\delta := r\varepsilon/(4M)$, así que

$$\forall z_0, z_1 \in K: (|z_0 - z_1| \leq \delta \Rightarrow |f(z_0) - f(z_1)| \leq \varepsilon).$$

Como δ no depende ni de z_0, z_1 ni de f , la familia \mathcal{F} es equicontinua en $\overline{D}_{r/2}(z_0)$. \square

7.5.4 Definición. Sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas en el subconjunto abierto U de \mathbb{C} . \mathcal{F} se llama una *familia normal* si cada sucesión en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge localmente uniformemente a una función holomorfa o a ∞ .

7.5.5 Teorema (Montel). *Una familia localmente acotada de funciones holomorfas es normal.*

Demostración. Sea (f_j) una sucesión localmente acotada de funciones holomorfas en el subconjunto abierto U de \mathbb{C} . Por el Lema 7.5.3 (f_j) es localmente equicontinua. Cubriremos a U con discos $D_k \subset\subset U$, $k \in \mathbb{N}$. Esto es posible porque U es un espacio métrico separable, es decir, es 2-numerable. Cubriremos a U con discos $D_{\text{dist}(x, \partial U)/2}(x)$ ($x \in U$) y aplicamos el teorema de Lindelöf para obtener una subcubierta numerable. Otro argumento sería escribir U como unión numerable de subconjuntos compactos, y cubrir cada uno de ellos con un número finito de discos compactamente contenidos en U . Para toda k la restricción de (f_j) a \overline{D}_k es una familia acotada y equicontinua, así que el teorema de Arzelá-Ascoli implica que tiene una subsucesión uniformemente convergente en \overline{D}_k . Un proceso diagonal de extracción de subsucesiones nos proporciona una subsucesión de (f_j) que converge uniformemente en \overline{D}_k , para cada $k \in \mathbb{N}$, es decir, ella converge localmente uniformemente en U . \square

Las familias normales permiten un criterio muy fuerte de convergencia localmente uniforme:

7.5.6 Teorema. *Sea \mathcal{F} una familia normal en la región G , y sea (f_j) una sucesión en \mathcal{F} que converge puntualmente en un subconjunto no discreto $N \subseteq G$ a una función $g: N \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Entonces (f_j) converge en G localmente uniformemente (posiblemente a ∞).*

Demostración. Primero supongamos que g no sea la función constante ∞ en N . Sea f el límite holomorfo de una subsucesión localmente uniformemente convergente de (f_j) . Si la sucesión completa (f_j) no converge localmente uniformemente en G , entonces existe una subsucesión (f_{j_k}) que no converge a f localmente uniformemente, es decir, existen

$\varepsilon_0 > 0$, $\overline{D}_r(a) \subseteq G$ y puntos $z_k \in \overline{D}_r(a)$ tales que $|f_{j_k}(z_k) - f(z_k)| \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pasando a una subsucesión de (f_{j_k}) podemos suponer que (f_{j_k}) converge localmente uniformemente en G . Esa función holomorfa límite necesariamente es distinta a f , pero coincide con f en N . Por el teorema de identidad obtenemos una contradicción.

Ahora sea $g \equiv \infty$ en N . Si (f_j) no converge a ∞ localmente uniformemente entonces existen una subsucesión (f_{j_k}) , $M > 0$, $\overline{D}_r(a) \subseteq G$ y puntos $z_k \in \overline{D}_r(a)$ tales que $|f_{j_k}(z_k)| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que (f_{j_k}) converge localmente uniformemente a una función holomorfa límite f en G . Como f_j tiende a ∞ en N obtenemos una contradicción. \square

7.6. El teorema de equivalencia conforme de Riemann

7.6.1 Definición. Una región $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ se llama *simplemente conexa* si o bien $G = \hat{\mathbb{C}}$ o bien existe $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $\infty \notin T(G)$ y $T(G)$ es simplemente conexo.

En esta sección clasificaremos las clases de equivalencia conforme de las regiones simplemente conexas en $\hat{\mathbb{C}}$.

La esfera de Riemann no es conformemente equivalente ni a \mathbb{C} ni a \mathbb{D} , ya que estos dos espacios topológicos no son compactos pero $\hat{\mathbb{C}}$ sí lo es. La “esfera pinchada” $G := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{p\}$ es conformemente equivalente a \mathbb{C} para cualquier $p \in \hat{\mathbb{C}}$: cualquier automorfismo T de $\hat{\mathbb{C}}$ con $Tp = \infty$ es un mapeo conforme entre G y \mathbb{C} . Ya vimos que \mathbb{C} no es conformemente equivalente al disco unitario por el teorema de Liouville. Sólo falta considerar regiones simplemente conexas $G \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{p, q\}$ para dos puntos distintos $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$. El próximo teorema muestra que estas son conformemente equivalentes a \mathbb{D} . Entonces existen sólo tres clases de equivalencia conforme entre las regiones simplemente conexas en $\hat{\mathbb{C}}$, con los conjuntos modelo $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} y \mathbb{D} , ver Tabla 7.1.

| | $G = \hat{\mathbb{C}}$ | $G = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{p\}$ | $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$ |
|--------------------|------------------------|--|---|
| $\hat{\mathbb{C}}$ | ✓ | ✗ | ✗ |
| \mathbb{C} | ✗ | ✓ | ✗ |
| \mathbb{D} | ✗ | ✗ | ✓ |

Tabla 7.1: Equivalencia conforme entre regiones simplemente conexas G en $\hat{\mathbb{C}}$

7.6.2 Teorema (de equivalencia conforme de Riemann). *Sea $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región simplemente conexa tal que $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ contiene al menos dos puntos. Entonces G es conformemente equivalente al disco unitario \mathbb{D} mediante un mapeo conforme f . Uno puede prescribir en un punto $z_0 \neq \infty$ las condiciones $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$; ellas determinan a f .*

Antes de empezar la demostración de ese teorema formulamos un resultado técnico:

7.6.3 Lema. *Sea $G \subsetneq \mathbb{D}$ una región simplemente conexa que contiene a 0. Entonces existe una función holomorfa inyectiva $h: G \rightarrow \mathbb{D}$ con $h(0) = 0$ y $h'(0) > 1$.*

Demostración. Sea $c \in \mathbb{D} \setminus G$. El automorfismo $T_1: z \mapsto (z - c)/(1 - \bar{c}z)$ de \mathbb{D} satisface $T_1(c) = 0$ y $T_1(0) = -c$. La región $T_1(G)$ es simplemente conexa y no contiene a 0. Por el Ejemplo 5.1.5(b) existe en $T_1(G)$ una rama g de la raíz cuadrada. Como g es la inversa de una función, g es inyectiva. Además se cumple que $g(T_1(G)) \subseteq \mathbb{D}$. Para $d := g(-c)$ y algún $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $T_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ por $T_2(z) := e^{i\lambda}(z - d)/(1 - \bar{d}z)$, y definimos $h := T_2 \circ g \circ T_1: G \rightarrow \mathbb{D}$. Se tiene que $h(0) = T_2(g(-c)) = 0$, y λ se puede escoger de tal manera que $h'(0) > 0$. Mostremos que $h'(0) > 1$: para $g^*(z) := z^2$ la función $h^* := T_1^{-1} \circ g^* \circ T_2^{-1}$ es holomorfa de \mathbb{D} en si, y su restricción a $h(G)$ es la inversa de h . Se tiene que $h^*(0) = 0$. Si h^* fuera una rotación T_μ , entonces $g^* = T_1 \circ T_\mu \circ T_2$ sería un automorfismo de \mathbb{D} , una contradicción ya que g^* no es inyectiva. Entonces h^* no es una rotación. Por el Lema de Schwarz (Teorema 7.3.1) $|(h^*)'(0)| < 1$, es decir, $h'(0) = 1/(h^*)'(0) > 1$. \square

Demostración del Teorema 7.6.2. Paso 1: Primero mostremos que sólo existe un mapeo conforme con las propiedades dadas. Si f y g son dos mapeos conformes entre G y \mathbb{D} con $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 1$ y $g'(z_0) > 1$, entonces $S := f \circ g^{-1}$ es un automorfismo de \mathbb{D} con $S(0) = 0$ y

$$S'(0) = f'(g^{-1}(0))/g'(g^{-1}(0)) = f'(z_0)/g'(z_0) > 0.$$

Por el Teorema 7.3.3(a) $S = \text{id}_{\mathbb{D}}$, es decir, $f = g$.

Paso 2: Para la existencia de f trabajaremos en tres pasos. Primero construiremos una función conforme $f_1: G \rightarrow G^* \subseteq \mathbb{D}$ tal que $f_1(z_0) = 0$ y $f_1'(z_0) > 0$. Luego buscaremos entre las funciones inyectivas $f: G^* \rightarrow \mathbb{D}$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$ una que maximiza a $f'(0)$. La idea es que esto es, al menos localmente, una medida de la expansividad de f . En el último paso mostraremos que esa función maximizante es conforme de G^* en \mathbb{D} .

Paso 3: Sean $a, b \in \hat{\mathbb{C}} \setminus G$ y $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$. Escogemos $T_1 \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $T_1 a = 0$ y $T_1 b = \infty$. Entonces $G_1 := T_1(G)$ es una región simplemente conexa en $\hat{\mathbb{C}}$, así que en G_1 existe una rama holomorfa g de la raíz cuadrada (Ejemplo 5.1.5(b)). Como g es la inversa de una función, g es inyectiva, una función conforme entre G_1 y $G_2 := g(G_1) \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Afirmamos que existe un disco cerrado $\bar{D}_\varepsilon(w_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus G_2$: para $w_0 \in -G_2$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{D}_\varepsilon(-w_0) \subseteq G_2$ ya que $-w_0 \in G_2$. Si $z \in \bar{D}_\varepsilon(w_0)$ estuviera en G_2 , entonces los puntos z y $-z$ estarían en G_2 , en contradicción con la inyectividad de g^{-1} en G_2 . Eso muestra la afirmación. Escogemos, con la ayuda de la Nota 7.2.10, $T_2 \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $T_2(\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}_\varepsilon(w_0)) = \mathbb{D}$. En consecuencia, $G_3 := T_2(G_2) \subseteq \mathbb{D}$. Por el Teorema 7.3.3 existe $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que para $f_1 := S \circ T_2 \circ g \circ T_1$ se tiene que $f_1(z_0) = 0$ y $f_1'(z_0) > 0$.

Paso 4: Recordemos que $G^* := f_1(G) \subseteq \mathbb{D}$ es una región y cumple $0 \in G^*$. Definimos la familia

$$\mathcal{F} := \{f: G^* \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ es holomorfa y inyectiva, } f(0) = 0, f'(0) > 0\},$$

la cual es acotada por 1, es decir, es una familia normal de funciones holomorfas. \mathcal{F} no es vacío ya que $\text{id}_{G^*} \in \mathcal{F}$. Ponemos

$$\alpha := \sup\{f'(0) \mid f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Como la identidad pertenece a \mathcal{F} tenemos que $\alpha \geq 1$. Existe una sucesión (f_j) en \mathcal{F} tal que $f'_j(0) \rightarrow \alpha$. Por el Teorema 7.5.5 existe una subsucesión localmente uniformemente convergente de (f_j) , la cual seguiremos denotando por (f_j) . Sea f^* el límite de (f_j) . Obviamente $f^*(0) = 0$. Por el teorema de Weierstrass (Teorema 3.4.4) tenemos que $f'_j(0) \rightarrow (f^*)'(0)$, así que $\alpha = (f^*)'(0) < \infty$. Como $\alpha \neq 0$, f^* no es constante. Además, $|f'_j| < 1$ implica que $|f^*| \leq 1$ en G^* , así que el principio del máximo (Teorema 3.4.8) nos dice que $|f^*| < 1$ en G^* , es decir, $f^*(G^*) \subseteq \mathbb{D}$. El Corolario 7.5.2 demuestra que f^* es inyectiva y luego que $f^* \in \mathcal{F}$. Esta es una función que maximiza $f'(0)$ en la familia \mathcal{F} .

Paso 5: Nada más falta ver que $f^*(G^*) = \mathbb{D}$. Si esto no fuera cierto, entonces existiría $h: f^*(G^*) \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa e inyectiva tal que $h(0) = 0$ y $h'(0) > 1$, por el Lema 7.6.3. La función $g := h \circ f^*: G^* \rightarrow \mathbb{D}$ sería holomorfa e inyectiva, cumpliría que $g(0) = 0$ y $g'(0) = h'(0)(f^*)'(0) > \alpha$, y luego $g \in \mathcal{F}$. Pero esto sería una contradicción a la definición de α . Entonces necesariamente $f^*(G^*) = \mathbb{D}$. Esto termina la demostración. \square

Analizaremos el comportamiento de las funciones conformes dados por el teorema de Riemann.

7.6.4 Proposición. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región simplemente conexa tal que $G \neq \mathbb{C}$, y sea f una función conforme entre G y \mathbb{D} . Si $K \subseteq \partial G$ es un arco analítico a un lado de ∂G , entonces f tiene una extensión holomorfa a través de K .

Demostración. Para todo $z \in G$ se cumple que $|f(z)| < 1$. Mostremos que

$$(7.6.1) \quad |f(z_k)| \rightarrow 1 \text{ siempre cuando } z_k \rightarrow \partial G \text{ en } G.$$

Para ello sea $(z_k) \subseteq G$ tal que $z_k \rightarrow \partial G$ cuando $k \rightarrow \infty$. Supongamos por contradicción, pasando a una subsucesión, que $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(z_k)| < 1$. Nuevamente pasando a una subsucesión podríamos suponer que $f(z_k) \rightarrow w \in \mathbb{D}$. Entonces $z_k = f^{-1}(f(z_k)) \rightarrow f^{-1}(w) \in G$, por continuidad de f^{-1} , una contradicción.

Fijemos $z_0 \in K$. La Definición 3.9.4 implica que existe una vecindad admisible V de z_0 , es decir, un disco D , simétrico con respecto a \mathbb{R} , una vecindad abierta V de z_0 y una función biholomorfa $\varphi: D \rightarrow V$ tal que $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = V \cap K$ y tal que sólo una de las dos componentes V_1, V_2 de $V \setminus K$, digamos V_1 , está contenida en G . Podemos suponer por (7.6.1) que f no tiene ceros en V_1 , tomando D lo suficientemente chico. Por ser conforme con una de las componentes de $D \setminus \mathbb{R}$, las cuales son simplemente conexas, el conjunto V_1 es simplemente conexo por el Teorema 4.3.6(a). Por el Teorema 5.1.6 existe un logaritmo g de f allá, es decir, $f = e^g$ en V_1 .

Sea L el arco analítico global $i\mathbb{R}$. Como $|f| < 1$ en G , necesariamente $\operatorname{Re} g < 0$ en G . Mostremos que

$$(7.6.2) \quad \operatorname{dist}(g(z_k), L) \rightarrow 0 \text{ siempre cuando } z_k \rightarrow \partial G \text{ en } V_1.$$

Notemos que $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{dist}(g(z), L)$ para todo $z \in V_1$. Sea $(z_k) \subseteq V_1$ tal que $z_k \rightarrow \partial G$ cuando $k \rightarrow \infty$. Supongamos por contradicción que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(g(z_k), L) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} g(z_k) < 0$. Entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |f(z_k)| = \liminf_{k \rightarrow \infty} |\exp(g(z_k))| = \exp(\liminf_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} g(z_k)) < 1,$$

contradiendo (7.6.1).

La ecuación (7.6.2) permite aplicar el Teorema 3.9.5 para obtener una extensión holomorfa de g a través de $v \cap K$. Como $f|_{V_1} = e^g$, ella proporciona una extensión holomorfa de $f|_{V_1}$ a través de $V \cap K$. Como $z_0 \in K$ era arbitrario, podemos juntar las extensiones locales de f a una extensión holomorfa de f a través de K usando el teorema de identidad. \square

8 Aproximación racional e interpolación

En esta sección mostraremos teoremas de interpolación. Ellos dan una respuesta a la pregunta: ¿Existe una función que tiene los ceros y polos prescritos en un conjunto discreto? para resolver esta pregunta necesitamos primero resultados sobre la aproximación de funciones holomorfas por funciones racionales.

8.1. El teorema de Runge

Recordemos que las funciones racionales son precisamente los mapeos holomorfos $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (Teorema 6.3.11). En esto, un mapeo holomorfo con un único polo en ∞ es un polinomio según el Teorema 6.3.10. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Trataremos de aproximar f uniformemente en K por funciones racionales con polos en $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$. Dos condiciones necesarias en f son

$$(8.1.1) \quad f \text{ es continua en } K;$$

$$(8.1.2) \quad f \text{ es holomorfa en } \text{int } K.$$

El teorema de Mergelyan afirma que estas dos condiciones son suficientes si $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ tiene sólo un número finito de componentes conexas. Aquí mostraremos un resultado mucho más sencillo:

8.1.1 Teorema (débil de Runge). *Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y f una función holomorfa en una vecindad abierta de K . Entonces existe una sucesión de funciones racionales con polos en $\mathbb{C} \setminus K$ que converge a f uniformemente en K .*

Demostración. Sean U una vecindad abierta del conjunto compacto K y f una función holomorfa en U . Dado $\varepsilon > 0$ mostraremos la existencia de una función racional g con polos del primer orden en $\mathbb{C} \setminus K$, límite 0 en ∞ y tal que

$$(8.1.3) \quad \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)| \leq \varepsilon.$$

El Lema 4.3.3 nos proporciona un ciclo Γ en $U \setminus K$ tal que $n(\Gamma, z) = 1$ para todo $z \in K$. Escribimos $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j$ con caminos de integración γ_j . Podemos suponer que los γ_j son continuamente diferenciables y que todos tienen el dominio $[0, 1]$ (después de partirlos en caminos parciales y hacer reparametrizaciones). Definimos

$$f_j(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k \text{ y } z \in K.$$

El teorema global de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^k n_j f_j(z) \quad \text{para todo } z \in K.$$

Sean $r := \text{dist}(\text{tr } \Gamma, K)/2$,

$$M := \max \left\{ \max_{z \in \text{tr } \Gamma} |f(z)| \max_j \sup_{t \in (0,1)} |\gamma_j'(t)|, \max_{z \in K} |z| + \max_{z \in \text{tr } \Gamma} |z| \right\}$$

y

$$\delta := \min \left\{ \frac{2\pi r^2 \varepsilon}{kM \max_j n_j}, r \right\}.$$

Consideramos para $j = 1, 2, \dots, k$ y $z \in K$ la representación

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t)) \gamma_j'(t)}{\gamma_j(t) - z} dt.$$

Las familias de funciones $\{(f \circ \gamma_j) \gamma_j'\}_{j=1}^k$ y $\{\gamma_j\}_{j=1}^k$ son equicontinuas en $[0, 1]$. En consecuencia, podemos encontrar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ y puntos $s_\ell \in (t_{\ell-1}, t_\ell)$ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) tales que las funciones escalonadas definidas por

$$\varphi_j(t) := f(\gamma_j(s_\ell)) \gamma_j'(s_\ell), \quad \psi_j(t) := \gamma_j(s_\ell), \quad \text{si } t \in (t_{\ell-1}, t_\ell),$$

cumplen

$$\begin{aligned} \max_j \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma_j(t)) \gamma_j'(t) - \varphi_j(t)| &\leq \delta \\ \max_j \sup_{t \in [0,1]} |\gamma_j(t) - \psi_j(t)| &\leq \delta. \end{aligned}$$

Los valores de φ_j y ψ_j en los puntos t_ℓ no importan. Podemos tomar φ_j y ψ_j continuas por la derecha en $[0, 1)$ y continuas por la izquierda en 1 . Se sigue que

$$|z - \psi_j(t)| \geq |z - \gamma_j(t)| - |\gamma_j(t) - \psi_j(t)| \geq r \quad \text{para todo } z \in K, t \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, k.$$

Fijemos una $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. La definición de φ_j y ψ_j implica que

$$\sup_{t \in [0,1]} |\varphi_j(t)| \leq \max_{z \in \text{tr } \Gamma} |f(z)| \sup_{t \in (0,1)} |\gamma_j'(t)| \leq M$$

y

$$\sup_{t \in [0,1]} \sup_{z \in K} |\psi_j(t) - z| \leq \max_{t \in [0,1]} \sup_{z \in K} (|\gamma_j(t)| + |z|) \leq M.$$

Para $z \in K$ y $t \in [0, 1]$ estimamos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t) - z} - \frac{\varphi_j(t)}{\psi_j(t) - z} \right| &= \frac{|f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)(\psi_j(t) - z) - \varphi_j(t)(\gamma_j(t) - z)|}{|(\gamma_j(t) - z)(\psi_j(t) - z)|} \\ &\leq \frac{|f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t) - \varphi_j(t)| \cdot |\psi_j(t) - z| + |\varphi_j(t)| \cdot |\psi_j(t) - \gamma_j(t)|}{2r^2} \\ &\leq M\delta/r^2 \\ &\leq \frac{2\pi\varepsilon}{k \max_i n_i}. \end{aligned}$$

Definimos

$$g_j := \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\varphi_j(t)}{\psi_j(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=1}^n \frac{\varphi_j(s_\ell)}{\psi_j(s_\ell) - z},$$

así que g_j es una función racional con polos del primer orden en $\mathbb{C} \setminus K$, $g_j(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ y

$$\max_{z \in K} |f_j(z) - g_j(z)| \leq \frac{\varepsilon}{k \max_i n_i}.$$

La función $g := \sum_{j=1}^k n_j g_j$ tiene todas las propiedades deseadas. \square

Mostraremos una versión más refinada del teorema de Runge. Para ello necesitaremos un resultado técnico:

8.1.2 Lema (de empujar polos). *Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, G una componente conexa de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, $a, b \in G$ y $a \neq \infty$. Entonces cada función racional f con un único polo en a puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales únicamente con polos en b . Si $b = \infty$ entonces las funciones aproximantes son polinomios.*

Demostración. Para $z_0 \in \mathbb{C}$ sea $\Lambda(z_0)$ el conjunto de los mapeos holomorfos en $\hat{\mathbb{C}}$ con un único polo en z_0 y con un cero en ∞ , y sea $\Lambda(\infty)$ el conjunto de los polinomios. Además, denotamos para $z_0, w_0 \in G$ por $\Gamma(z_0, w_0) \subseteq \Lambda(z_0)$ el conjunto de las funciones de $\Lambda(z_0)$ que son aproximables uniformemente en K por funciones de $\Lambda(w_0)$. Basta mostrar que

$$(8.1.4) \quad \Gamma(a, b) = \Lambda(a).$$

Es obvio que $\Lambda(z_0)$ es un \mathbb{C} -álgebra de funciones para todo $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Si $z_0 \neq \infty$, entonces la función $h_{z_0}: z \mapsto 1/(z - z_0)$ genera $\Lambda(z_0)$. Afirmamos que $\Gamma(z_0, w_0)$ es una subálgebra de $\Lambda(z_0)$ si $z_0, w_0 \in G$. Para demostrar esto sean $c, d \in \mathbb{C}$, $f, g \in \Gamma(z_0, w_0)$, y $(f_j), (g_j)$ sucesiones en $\Lambda(w_0)$ que convergen a f y g respectivamente, uniformemente en K . Existe $M > 0$ tal que

$$\sup_j \max_{z \in K} |f_j(z)|, \max_{z \in K} |g(z)| \leq M.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |(cf(z) + dg(z)) - (cf_j(z) + dg_j(z))| \\ \leq \max_{z \in K} (|c| |f(z) - f_j(z)| + |d| |g(z) - g_j(z)|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |f(z)g(z) - f_j(z)g_j(z)| &\leq \max_{z \in K} (|f(z) - f_j(z)| |g(z)| + |f_j(z)| |g(z) - g_j(z)|) \\ &\leq M \max_{z \in K} (|f(z) - f_j(z)| + |g(z) - g_j(z)|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Como $cf_j + dg_j$ y f_jg_j se encuentran en $\Lambda(w_0)$ para todo j , también $cf + dg$ y fg se encuentran en $\Gamma(z_0, w_0)$. Eso muestra que $\Gamma(z_0, w_0)$ es un álgebra.

Primero tratamos el caso de $b \neq \infty$. Sea U el conjunto de puntos z_0 en $G \setminus \{\infty\}$ tal que $\Gamma(z_0, b) = \Lambda(z_0)$. Usando la conexidad de $G \setminus \{\infty\}$ mostremos que $U = G \setminus \{\infty\}$, así que se cumple (8.1.4) en ese caso.

El conjunto U no es vacío ya que $b \in U$. Mostremos que U es abierto. Sea $z_0 \in U$. Para cualquier $z \in \overline{D}_{\text{dist}(z_0, K)/2}(z_0)$ y $w \in K$ tenemos que $|z - z_0| \leq |w - z_0|/2$. En seguida,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k$$

converge uniformemente en $w \in K$, ya que la serie está dominada por la serie geométrica del valor $1/2$. Eso muestra que $h_z \in \Gamma(z, z_0)$. Como $\Gamma(z, z_0)$ es un álgebra y h_z genera todo $\Lambda(z)$, $\Gamma(z, z_0) = \Lambda(z)$. Falta ver que $\Gamma(z, z_0) \subseteq \Gamma(z, b)$. Sea $f \in \Gamma(z, z_0)$. Existe una sucesión $(f_j) \subseteq \Lambda(z_0)$ que converge a f uniformemente en K . Como $z_0 \in U$, $\Lambda(z_0) = \Gamma(z_0, b)$. En seguida, existe para cada $j \in \mathbb{N}$ una función $g_j \in \Lambda(b)$ tal que $\max_{z \in K} |f_j(z) - g_j(z)| \leq 1/j$. Por lo tanto,

$$\max_{z \in K} |f(z) - g_j(z)| \leq \max_{z \in K} (|f(z) - f_j(z)| + |f_j(z) - g_j(z)|) \rightarrow 0$$

cuando $j \rightarrow \infty$, es decir, $f \in \Gamma(z, b)$. Esto implica

$$\Lambda(z) = \Gamma(z, z_0) \subseteq \Gamma(z, b) \subseteq \Lambda(z),$$

así que $\Gamma(z, b) = \Lambda(z)$ y $z \in U$. Por consiguiente, mostramos que $\overline{D}_{\text{dist}(z_0, K)/2}(z_0) \subseteq U$ y luego que U es abierto.

Para ver que U es relativamente cerrado en $G \setminus \{\infty\}$, sea $z_0 \in G \setminus (U \cup \{\infty\})$. Si existiera $z \in D_{\text{dist}(z_0, K)/3}(z_0) \cap U$, entonces tendríamos para todo $w \in K$ que

$$|z_0 - z| < \frac{1}{3}|z_0 - w| \leq \frac{1}{3}(|z_0 - z| + |z - w|).$$

Subtrayendo $|z_0 - z|/3$ en ambos lados y multiplicando por $3/2$ obtenemos que $|z_0 - z| < |z - w|/2$. Tomando el mínimo sobre todo $w \in K$ eso da $z_0 \in \overline{D}_{\text{dist}(z, K)/2}(z)$. Pero como $z \in U$, lo que mostramos arriba implicaría que $z_0 \in U$, una contradicción. Por lo tanto, $D_{\text{dist}(z_0, K)/3}(z_0) \subseteq G \setminus (U \cup \{\infty\})$, mostrando que $G \setminus (U \cup \{\infty\})$ es abierto, respectivamente que U es relativamente cerrado. En conclusión, mostramos (8.1.4) para $b \neq \infty$.

Sea ahora $b = \infty$. Mostremos que $\Gamma(a, \infty) = \Lambda(a)$. Para ello sean $f \in \Lambda(a)$ y $r > 0$ tan grande que $K \subseteq D_r(0)$. Escogemos $w_0 \in \mathbb{C} \setminus D_r(0)$. Por lo que mostramos arriba, $\Gamma(a, w_0) = \Lambda(a)$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $g \in \Lambda(w_0)$ tal que

$$\max_{z \in K} |f(z) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, g es holomorfa en $D_r(0)$, así que su serie de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ converge uniformemente en K . Para k_0 suficientemente grande y $h: z \mapsto \sum_{k=0}^{k_0} c_k z^k$ tenemos que

$$\max_{z \in K} |g(z) - h(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

así que

$$\max_{z \in K} |f(z) - h(z)| \leq \varepsilon.$$

Entonces $f \in \Gamma(a, \infty)$ ya que $h \in \Lambda(\infty)$ y ε era arbitrario. \square

8.1.3 Teorema (de Runge). *Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $P \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus K$ tal que cada componente conexa de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ contiene precisamente un punto de P . Entonces cada función f que es holomorfa en una vecindad de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales que únicamente tienen polos en P .*

Demostración. Sea f holomorfa en una vecindad de K y sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 8.1.1 existe una función racional $g: z \mapsto \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\beta_j - z}$ tal que $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus K$ para todo j y que cumple

$$(8.1.5) \quad \max_{z \in K} |f(z) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea U_j la componente conexa de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ que contiene a β_j , y sea $p_j \in P \cap U_j$. Por el Lema 8.1.2 existe una función racional q_j con un único polo en p_j tal que

$$\max_{z \in K} \left| \frac{1}{\beta_j - z} - q_j \right| \leq \frac{\varepsilon}{2k|\alpha_j|}.$$

Con la definición $h := \sum_{j=1}^k \alpha_j q_j$ obtenemos

$$\max_{z \in K} |g(z) - h(z)| \leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \max_{z \in K} \left| \frac{1}{\beta_j - z} - q_j \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Junto con la ecuación (8.1.5) obtenemos la afirmación, ya que h únicamente tiene polos en P . \square

Ahora cambiamos un poco nuestro punto de vista y buscamos aproximar localmente uniformemente una función holomorfa en un conjunto abierto U por funciones racionales con polos fuera de U .

8.1.4 Definición. Sea K un subconjunto compacto del conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. La *envolvente U -convexa* \hat{K}_U es la unión de K con todas las componentes conexas de $U \setminus K$ que son compactamente contenidas en U . K es *U -convexo* si $\hat{K}_U = K$. Si $U = \mathbb{C}$ entonces $\hat{K}_{\mathbb{C}}$ se llama la *envolvente polinomialmente convexa* de K , y si $\hat{K}_{\mathbb{C}} = K$ entonces K se llama *polinomialmente convexo*.

Muchas veces escribimos $\hat{K} := \hat{K}_U$ si el conjunto U es fijo. la intuición es que \hat{K} se obtiene de K llenando todos los hoyos de K que están contenidos en U .

8.1.5 Proposición. *Sea K un subconjunto compacto del conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. Entonces se cumplen:*

- (a) \hat{K} es compacto;
- (b) K es U -convexo si y sólo si $\hat{K} = K$;
- (c) $\hat{\hat{K}} = \hat{K}$ y \hat{K} es U -convexo;
- (d) existe una sucesión creciente $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ de subconjuntos compactos y U -convexos de U tal que $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int } K_j$.

Demostración. Mostremos primero la implicación

$$(8.1.6) \quad \forall r > 0: (K \subseteq \overline{D}_r \Rightarrow \hat{K} \subseteq \overline{D}_r)$$

y la igualdad

$$(8.1.7) \quad \text{dist}(\hat{K}, \partial U) = \text{dist}(K, \partial U).$$

Para mostrar (8.1.6) fijemos $r > 0$ tal que $K \subseteq \overline{D}_r$. Si $V \subset\subset U$ es una componente conexa de $U \setminus K$, mostremos que $\partial V \subseteq K$. Si $z \in \partial V \setminus K$, entonces existe $D_r(z) \subseteq U \setminus K$ ya que $z \in U \setminus K$. Como $D_r(z) \cap V \neq \emptyset$ y V es una componente conexa de $U \setminus K$, $D_r(z) \subseteq V$, lo cual contradice a $z \in \partial V$. Entonces no existe tal z y luego $\partial V \subseteq K$. Si $V \setminus \overline{D}_r \neq \emptyset$ fuera cierto, esto implicaría que $\partial V \setminus \overline{D}_r \neq \emptyset$, ya que V es acotado, en contradicción con $\partial V \subseteq K \subseteq \overline{D}_r$. Luego $V \subseteq \overline{D}_r$ y (8.1.6) es cierto.

Mostremos (8.1.7). Si $\partial U = \emptyset$ la igualdad es obvia. Supongamos entonces que $\partial U \neq \emptyset$. Sean $V \subset\subset U$ una componente conexa de $U \setminus K$ y $z \in V$. Existe $v \in \partial U$ tal que $\text{dist}(z, \partial U) = |z - v|$. Si $[z, v) \subseteq V$ fuera cierto, entonces $v \in \partial V$ sería cierto, en contradicción con $\overline{V} \subseteq U$. Entonces $[z, v) \not\subseteq V$ y existe $w \in [z, v) \cap K$. Se sigue que $\text{dist}(z, \partial U) = |z - v| = |z - w| + |w - v| \geq \text{dist}(K, \partial U)$. Tomando el ínfimo sobre los $z \in V$ esto implica $\text{dist}(V, \partial U) \geq \text{dist}(K, \partial U)$. Se sigue que $\text{dist}(\hat{K}, \partial U) \geq \text{dist}(K, \partial U)$ por la definición de \hat{K} . La desigualdad “ \leq ” de (8.1.7) es trivial, ya que $K \subseteq \hat{K}$.

Inciso (a): Por (8.1.6) \hat{K} es acotado. El conjunto $U \setminus \hat{K}$ es la unión de componentes conexas de $U \setminus K$, las cuales son conjuntos abiertos. Entonces $U \setminus \hat{K}$ es abierto y \hat{K} relativamente cerrado en U . La ecuación (8.1.7) implica que $\text{dist}(\hat{K}, \partial U) = \text{dist}(K, \partial U) > 0$. Es fácil ver que luego \hat{K} es cerrado. Estos hechos muestran que \hat{K} es compacto.

Inciso (b): Esto es una consecuencia inmediata de la definición de \hat{K} .

Inciso (c): Por definición, $U \setminus \hat{K}$ no tiene componentes conexas que son compactamente contenidas en U . Esto muestra que $\hat{\hat{K}} = \hat{K}$. Luego \hat{K} es U -convexo por el inciso (b).

Inciso (d): Definimos para $j \in \mathbb{N}$

$$K_j := \left\{ z \in U \mid \text{dist}(z, \partial U) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap \overline{D}_j.$$

Es obvio que los K_j forman una sucesión creciente de subconjuntos compactos de U tal que $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{int } K_j$. Nada más falta mostrar que cada K_j es U -convexo. Fijemos j . Como $K \subseteq \overline{D}_j$, (8.1.6) para K_j en vez de K implica que $\hat{K}_j \subseteq \overline{D}_j$. Junto con la desigualdad (8.1.7) obtenemos que $\hat{K}_j = K_j$, es decir, K_j es U -convexo por el inciso (b). \square

Con estas nociones podemos formular una otra versión del teorema de Runge:

8.1.6 Teorema. *Sean $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos con K compacto y U abierto. Entonces son equivalentes:*

- (I) K es U -convexo;
- (II) toda función holomorfa en una vecindad de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones holomorfas en U ;
- (III) toda función holomorfa en una vecindad de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales con polos fuera de U .

Demostración. Inciso (I) implica inciso (III): Sea V una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus K$. El conjunto \overline{V} no está contenido en U , ya que K es U -convexo. Como en la demostración de la Proposición 8.1.5 tenemos que $\partial V \subseteq K$. Este hecho implica que V no está contenido en U . Sea P un conjunto formado por ∞ y por puntos $p \in V \setminus U$, precisamente un punto para cada componente conexa acotada V de $\mathbb{C} \setminus K$. Por el Teorema 8.1.3 cada función holomorfa en una vecindad de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales con polos en P , es decir, fuera de U .

Inciso (III) implica inciso (II): Trivial.

Inciso (II) implica inciso (I): Mostremos que si (I) no es cierto, entonces (II) tampoco lo es. Sea $V \subset\subset U$ una componente conexa de $U \setminus K$. Como arriba se sigue que $\partial V \subseteq K$. Escogemos $a \in V$ y mostremos que $f(z) := 1/(z - a)$ no puede ser aproximada uniformemente en K por funciones holomorfas en U . Si (f_j) fuera una sucesión de funciones holomorfas en U que converge a f uniformemente en K , entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \forall i, j \geq j_0: \max_{z \in K} |f_i(z) - f_j(z)| \leq \varepsilon.$$

Por el principio del máximo y porque $\partial V \subseteq K$ esto implicaría

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \forall i, j \geq j_0: \sup_{z \in V} |f_i(z) - f_j(z)| \leq \varepsilon.$$

En consecuencia, (f_j) convergería uniformemente en $K \cup V$ a una función f_0 , la cual sería holomorfa en V , continua en $K \cup V$ y coincidiría con f en K . La función $g(z) := 1 - (z - a)f_0(z)$ sería la constante 0 en $\partial V \subseteq K$, continua en \overline{V} y holomorfa en V . Por el principio del máximo (Teorema 3.4.8(b)) $g \equiv 0$ en \overline{V} . Por otro lado, la definición de g da $g(a) = 1$, una contradicción ya que $a \in V$. Entonces no existe tal sucesión (f_j) y (II) no es cierto. \square

8.1.7 Teorema. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Toda función holomorfa en U puede ser aproximada localmente uniformemente en U por funciones racionales con polos fuera de U .*

Demostración. Sea f una función holomorfa en U , y sea $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ una sucesión creciente de subconjuntos compactos y U -convexos de U tal que $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{int } K_j$, la cual existe por la Proposición 8.1.5(d). Por el Teorema 8.1.6 existe, para cada $j \in \mathbb{N}$, una función racional f_j con polos fuera de U tal que

$$\max_{z \in K_j} |f(z) - f_j(z)| \leq \frac{1}{j}.$$

En seguida, para cada $i \in \mathbb{N}$ la sucesión (f_j) converge a f uniformemente en K_i cuando $j \rightarrow \infty$. Si $z \in U$, entonces existe i tal que $z \in \text{int } K_i$, y (f_j) converge uniformemente en esa vecindad K_i de z . Eso muestra la convergencia localmente uniforme de (f_j) . \square

Otra consecuencia del Teorema 8.1.6 es una caracterización de conjuntos abiertos simplemente conexos por aproximabilidad de funciones holomorfas en ellos por polinomios.

8.1.8 Teorema. *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región. Entonces G es simplemente conexa si y sólo si toda función holomorfa f en G puede ser aproximada localmente uniformemente en G por polinomios.*

Demostración. Sean primero G una región simplemente conexa y f una función holomorfa en G . Si $K \subseteq G$ es compacto y G -convexo, mostremos que K es \mathbb{C} -convexo. Para una componente conexa acotada V de $\mathbb{C} \setminus K$ tenemos que $\partial V \subseteq K \subseteq G$, así que $G_0 := G \cup \bar{V} = G \cup V$ es abierto. Como $\bar{V} \subseteq G_0$ es compacto, existe un ciclo Γ en $G_0 \setminus \bar{V} \subseteq G$ que tiene homología nula en G_0 y cumple $n(\Gamma, z) = 1$ para todo $z \in \bar{V}$. En seguida, $\bar{V} \subseteq G$ ya que G es simplemente conexa. Eso muestra que $\bar{V} \subseteq K$ ya que K es G -convexo. Por consiguiente, K es \mathbb{C} -convexo. Por el Teorema 8.1.3 f es uniformemente aproximable en K por polinomios. Como en la demostración del Teorema 8.1.7 se construye con esta información una sucesión de polinomios que converge a f localmente uniformemente en G .

Inversamente, sea cada función holomorfa en G el límite de una sucesión localmente convergente de polinomios. Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ y Γ es un ciclo en G , entonces la función $f(z) := 1/(z - z_0)$ puede ser aproximada localmente uniformemente por polinomios (f_j) en G . Se sigue que

$$n(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_j = 0,$$

ya que las funciones f_j son enteras. Eso muestra que G es simplemente conexo. \square

Caractericemos la envolvente U -convexa por propiedades de funciones holomorfas:

8.1.9 Teorema. *Sea K un subconjunto compacto del conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z \in U$. Entonces $z \in \hat{K}_U$ si y sólo si para toda función holomorfa f en U se cumple que*

$$(8.1.8) \quad |f(z)| \leq \max_{w \in K} |f(w)|.$$

Demostración. Sean primero $z \in \hat{K}_U$. Basta considerar el caso de $z \in V$, donde $V \subset \subset$ es una componente conexa de $U \setminus K$. Se sigue que $\partial V \subseteq K$. El principio del máximo implica que

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial V} |f(w)| \leq \max_{w \in K} |f(w)|.$$

Inversamente, sea $z_0 \notin \hat{K}_U$. Existe una función f_0 holomorfa en una vecindad de $K_1 := \hat{K}_U \cup \{z_0\}$ tal que

$$f_0(z_0) = 1 \quad \text{y} \quad f_0|_{\hat{K}_U} \equiv 0.$$

Si V es la componente conexa de $U \setminus \hat{K}_U$ que contiene a z_0 , entonces $V \setminus \{z_0\}$ es una componente conexa de $U \setminus K_1$ y $\overline{V \setminus \{z_0\}} = \bar{V}$, la cual no es compactamente contenida en U . Las otras componentes conexas de $U \setminus \hat{K}_U$ y $U \setminus K_1$ coinciden. Por lo tanto, $U \setminus (\hat{K}_U \cup \{z_0\})$ es U -convexo. Por el Teorema 8.1.6 existe una función holomorfa en U tal que

$$\max_{z \in \hat{K}_U \cup \{z_0\}} |f(z) - f_0(z)| \leq \frac{1}{4}.$$

Ella cumple

$$|f(z_0)| \geq |f_0(z_0)| - |f_0(z_0) - f(z_0)| \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{4} \geq \max_{z \in K} |f(z)|.$$

Entonces (8.1.8) no es cierto para toda función holomorfa en U . □

8.2. El teorema de Mittag-Leffler

En esta sección trataremos un problema particular de interpolación: encontrar una función meromorfa que tenga partes principales de series de Laurent prescritas en un conjunto discreto de polos prescritos.

8.2.1 Definición. Una *parte principal con punto de desarrollo* a es un polinomio en $1/(z - a)$ de la forma

$$h_a(z) := \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - a)^k.$$

Para un subconjunto abierto U de \mathbb{C} una *distribución de partes principales en U* es una colección $H = \{h_a \mid a \in P\}$ de partes principales con puntos de desarrollo en P (sin repeticiones), donde P es un subconjunto discreto de U .

Una función meromorfa f en U determina una distribución de partes principales $H(f)$ como la colección de las partes principales de sus series de Laurent en vecindades pinchadas de todos sus polos. Si f es holomorfa, entonces ponemos $H(f) = \emptyset$.

8.2.2 Definición. Una distribución H de partes principales en U se llama *resoluble* si existe una función meromorfa f en U tal que $H = H(f)$. En ese caso la función f se llama una *solución de H* .

Si una distribución de partes principales H es finita, entonces la suma de las partes principales es una solución de H . Si H es infinito podríamos intentar sumar las partes principales. Inmediatamente surge el problema de convergencia de la serie de funciones meromorfas.

8.2.3 Definición. La serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ de funciones meromorfas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ converge (absoluta y) localmente uniformemente en U si para todo $z_0 \in U$ existen $r > 0$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D_r(z_0) \subseteq U$, tal que f_j es holomorfa en $D_r(z_0)$ para $j \geq j_0$ y tal que $\sum_{j=j_0}^{\infty} f_j$ converge (absoluta y) uniformemente en $D_r(z_0)$. En ese caso el conjunto P de los polos de todas las funciones f_j es discreto en U y $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge a una función meromorfa f en U con polos en P .

8.2.4 Teorema (Mittag-Leffler). Toda distribución de partes principales en un subconjunto abierto U de \mathbb{C} es resoluble.

Demostración. Sea $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ una sucesión de conjuntos compactos y U -convexos en U tal que $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int } K_j$, dado por la Proposición 8.1.5(d). Definimos para $j \in \mathbb{N}$ fijo la función meromorfa

$$f_j := \sum_{a \in K_{j+1} \setminus K_j} h_a$$

en U , una suma finita ya que el conjunto de polos de H es discreto en U . Como f_j es holomorfa en una vecindad de K_j y por el Teorema 8.1.6 existe una función holomorfa g_j en U tal que

$$\max_{z \in K_j} |f_j(z) - g_j(z)| \leq \frac{1}{2^j}.$$

El criterio de la serie dominante implica que $\sum_{i=j}^{\infty} (f_i - g_i)$ converge absoluta y uniformemente en K_j . Por la propiedad $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int } K_j$ la serie de funciones meromorfas $\sum_{j=1}^{\infty} (f_j - g_j)$ converge absoluta y localmente uniformemente en U a una función meromorfa f . Como para todo $j \in \mathbb{N}$ las partes principales de $\sum_{i=1}^{j-1} (f_i - g_i)$ son precisamente los $h_a \in H$ tales que $a \in K_j$ y como $\sum_{i=j}^{\infty} (f_i - g_i)$ es una función holomorfa en $\text{int } K_j$, f es una solución de H . \square

En las aplicaciones trataremos principalmente funciones meromorfas en todo \mathbb{C} , así que vale la pena anotar una versión particular para este caso:

8.2.5 Corolario. Sea $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de puntos distintos en \mathbb{C} tal que $a_0 = 0$, $|a_j| \leq |a_{j+1}|$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $|a_j| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ sea h_j una parte principal con punto de desarrollo a_j ; aquí permitimos $h_0 = 0$. Entonces existen números $k_j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $j \in \mathbb{N}$, tal que si g_j es el polinomio de Taylor de h_j del orden k_j entonces

$$(8.2.1) \quad f = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (h_j - g_j)$$

converge absoluta y localmente uniformemente a una solución f de la distribución de partes principales $\{h_j\}_{j=0}^{\infty}$. En esto el polinomio de Taylor del orden -1 es 0.

Demostración. En esta situación definimos $K_j := \overline{D}_{|a_j|/2}$. Como cada K_j es polinomialmente convexo, podemos aproximar h_j uniformemente en K_j por un polinomio de Taylor de h_j con orden suficientemente grande. \square

El Teorema 8.2.4 implica un análogo del Corolario 6.3.12 para funciones meromorfas:

8.2.6 Teorema (Fracciones parciales para una función meromorfa). *Sean f una función meromorfa en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, $P_f = \{a_1, a_2, \dots\}$ el conjunto de los polos de f y $H(f) = \{h_{a_1}, h_{a_2}, \dots\}$ la distribución de partes principales de f . Entonces existen una función entera g y funciones racionales g_j con polos fuera de U tal que*

$$(8.2.2) \quad f = g + \sum_{j=1}^{\infty} (h_{a_j} - g_j)$$

converge absoluta y localmente uniformemente en U .

Si $U = \mathbb{C}$ entonces podemos tomar polinomios para las funciones g_j .

Demostración. El Teorema 8.2.4 nos proporciona una solución \tilde{f} de $H(f)$. Basta poner $g := f - \tilde{f}$, la cual es una función entera. \square

8.2.7 Nota. El orden de enumeración de los polos de f en el Teorema 8.2.6 no importa ya que todas las series consideradas convergen absolutamente.

8.2.8 Ejemplo. Calculemos soluciones de distribuciones de partes principales del orden uno con residuos dados.

- (a) Sea $(a_j)_{j=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión como en el Corolario 8.2.5 y sea $(c_j)_{j=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $c_j \neq 0$ para $j \geq 1$. Consideremos la distribución de partes principales $h_j(z) := c_j/(z - a_j)$. Sea $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$ una serie convergente de sumandos positivos. La serie de Taylor de $1/(z - a_j)$ en 0 es

$$\frac{1}{z - a_j} = -\frac{1}{a_j} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_j}\right)^{\ell} \quad \text{para } j \in \mathbb{N}.$$

Si escogemos $k_j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ tal que

$$\left| \frac{1}{z - a_j} + \frac{1}{a_j} \sum_{\ell=0}^{k_j} \left(\frac{z}{a_j}\right)^{\ell} \right| \leq \frac{\varepsilon_j}{|c_j|}$$

para $|z| \leq |a_j|/2$, entonces

$$(8.2.3) \quad f(z) := \frac{c_0}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left(\frac{1}{z - a_j} + \sum_{\ell=0}^{k_j} \frac{z^{\ell}}{a_j^{\ell+1}} \right)$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} con polos del primer orden con residuos c_j en los puntos a_j .

- (b) Como en el inciso (a) especifiquemos las sucesiones por $a_j := j$ y $c_j := 1$, $j \in \mathbb{Z}$. Aquí podemos escoger $k_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: para $z \in D_r$ y $|j| \geq 2r$ se tiene que

$$\left| \frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right| = \frac{|z|}{|j||z-j|} \leq \frac{r}{|j||j|/2} = \frac{2r}{j^2},$$

y la serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2}$ converge. Entonces

$$(8.2.4) \quad f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right)$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} con polos del primer orden con residuos 1 en los puntos de \mathbb{Z} .

- (c) Construiremos un ejemplo con polos del primer orden que no necesita términos para generar convergencia de la serie. Ponemos $a_j := j^2$ y $c_j := 1$ para $j \in \mathbb{N}_0$. Para $|z| \leq r$ y $j^2 \geq 2r$ se sigue que

$$\left| \frac{1}{z-j^2} \right| \leq \frac{1}{j^2 - |z|} \leq \frac{2}{j^2}.$$

Por consiguiente,

$$(8.2.5) \quad f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z-j^2}$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} con polos simples con residuo 1 en los puntos j^2 , $j \in \mathbb{N}_0$.

8.3. El teorema de productos infinitos de Weierstraß

En esta sección atacemos el problema de interpolar ceros con multiplicidades prescritas. Si el número de ceros es finito, digamos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_k , una función que los interpola es el polinomio

$$\prod_{j=1}^k (z - a_j)^{m_j}.$$

Para un conjunto infinito de ceros tendremos que formar productos infinitos y considerar su convergencia.

8.3.1 Definición. Sea $(a_j) \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión. Si todos a_j son distintos de cero entonces decimos que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ converge y tiene el límite a si existe

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k a_j \neq 0.$$

En general decimos que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ converge si casi todos los a_j son distintos de cero y si $\prod_{a_j \neq 0} a_j$ existe. Si al menos uno de los factores a_j es cero, entonces el valor del producto convergente es cero. Además, definimos $\prod_{j=m}^n a_j := 1$ si $n < m$.

Para series infinitas convergentes se tiene que la sucesión de sumandos tiende a cero. Análogamente, se tiene que la sucesión de los factores de un producto infinito convergente tiende a 1: sea $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a \neq 0$ un producto convergente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos los a_j son distintos de cero (sólo nos interesan los factores en el límite). Eso implica

$$a_j = \frac{\prod_{i=1}^j a_i}{\prod_{i=1}^{j-1} a_i} \rightarrow \frac{a}{a} = 1$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Por ello es conveniente escribir los productos infinitos como

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + b_j).$$

8.3.2 Definición. Un producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + b_j)$ se llama *absolutamente convergente* si el producto $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |b_j|)$ converge.

8.3.3 Proposición. Sea $(a_j) \subseteq \mathbb{C}$.

- (a) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} e^{a_j}$ converge si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ converge.
 (b) La convergencia de uno de los límites

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + |a_j|)$$

implica la convergencia de los otros dos.

- (c) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$ converge si y sólo si existe j_0 tal que $a_j \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ para $j \geq j_0$ y converge la serie $\sum_{j=j_0}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + a_j)|$.
 (d) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} e^{a_j}$ converge absolutamente si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ converge absolutamente.
 (e) Convergencia absoluta de un producto infinito implica convergencia simple del producto.

Demostración. **Inciso (a):** Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\prod_{j=1}^k e^{a_j} = \exp\left(\sum_{j=1}^k a_j\right).$$

La continuidad de la exponencial implica la afirmación, ya que $\exp(\sum a_j) \neq 0$.

Inciso (b): Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$(8.3.1) \quad \prod_{j=1}^k (1 + |a_j|) = \exp \left(\sum_{j=1}^k \log(1 + |a_j|) \right) > 0$$

y luego

$$(8.3.2) \quad \log \prod_{j=1}^k (1 + |a_j|) = \sum_{j=1}^k \log(1 + |a_j|).$$

Junto con la continuidad de la exponencial y del logaritmo real, estos hechos implican que $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$ converge si y sólo si $\sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + |a_j|)$ converge. Para todo $z \in D_{1/4}$ tenemos por la serie de potencias de $\text{Log}(1 + z)$ en 0 (ver ecuación (5.1.5)) que

$$|\text{Log}(1 + z)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} z^j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^j}{j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |z|^j = \frac{|z|}{1 - |z|} \leq \frac{4}{3}|z|$$

y

$$|\text{Log}(1 + z)| \geq |z| - \sum_{j=2}^{\infty} |z|^j = |z| \left(1 - \frac{|z|}{1 - |z|} \right) \geq \frac{2}{3}|z|.$$

Estas desigualdades implican que

$$(8.3.3) \quad \frac{1}{2} \log(1 + |z|) \leq \frac{2}{3}|z| \leq |\text{Log}(1 + z)| \leq \frac{4}{3}|z| \leq 2 \log(1 + |z|)$$

para todo $z \in \overline{D}_{1/4}$.

Por consiguiente, $\sum_{j=1}^k \log(1 + |a_j|)$ converge si y sólo si $\sum_{j=1}^k |a_j|$ converge.

Inciso (c): Si $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$ converge, entonces $a_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. En seguida, existe j_0 tal que $a_j \in \overline{D}_{1/4} \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ para $j \geq j_0$. El inciso (b) y (8.3.3) implican que $\sum_{j=j_0}^{\infty} |\text{Log}(1 + a_j)|$ converge. Para mostrar la implicación inversa sea $a_j \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ para j grande. La convergencia de $\sum_{j=j_0}^{\infty} |\text{Log}(1 + a_j)|$ dice por la continuidad de la exponencial que $(1 + a_j) = \exp(\text{Log}(1 + a_j)) \rightarrow 1$, es decir, $a_j \rightarrow 0$. Existe j_0 tal que $a_j \in \overline{D}_{1/4} \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ para $j \geq j_0$. La afirmación es una consecuencia del inciso (b) y de (8.3.3).

Inciso (d): Como $a_j \rightarrow 0$ y $\lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 1)/z = 1$, existe $M > 0$ tal que $|(e^{a_j} - 1)/a_j| \leq M$ para todo j . Se sigue que $|e^{a_j} - 1| \leq M|a_j|$, así que $\sum_{j=1}^{\infty} |e^{a_j} - 1|$ converge. El inciso (b) implica la afirmación.

Inciso (e): Si $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |a_j|)$ converge, entonces existe j_0 tal que $\sum_{j=j_0}^{\infty} |\text{Log}(1 + a_j)|$ converge, por el inciso (c). Para series sabemos que convergencia absoluta implica convergencia simple, así que el inciso (a) da la afirmación. \square

8.3.4 Definición. Sea A un conjunto y sea (f_j) una sucesión de funciones complejas en A . El producto $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j)$ converge (absoluta y) puntualmente a la función

f si $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + f_j(x))$ converge (absolutamente) a $f(x)$ para todo $x \in A$. El producto $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + f_j)$ converge (absoluta y) (localmente) uniformemente si el producto converge puntualmente y si la sucesión de los productos parciales converge (absoluta y) (localmente) uniformemente.

8.3.5 Proposición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, K un subconjunto compacto de U y (f_j) una sucesión de funciones complejas en U .

(a) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} e^{f_j}$ converge uniformemente en K si $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente en K .

(b) La convergencia uniforme en K de uno de los límites

$$(8.3.4) \quad \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |f_j|), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + |f_j|), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$$

implica la convergencia uniforme en K de los otros dos.

(c) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + |f_j|)$ converge uniformemente en K si y sólo si existe un índice j_0 tal que $f_j(K) \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ para $j \geq j_0$ y la serie $\sum_{j=j_0}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + f_j)|$ converge uniformemente en K .

(d) El producto $\prod_{j=1}^{\infty} e^{f_j}$ converge absoluta y uniformemente en K si $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge absoluta y uniformemente en K .

(e) Convergencia absoluta y uniforme en K de un producto infinito de funciones implica convergencia simple uniforme en K del producto.

(f) Los incisos (a)–(e) son válidos reemplazando convergencia uniforme en K por convergencia localmente uniforme en U .

(g) Si las f_j son funciones holomorfas y si $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j)$ converge localmente uniformemente en U , entonces su función límite es holomorfa.

Demostración. Inciso (a): Sea K un subconjunto compacto de U . Como $\sum_j f_j$ converge uniformemente en K , $f_j \rightarrow 0$ uniformemente en K y existe $M > 0$ tal que $\sup_{j \in \mathbb{N}} \max_{z \in K} |f_j(z)| \leq M$. La exponencial es uniformemente continua en $[-M, M]$. Como en la demostración de Proposición 8.3.3(a) esto implica que $\prod_{j=1}^{\infty} e^{f_j}$ converge uniformemente en K .

Los incisos (b)–(e) se demuestran como los incisos (b)–(e) de la Proposición 8.3.3, siempre restringiéndose a un subconjunto compacto de U .

Incisos (f): Trivial.

Inciso (g): Esto es una consecuencia del Teorema 3.4.4. □

Ataquemos el problema de interpolación de ceros y polos con ordenes prescritos.

8.3.6 Definición. Un *divisor* en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ es una función $\mathcal{D}: U \rightarrow \mathbb{Z}$ que toma valores distintos de cero sólo en un conjunto $|\mathcal{D}|$ discreto en U . Un divisor \mathcal{D} es *positivo* si $\mathcal{D}(z) \geq 0$ para todo $z \in U$, y también se llama una *distribución de ceros*. El grupo abeliano de todos los divisores en U está denotado por $\Delta(U)$.

Recordemos que el conjunto de las funciones meromorfas en una región G es un campo (Teorema 6.3.2), al cual denotaremos por $\mathcal{K}(G)$, y cuyo grupo multiplicativo está denotado por $\mathcal{K}^*(G)$. Si n es el orden de un polo z_0 de una función meromorfa, diremos que $-n$ es el orden del cero z_0 . Si z_0 ni es un polo ni un cero, entonces el orden del cero z_0 es 0. La relación entre divisores y ceros y polos de funciones meromorfas es la siguiente:

8.3.7 Definición. Sean G una región y $f \in \mathcal{K}^*(G)$. El *divisor* $\text{Div}(f)$ de f es el mapeo que asigna a cada $z \in G$ el orden del cero z . Si \mathcal{D} es un divisor en G , una función $g \in \mathcal{K}^*(G)$ es una *solución de \mathcal{D}* si $\text{Div}(g) = \mathcal{D}$.

Una función es holomorfa si y sólo si su divisor es positivo. En ese caso su divisor es la distribución de sus ceros.

8.3.8 Proposición. El mapeo $\text{Div}: \mathcal{K}^*(G) \rightarrow \Delta(G)$ es un homomorfismo de grupos abelianos, es decir, $\text{Div}(fg) = \text{Div}(f) + \text{Div}(g)$ y $\text{Div}(1/f) = -\text{Div} f$. El núcleo de Div es el subgrupo de $\mathcal{K}^*(G)$ de las funciones holomorfas sin ceros.

Demostración. Que Div es un homomorfismo es una consecuencia de la Proposición 3.3.6 y del Teorema 6.2.5. La segunda afirmación se sigue directamente de la definición. \square

Con estas nociones interpolación de ceros y polos con sus órdenes significa encontrar una función meromorfa f en una región G tal que $\text{Div}(f)$ es un divisor prescrito en G .

8.3.9 Teorema (de productos infinitos de Weierstraß). Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y \mathcal{D} un divisor positivo en G . Entonces existe una función holomorfa f en G tal que $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$.

Demostración. Basta considerar el caso donde $|\mathcal{D}|$ es infinito, porque el caso finito está resuelto por polinomios. Sea $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ una enumeración de $|\mathcal{D}|$ y sean $n_k := \mathcal{D}(z_k)$ los órdenes de los ceros. Sea (K_j) la sucesión de compactos G -convexos en G definida en la demostración de la Proposición 8.1.5(d).

Fijemos k y el único índice j tal que $z_k \in K_{j+1} \setminus K_j$. Por la definición de los conjuntos K_j necesitamos considerar dos casos:

- (I) Si $\text{dist}(z_k, \partial G) < 1/j$, entonces escogemos $w_k \in \partial G$ tal que $\text{dist}(z_k, \partial G) = |z_k - w_k|$ y ponemos $A_k := [z_k, w_k]$. Es obvio que $A_k \cap K_j = \emptyset$.
- (II) Si $z_k \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_j$, entonces escogemos $w_k = \infty$ y $A_k = \{tz_k \mid t \geq 1\}$. También en este caso $A_k \cap K_j = \emptyset$.

En ambos casos escogemos $v_k \in A_k \setminus \{z_k, w_k\}$ y definimos $T_k \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ por $(T_k z_k, T_k v_k, T_k w_k) = (0, -1, \infty)$. Esto implica que $T_k(A_k) = (-\infty, 0]$. Por lo tanto, T_k es una función holomorfa en G , y su único cero es z_k . La composición $f_k := \text{Log} \circ T_k$ está

bien definida y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus A_k$, lo cual es una vecindad de K_j . El Teorema 8.1.6 nos proporciona una función holomorfa g_k en G tal que

$$\max_{z \in K_j} |f_k(z) - g_k(z)| \leq \frac{1}{2^k n_k}.$$

Para cada j sea k_j el último índice que cumple que $z_{k_j-1} \in K_j$, así que $K_j \cap A_k = \emptyset$ para $k \geq k_j$. Tenemos que la serie

$$\sum_{k=k_j}^{\infty} n_k (f_k - g_k)$$

de funciones holomorfas en una vecindad de K_j converge absoluta y uniformemente en K_j . La Proposición 8.3.5 muestra que el producto

$$(8.3.5) \quad f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} T_k^{n_k} e^{-n_k g_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(n_k (f_k - g_k))$$

de funciones holomorfas en G converge absoluta y uniformemente en K_j . Esto implica que el producto en (8.3.5) converge absoluta y localmente uniformemente en G a una función holomorfa f , porque $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int } K_j$. Como z_k es el único cero de T_k en \mathbb{C} y como su orden es 1, $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$. \square

8.3.10 Corolario. *Sea G una región en \mathbb{C} . Para cada divisor $\mathcal{D} \in \Delta(G)$ existe una función meromorfa f en G tal que $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$, y esta es el cociente de dos funciones holomorfas en $\mathcal{K}^*(G)$. En otras palabras, el mapeo $\text{Div}: \mathcal{K}^*(G) \rightarrow \Delta(G)$ es un epimorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} \in \Delta(G)$ y sean $\mathcal{D}^{\pm}: G \rightarrow \mathbb{Z}$ divisores positivos definidos por $\mathcal{D}^{\pm}(z) := \max\{\pm \mathcal{D}(z), 0\}$. Se sigue que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ - \mathcal{D}^-$. El Teorema 8.3.9 nos proporciona $f^{\pm} \in \mathcal{K}^*(G)$ tal que $\text{Div}(f^{\pm}) = \mathcal{D}^{\pm}$. Para $f := (f^+ / f^-) \in \mathcal{K}^*(G)$ obtenemos $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$, ya que Div es un homomorfismo. \square

Vimos en el Teorema 6.3.3 que cada función meromorfa es localmente un cociente de dos funciones holomorfas.

8.3.11 Corolario. *Sea G una región en \mathbb{C} . Cada función meromorfa en G es el cociente de dos funciones holomorfas en G . En otras palabras, el campo cociente del anillo de las funciones holomorfas en G es $\mathcal{K}(G)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{K}^*(G)$. Por el Corolario 8.3.10 existe $g \in \mathcal{K}(G)$ que es el cociente de dos funciones holomorfas en $\mathcal{K}^*(G)$ y que cumple $\text{Div}(g) = \text{Div}(f)$. La función $h := f/g \in \mathcal{K}^*(G)$ cumple $\text{Div}(h) = 0$ ya que Div es un homomorfismo. En seguida, h es holomorfa, sin ceros, y se cumple $f = gh$. \square

8.3.12 Nota. Analizaremos la relación entre interpolación de ceros y de partes principales. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región, \mathcal{D} un divisor positivo en G . Enumeramos $|\mathcal{D}| = \{z_1, z_2, \dots\}$ y ponemos $n_j := \mathcal{D}(z_j)$. Si f es una solución de \mathcal{D} entonces obtenemos para cada k y $g_j := f/(z - z_j)^{n_j}$ que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j(z - z_j)^{n_j-1}g_j(z) + (z - z_j)^{n_j}g_j'(z)}{(z - z_j)^{n_j}g_j(z)} = \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)}.$$

Como g_j es holomorfa en una vecindad de z_j y $g_j(z_j) \neq 0$, $n_j/(z - z_j)$ es la parte principal de la serie de Laurent de f'/f en z_j , es decir, f'/f es una solución de la distribución de partes principales

$$H := \left\{ \frac{n_1}{z - z_1}, \frac{n_2}{z - z_2}, \frac{n_3}{z - z_3}, \dots \right\}.$$

Sea ahora G simplemente conexo. Supongamos que existe una sucesión $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ de subconjuntos compactos y G -convexos de G tal que $\text{int } K_1 \neq \emptyset$, $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int } K_j$ y tal que $\text{int } K_j$ es simplemente conexo para cada $j \in \mathbb{N}$. Mostremos que bajo estas condiciones podemos construir una solución del divisor \mathcal{D} usando el teorema de Mittag-Leffler.

Sea h una solución de H , dada por el teorema de Mittag-Leffler en la forma

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \left(\frac{1}{z - z_j} + g_j(z) \right),$$

donde las funciones holomorfas g_j en G aseguran convergencia localmente uniforme de la serie. De hecho, las g_j se pueden tomar como polinomios. Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in \text{int } K_1$. Como G es simplemente conexo, g_j tiene una antiderivada G_j en G tal que $G_j(0) = 0$. Formamos

$$u_j(z) := \left(1 - \frac{z}{z_j} \right)^{n_j} e^{n_j G_j(z)},$$

así que

$$\frac{u_j'(z)}{u_j(z)} = n_j \left(\frac{1}{z - z_j} + g_j(z) \right).$$

Mostremos que

$$f := \prod_{j=1}^{\infty} u_j$$

converge localmente uniformemente, así que f es una solución de \mathcal{D} . Para ello fijamos j y k_0 tal que $z_k \in G \setminus K_j$ para todo $k \geq k_0$. Para tal k la función u_k'/u_k es holomorfa en $\text{int } K_j$. Como $\text{int } K_j$ es simplemente conexo, existe una antiderivada v_k de u_k'/u_k en $\text{int } K_j$ tal que $v_k(0) = 0$. Se sigue que

$$\left(\frac{e^{v_k}}{u_k} \right)' \equiv 0$$

en $\text{int } K_j$. Como $\text{int } K_j$ es conexo, e^{v_k}/u_k es constante allá. Y como $e^{v_k(0)} = 1 = u_k(0)$, $e^{v_k} \equiv u_k$ en $\text{int } K_j$. Como la serie $\sum \frac{u'_k}{u_k}$ converge uniformemente en $\text{int } K_j$, también la serie $\sum v_k$ converge uniformemente allá. Esto se ve expresando $v_k(z)$ como una integral de la función u'_k/u_k sobre un camino de 0 a z en $\text{int } K_j$. La Proposición 8.3.5(a) implica que $\prod u_k = \prod e^{v_k}$ converge uniformemente en K_j .

Motivados por la Nota 8.3.12 daremos para el caso $G = \mathbb{C}$ una versión del teorema de Weierstraß que permite construir explícitamente los factores que generan convergencia del producto. Recordemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j,$$

con antiderivada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}.$$

8.3.13 Definición. Los *factores elementales de Weierstraß* E_k se definen como

$$E_0(z) := 1 - z$$

y

$$E_k(z) := (1 - z) \exp\left(\sum_{j=1}^k \frac{z^j}{j}\right).$$

El factor E_k es una función entera y tiene precisamente un cero, el cual está en 1 y tiene el orden 1.

Para la convergencia necesitaremos

8.3.14 Lema. Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $|z|^{k+1} \leq \frac{1}{n}$, entonces

$$(8.3.6) \quad |(E_k(z))^n - 1| \leq 2n|z|^{k+1}.$$

Demostración. Fijamos $k \geq 1$ y mostremos primero

$$(8.3.7) \quad |E_k(z) - 1| \leq |z|^{k+1} \quad \text{si } |z| \leq 1.$$

Como $E_k(0) = 1$ y como E_k es una función entera, existen coeficientes $a_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$(8.3.8) \quad E_k(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por un lado calculamos

$$\begin{aligned}
 E'_k(z) &= \left(-1 + (1-z) \sum_{j=1}^k z^{j-1} \right) \exp\left(\sum_{j=1}^k \frac{z^j}{j} \right) \\
 &= -z^k \exp\left(\sum_{j=1}^k \frac{z^j}{j} \right) \\
 &= -z^k - \sum_{j=k+1}^{\infty} b_{j-k} z^j
 \end{aligned}$$

con $b_j \geq 0$. Por otro lado, la representación (8.3.8) implica

$$E'_k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j z^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

Comparación de los coeficientes en estas dos representaciones de E'_k implica

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0, \quad a_j \leq 0 \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Usando $0 = E_k(1) = 1 + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$ obtenemos

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| = 1.$$

Con esta información estimamos para $|z| \leq 1$

$$|E_k(z) - 1| = \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j z^j \right| = |z|^{k+1} \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j z^{j-k-1} \right| \leq |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j| = |z|^{k+1}.$$

Esto muestra (8.3.7).

Si $n \geq 1$, calculamos para $|z| \leq 1$ y $|z|^{k+1} \leq \frac{1}{n}$, usando (8.3.7)

$$\begin{aligned}
 |E_k(z)^n - 1| &= |(E_k(z) - 1 + 1)^n - 1| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (E_k(z) - 1)^j \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} |z|^{j(k+1)} \\
 &= |z|^{k+1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} |z|^{(j-1)(k+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |z|^{k+1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^{j-1} \\
&= n|z|^{k+1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \\
&= n|z|^{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right) \\
&\leq (e-1)n|z|^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

8.3.15 Teorema. Sea $(z_j) \in \dot{\mathbb{C}}$ una sucesión tal que $|z_j| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$ y sea (n_j) una sucesión en \mathbb{N} . Sea $\mathcal{D} \in \Delta(\mathbb{C})$ el divisor positivo dado por $|\mathcal{D}| = \{z_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{D}(z_j) = n_j$. Si $(k_j) \subseteq \mathbb{N}_0$ es tal que

$$(8.3.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} n_j \left(\frac{R}{|z_j|} \right)^{k_j+1} < \infty \quad \text{para todo } R > 0$$

entonces

$$(8.3.10) \quad f(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \left(E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right) \right)^{n_j}$$

converge absoluta y localmente uniformemente en \mathbb{C} a una función entera f tal que $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$.

Demostración. Sea $R > 0$. Como la serie en (8.3.9) converge, existe j_0 tal que

$$n_j \left(\frac{R}{|z_j|} \right)^{k_j+1} \leq 1 \quad \text{para todo } j \geq j_0.$$

Por el Lema 8.3.14 esto implica que

$$|(E_{k_j}(z/z_j))^{n_j} - 1| \leq 2n_j \left(\frac{R}{|z_j|} \right)^{k_j+1} \quad \text{para todo } z \in \overline{D}_R, j \geq j_0.$$

Por (8.3.9) la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(E_{k_j}(z/z_j))^{n_j} - 1|$$

converge uniformemente en \overline{D}_R , y la Proposición 8.3.5(b) implica que el producto en (8.3.10) converge absoluta y uniformemente en \overline{D}_R . Como $R > 0$ era arbitrario, esa convergencia es absoluta y localmente uniforme en \mathbb{C} . La función límite f es entera por el Teorema 3.4.4, y cumple $\text{Div}(f) = \mathcal{D}$ porque el factor $E_{k_j}(z/z_j)$ tiene precisamente un cero del orden 1 en z_j . □

8.3.16 Corolario (Factorización de Weierstraß). Sean f un función entera, $\mathcal{D} := \text{Div}(f)$, $|\mathcal{D} \setminus \{0\}| = \{z_1, z_2, \dots\}$ y $n_j := \mathcal{D}(z_j)$. Sea n_0 el orden del cero de f en 0. Entonces existen una sucesión $(k_j) \in \mathbb{N}_0$ y una función entera g tales que

$$f(z) = z^{n_0} e^{g(z)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right) \right)^{n_j}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Es fácil construir una sucesión $(k_j) \subseteq \mathbb{N}$ tal que la hipótesis (8.3.9) se cumple. Por el Teorema 8.3.15 la función

$$h(z) := z^{n_0} \prod_{j=1}^{\infty} \left(E_{k_j} \left(\frac{z}{z_j} \right) \right)^{n_j}$$

es entera y tal que $\text{Div}(h) = \text{Div}(f)$. En seguida, $\text{Div}(f/h) \equiv 0$, es decir, f/h es una función entera sin ceros. Por el Teorema 5.1.6 existe una función entera g tal que $f/h = e^g$. \square

Juntando los teoremas de Mittag-Leffler y de Weierstraß podemos interpolar secciones finitas de series de Laurent:

8.3.17 Teorema. Sea $A := \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto discreto en la región $G \subseteq \mathbb{C}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sean $m_j, n_j \in \mathbb{N}_0$ y

$$L_j(z) := \sum_{k=-m_j}^{n_j} a_k^j (z - z_j)^k$$

una serie de Laurent finita. Entonces existe una función meromorfa f en G tal que f sólo tiene polos en A y tal que la serie de Laurent en una vecindad pinchada de z_j es

$$(8.3.11) \quad L_j(z) + \sum_{k=n_j+1}^{\infty} a_k^j (z - z_j)^k,$$

con coeficientes adicionales a_k^j , $k \geq n_j + 1$.

Demostración. El Teorema 8.3.9 nos proporciona una función holomorfa g en G tal que para $\mathcal{D} := \text{Div}(g)$ tenemos $|\mathcal{D}| = A$ y $\mathcal{D}(z_j) = n_j + 1$. Para cada j sea h_j la parte principal de la serie de Laurent de la función L_j/g en una vecindad pinchada de z_j . Sea h una solución de la distribución de partes principales $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ según el Teorema 8.2.4. Ponemos $f := gh$. Entonces f tiene todos sus polos en A , ya que g es holomorfa y h únicamente tiene polos en A . Para un j ponemos $\hat{h}_j := h - L_j/g$ y observamos que

$$f = g \left(\frac{L_j}{g} + \hat{h}_j \right) = L_j + g\hat{h}_j.$$

Como \hat{h}_j es holomorfa en z_j y g tiene un cero del orden $n_j + 1$ en z_j , f tiene la serie de Laurent (8.3.11) en una vecindad pinchada de z_j . \square

9 Aplicaciones de aproximación e interpolación

9.1. Desarrollos clásicos

Aquí presentaremos algunos desarrollos de funciones elementales. Obtendremos como consecuencia representaciones clásicas del número π . Empecemos con fracciones parciales para funciones meromorfas.

Recordemos el Ejemplo 8.2.8(b).

9.1.1 Lema. *La función meromorfa definida por*

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right)$$

es periódica con período 1.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j=-n}^{-1} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j} \right).$$

Entonces f_n converge a f absoluta y localmente uniformemente en \mathbb{C} . Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fijo calculamos

$$\begin{aligned} f_n(z+1) - f_n(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z} + \sum_{j=-n}^{-1} \left(\frac{1}{z-(j-1)} - \frac{1}{z-j} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{z-(j-1)} - \frac{1}{z-j} \right) \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-n} \\ &= \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n}, \end{aligned}$$

así que

$$f(z+1) - f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(z+1) - f_n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n} \right) = 0. \quad \square$$

9.1.2 Teorema. *Las siguientes representaciones por fracciones parciales son ciertas, con series que convergen absoluta y localmente uniformemente en \mathbb{C} :*

$$(9.1.1) \quad \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - j)^2};$$

$$(9.1.2) \quad \left(\frac{\pi}{\operatorname{cos} \pi z} \right)^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - j - \frac{1}{2})^2};$$

$$(9.1.3) \quad \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right);$$

$$(9.1.4) \quad \pi \tan \pi z = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - j - \frac{1}{2}} + \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right);$$

Demostración. Denotamos

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - j} + \frac{1}{j} \right).$$

Por el Ejemplo 8.2.8(b) esta serie converge absoluta y localmente uniformemente en \mathbb{C} a una función meromorfa f con polos del primer orden en los puntos de \mathbb{Z} , todos con el residuo 1. Por el Lema 9.1.1 f es 1-periódica. La función $\pi \cot \pi z$ es meromorfa y tiene polos del primer orden en los puntos de \mathbb{Z} , todos con el residuo 1. Para $j \in \mathbb{Z}$ esto es una consecuencia de

$$\lim_{z \rightarrow j} (z - j) \pi \cot \pi z = \lim_{z \rightarrow j} \pi (z - j) \frac{\operatorname{cos} \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \rightarrow j} \pi (z - j) \frac{\operatorname{cos}(\pi(z - j))}{\operatorname{sen}(\pi(z - j))} = 1.$$

Entonces existe una función entera f_0 tal que

$$(9.1.5) \quad \pi \cot \pi z = f_0 + f.$$

Si $|z| \leq R$ y $|j| \geq 2R$, entonces

$$\frac{1}{|z - j|^2} \leq \frac{1}{(|j| - |z|)^2} \leq \frac{4}{j^2}.$$

Esta cota muestra que

$$(9.1.6) \quad f_1(z) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - j)^2}$$

converge localmente uniformemente en \mathbb{C} a una función meromorfa. Como ella es la derivada de f también f_1 es 1-periódica. Derivamos (9.1.5) en ambos lados y obtenemos

$$(9.1.7) \quad \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2 = f_0' + f_1.$$

Sea $S := \{x + iy \mid x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$. Si $x \in [0, 1]$ y $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, entonces $|x - j| \geq \min\{|j|, |j - 1|\}$, así que

$$\left| \frac{1}{z - j} \right|^2 \leq \max \left\{ \frac{1}{j^2}, \frac{1}{(j - 1)^2} \right\} \quad \text{para todo } z \in S, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}.$$

En consecuencia, la convergencia en (9.1.6) es uniforme en S . Dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f(z) - \sum_{j=-j_0}^{j_0} \frac{1}{(z - j)^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } z \in S.$$

Existe $R > 0$ tal que

$$\left| \sum_{j=-j_0}^{j_0} \frac{1}{(z - j)^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } z \in S, |\operatorname{Im} z| \geq R.$$

En seguida, $|f(z)| \rightarrow 0$ cuando $|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty$, $z \in S$. Las propiedades del seno implican que también $1/|\operatorname{sen} \pi z| \rightarrow 0$ cuando $|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty$, $z \in S$. Como $\operatorname{sen} \pi z$ y f_1 son 1-periódicas, estos hechos y (9.1.7) muestran que la función entera f'_0 es 1-periódica y tiende a cero uniformemente cuando $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ y $z \in S$. Por consiguiente, f'_0 es acotada y tiende a cero uniformemente cuando $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. Por el teorema de Liouville $f'_0 \equiv 0$, así que (9.1.7) implica (9.1.1).

La función f_0 es constante. La cotangente y la función f son funciones impares, así que (9.1.5) implica que $f_0 \equiv 0$ y luego (9.1.3) es cierto.

La representación (9.1.2) es una consecuencia de $\cos \pi z = \operatorname{sen}(\pi(z + \frac{1}{2}))$. Similarmente como arriba, usando (9.1.2), obtenemos (9.1.4). □

Mostraremos ahora desarrollos en productos infinitos. La función del seno tiene un cero del primer orden en 0. Por su periodicidad y como $\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$, todos sus ceros $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ son del primer orden.

9.1.3 Teorema. *Las siguientes representaciones son ciertas:*

$$(9.1.8) \quad \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2} \right);$$

$$(9.1.9) \quad \cos \pi z = \prod_{j \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{j + \frac{1}{2}} \right) \exp \left(\frac{z}{j + \frac{1}{2}} \right).$$

Demostración. Para interpolar los ceros del seno usando el Teorema 8.3.15 necesitamos encontrar números k_j tales que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{R}{j} \right)^{k_j+1} < \infty$$

se cumple. Basta tomar $k_j := 1$ para toda j . Por el Corolario 8.3.16 existe una función entera g tal que

$$(9.1.10) \quad \operatorname{sen} \pi z = e^{g(z)} z \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j}\right) e^{\frac{z}{j}}.$$

Para jalar g formamos la derivada logarítmica f'/f en ambos lados:

$$\pi \cot \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j}\right).$$

El desarrollo de la cotangente (9.1.3) implica que $g' \equiv 0$, es decir, g es constante. El producto en (9.1.10) converge localmente uniformemente, así que vale intercambiar producto y límite en el siguiente cálculo:

$$\pi = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z} = e^g \lim_{z \rightarrow 0} \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j}\right) e^{\frac{z}{j}} = e^g.$$

Esto implica (9.1.8) si juntamos los índices j y $-j$ en el producto.

La demostración de (9.1.9) es análoga. □

9.1.4 Corolario (Representación de Wallis). *Se tiene*

$$(9.1.11) \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

Demostración. Usamos (9.1.8) con $z = 1/2$:

$$1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(1/2)^2}{j^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})}{j^2} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)(2j+1)}{(2j)^2}.$$

□

9.2. Funciones Elípticas

Las funciones trigonométricas y hiperbólicas son periódicas y tienen nada más *un período* minimal (módulo multiplicación con -1). En la teoría de las funciones elípticas consideramos funciones con *dos* períodos. Estas tienen aplicaciones importantes y clásicas en el análisis de las integrales elípticas que aparecen en la geometría analítica.

Consideremos primero funciones meromorfas periódicas en general. Un número $\omega \in \mathbb{C}$ es un *período* de una función meromorfa f en \mathbb{C} si $f(z + \omega) = f(z)$ es cierto para todo $z \in \mathbb{C}$. Si ω_1 y ω_2 son períodos de f , entonces $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ son períodos para todos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Cada función tiene el período 0, y las funciones constantes tienen todos los elementos de \mathbb{C} como períodos. En consecuencia, los períodos de una función dada forman un subgrupo del grupo aditivo de \mathbb{C} .

9.2.1 Proposición. *Los períodos de una función meromorfa no constante en \mathbb{C} forman un subgrupo aditivo discreto de \mathbb{C} .*

Demostración. Si a es un punto de acumulación de períodos de la función meromorfa f , existen períodos $\omega_j \neq a$ tal que $\omega_j \rightarrow a$ cuando $j \rightarrow \infty$. Se sigue para todo punto de holomorfia $z \in \mathbb{C}$ de f que

$$f(z + a) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(z + \omega_j) = f(z),$$

es decir, también a es un período de f . Sea z_0 un punto de holomorfia de f . Entonces $z_0 + a$ es un punto de holomorfia de f y $f(z_0 + \omega_j) = f(z_0)$ para todo j . Como $(z_0 + \omega_j)_j$ converge a $z_0 + a$, f es constante en su dominio de holomorfia (el cual es conexo), por el Teorema de Identidad, Teorema 3.3.7. \square

Existe una clasificación de los subgrupos aditivos discretos de \mathbb{C} :

9.2.2 Teorema. *Sea Ω un subgrupo aditivo discreto de \mathbb{C} . Entonces precisamente uno de los siguientes casos es cierto:*

- (I) $\Omega = \{0\}$ (grupo de rango 0);
- (II) existe $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ tal que $\Omega = \{n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (grupo del rango 1);
- (III) existen dos elementos $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ que son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , y tales que $\Omega = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ (grupo de rango 2).

Una función meromorfa se llama *aperiódica* si el rango de su grupo de períodos es 0, *simplemente periódica* si el rango es 1 y *doblemente periódica* si el rango es 2.

9.2.3 Definición. Un subgrupo discreto de \mathbb{C} del rango dos se llama una *reja periódica*. Dos números $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ que generan una reja periódica Ω forman una *base de Ω* . La *región fundamental* de Ω respecto a la base $\{\omega_1, \omega_2\}$ es el conjunto

$$P_\Omega := \{ \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2 \mid \rho_1, \rho_2 \in [0, 1) \}.$$

Una *función elíptica* f para la reja periódica Ω es una función meromorfa en \mathbb{C} cuyo grupo de períodos contiene Ω .

9.2.4 Nota. Las funciones elípticas para una reja periódica Ω forman el campo $\mathcal{K}(\Omega)$, el cual contiene las funciones constantes.

9.2.5 Proposición. *Una función elíptica entera es constante.*

Demostración. Sea f una función entera y elíptica para la reja periódica Ω . Por la periodicidad se tiene que $f(\mathbb{C}) = f(P_\Omega)$. Y como f es continua y $\overline{P_\Omega}$ compacto, f es acotada en P_Ω , es decir, en \mathbb{C} . El teorema de Liouville implica que f es constante. \square

9.2.6 Teorema. Sea f una función elíptica para la reja periódica Ω , y sean $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ los polos de f en P_Ω . Entonces

$$(9.2.1) \quad \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} f = 0.$$

Demostración. Primero supongamos que ninguno de los polos z_j cae en la frontera de $P := P_\Omega$. El teorema de los residuos implica que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[0, \omega_1]} + \int_{[\omega_1, \omega_1 + \omega_2]} - \int_{[0, \omega_2]} - \int_{[\omega_2, \omega_1 + \omega_2]} \right) f \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que f toma los mismos valores en $[0, \omega_1]$ y $[\omega_2, \omega_1 + \omega_2]$, y en $[\omega_1, \omega_1 + \omega_2]$ y $[0, \omega_2]$.

Si algunos de los polos caen en ∂P entonces aplicamos el argumento anterior a $a + P$, donde a es tal que $a + \operatorname{int} P$ contiene todos los polos z_1, z_2, \dots, z_k . \square

9.2.7 Corolario. Una función elíptica f para una reja periódica Ω que tiene un solo polo del primer orden en P_Ω es constante.

9.2.8 Corolario. Una función elíptica no constante f para la reja periódica Ω asume todos los valores en $\hat{\mathbb{C}}$ el mismo número de veces, contados con multiplicidades.

Demostración. Para toda $c \in \mathbb{C}$ la función $f'/(f - c)$ es elíptica para Ω y la suma de sus residuos en P_Ω es cero según el Corolario 9.2.7. Por otro lado, el principio del argumento (Corolario 6.6.2) implica que esa suma es el resto del número de ceros de $f - c$ y del número de polos de f en P_Ω . \square

En los resultados de arriba mostramos muchas restricciones para las funciones elípticas no constantes. Falta mostrar que *existen* funciones elípticas no constantes. Según el Teorema 9.2.6 las posibilidades más sencillas para funciones elípticas no constantes son las funciones con un solo polo del orden 2 y con residuo 0 en la región fundamental, y las funciones con dos polos del primer orden con residuos que se suman a cero. Trataremos el primer caso:

9.2.9 Teorema. Sea Ω una reja periódica en \mathbb{C} . La función

$$(9.2.2) \quad \mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

es una función elíptica para Ω , la llamada Función \mathcal{P} de Weierstraß para Ω .

Demostración. Mostremos primero la convergencia absoluta y localmente uniforme de la serie en (9.2.2). Sea $R > 0$. Si $|z| \leq R$ y $|\omega| \geq 2R$, entonces

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z| |2\omega - z|}{|\omega|^2 |z - \omega|^2} \leq \frac{3R|\omega|}{|\omega|^2 \frac{|\omega|^2}{4}} \leq \frac{12R}{|\omega|^3}.$$

Entonces basta demostrar que

$$(9.2.3) \quad \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^3} < \infty.$$

Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base de Ω . Consideremos el mapeo \mathbb{R} -lineal $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\varphi(\omega_1) = 1$ y $\varphi(\omega_2) = i$. Se sigue que

$$|n_1 + in_2| = |\varphi(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)| \leq \|\varphi\| |n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \quad \text{para todo } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^3} \leq \|\varphi\|^3 \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n_1 + in_2|^3}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ sea $Q_n := [-n, n]^2$. En ∂Q_n existen $8n$ puntos del tipo $n_1 + in_2$, y todos tienen al menos el valor absoluto n . Tenemos que

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n_1 + in_2|^3} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{n_1 + in_2 \in \partial Q_n} \frac{1}{|n_1 + in_2|^3} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{8n}{n^3} < \infty,$$

así que también (9.2.3) es cierto.

Mostremos la periodicidad de \mathcal{P} . Su derivada es

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

y esta función obviamente es elíptica para Ω . Se sigue para $\omega_j \in \Omega$, $j = 1, 2$, que

$$\frac{d}{dz} (\mathcal{P}(z + \omega_j) - \mathcal{P}(z)) = \mathcal{P}'(z + \omega_j) - \mathcal{P}'(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

así que $\mathcal{P}(z + \omega_j) - \mathcal{P}(z) \equiv c_j$ para una constante c_j en \mathbb{C} . Como $\frac{\omega_j}{2} \notin \Omega$ obtenemos

$$\mathcal{P}\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \mathcal{P}\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = c_j.$$

Por otro lado \mathcal{P} es una función par, así que lo de arriba implica que $c_j = 0$, $j = 1, 2$. Por consiguiente, \mathcal{P} es una función elíptica para Ω . \square

La importancia de esta función elíptica no constante más sencilla es que ella y su derivada generan todo el campo de las funciones elípticas para una reja periódica:

9.2.10 Teorema. *Sea f una función elíptica para la reja periódica Ω , y sea \mathcal{P} la función de Weierstraß para Ω . Entonces existen funciones racionales R, S tales que*

$$(9.2.4) \quad f = R(\mathcal{P}) + \mathcal{P}'S(\mathcal{P}).$$

Demostración. Si f es constante, la afirmación es trivial. Supongamos entonces que f no es constante. Escribimos $P := P_\Omega$.

Primero sea f una función par. Por el Corolario 9.2.8 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que cada valor en $\hat{\mathbb{C}}$ está asumido m veces por f , contado con multiplicidades. Sea Z el conjunto de los ceros de f' en P_Ω , el cual es finito por el teorema de identidad (Teorema 3.3.7). Sea $c \in \mathbb{C} \setminus f(Z)$. Si $a \in f^{-1}(c) \cap P$ entonces a es un cero del orden 1 de $f - c$. Se tiene que $f(-a + \omega) = f(-a) = f(a) = c$ para todo $\omega \in \Omega$.

Mostremos que

$$(9.2.5) \quad \forall \omega \in \Omega: -a + \omega \neq a.$$

Si (9.2.5) no fuera cierto, entonces existiría $\omega \in \Omega$ tal que $a = -a + \omega$. Tendríamos para todo $z \in \mathbb{C}$

$$f(a + z) = f(-a + \omega + z) = f(-a + z) = f(a - z).$$

Derivando en ambos lados respecto a z obtendríamos $f'(a + z) = -f'(a - z)$ y particularmente $f'(a) = 0$, en contradicción con la selección de c . Entonces (9.2.5) es cierto.

Para cada $a \in f^{-1}(c) \cap P$ existe $\omega \in \Omega$ tal que $a' := -a + \omega \in P$, y por (9.2.5) se verifica $a' \neq a$. En consecuencia, el número de ceros de $f - c$ en P es par, digamos $m = 2k$ para un $k \in \mathbb{N}$, y podemos escribir

$$f^{-1}(c) \cap P = \{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_k, a'_k\}.$$

Este conjunto consiste de ceros simples de $f - c$. Sea $d \in \mathbb{C} \setminus (f(Z) \cup \{c\})$ otro valor de ese tipo, con

$$f^{-1}(d) \cap P = \{b_1, b'_1, b_2, b'_2, \dots, b_k, b'_k\}.$$

La función

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

es elíptica para Ω , tiene como ceros precisamente los elementos de $f^{-1}(c)$, y como polos precisamente los elementos de $f^{-1}(d)$. Adicionalmente, todos los ceros y polos tienen el orden 1.

Recordemos que la función \mathcal{P} para Ω tiene un solo polo en 0, del orden 2. En seguida, \mathcal{P} asume cada valor en $\hat{\mathbb{C}}$ dos veces (con multiplicidades). Además, como \mathcal{P} es par, tenemos $\mathcal{P}(a'_j) = \mathcal{P}(-a_j + \omega) = \mathcal{P}(-a_j) = \mathcal{P}(a_j)$ para $j = 1, 2, \dots, k$ (y una afirmación análoga es cierta para los b_j). Como los conjuntos $f^{-1}(c)$ y $f^{-1}(d)$ son ajenos, $\mathcal{P}(a) \neq \mathcal{P}(b)$ si $a \in f^{-1}(c) \cap P$ y $b \in f^{-1}(d) \cap P$. Estos hechos implican que también la función

$$G(z) := \frac{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_1)) \cdots (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_k))}{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_1)) \cdots (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_k))},$$

es elíptica para Ω , tiene como ceros precisamente los elementos de $f^{-1}(c)$ y como polos precisamente los elementos de $f^{-1}(d)$. Adicionalmente, todos los ceros y polos tienen el orden 1.

Por lo que hemos mostrado, $\text{Div}(F) = \text{Div}(G)$, así que F/G es una función entera sin ceros. Pero como F/G también es elíptica, la Proposición 9.2.5 implica que es constante, digamos $F/G \equiv e$. Si resolvemos $F = eG$ respecto a f , obtenemos una representación de f como una función racional de \mathcal{P} .

Si f es impar, entonces f/\mathcal{P}' es par, ya que \mathcal{P}' es impar. Luego f/\mathcal{P}' es una función racional de \mathcal{P} . Y en el caso general escribimos f como la suma de una función par y una función impar:

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)).$$

La representación (9.2.4) es una consecuencia de estos hechos. □

Una problema particular pero muy útil es representar la función elíptica y par $(\mathcal{P}')^2$ como una función racional de \mathcal{P} :

9.2.11 Teorema. *La función \mathcal{P} de Weierstraß para una reja periódica Ω cumple la ecuación diferencial*

$$(9.2.6) \quad (\mathcal{P}')^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3,$$

donde

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad y \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Demostración. Encontremos primero la serie de Laurent de \mathcal{P} y \mathcal{P}' en 0, el único polo de estas funciones. Para $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ y $|z| < |\omega|$ tenemos

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{jz^{j-1}}{\omega^{j+1}}.$$

Entonces

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{jz^{j-1}}{\omega^{j+1}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=2}^{\infty} j \left(\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{j+1}} \right) z^{j-1}$$

en una vecindad pinchada de 0. Como $-\Omega = \Omega$, se verifica

$$\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{j+1}} = 0$$

cuando j es par. Haciendo el cambio de índice $j \rightarrow 2j + 1$ obtenemos

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} z^{2j} = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots,$$

donde

$$c_{2j} = (2j + 1) \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2j+2}},$$

las llamadas *Series de Eisenstein*. Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \dots \\ \mathcal{P}'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2c_2z + 4c_4z^3 + \dots \\ \mathcal{P}'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \dots \end{aligned}$$

Consideremos la función elíptica

$$f := (\mathcal{P}')^2 - 4\mathcal{P}^3 + 20c_2\mathcal{P} + 28c_4.$$

El único posible polo de esta función está en 0. Pero la comparación de la definición con las series de Laurent de arriba muestra que f tiene una singularidad removible en 0 con el valor $f(0) = 0$. En consecuencia, f es holomorfa, y por la Proposición 9.2.5, $f \equiv 0$. Por la definición de los c_{2j} esto implica la afirmación del Teorema. \square

Apliquemos estos resultados a ciertas integrales del análisis real, las *integrales elípticas*. Consideramos el caso particular de una reja Ω con base (ω_1, ω_2) , donde $\omega_1 > 0$ y $\omega_2 = i\omega'_2$ con $\omega'_2 > 0$. sea \mathcal{P} la función de Weierstraß respectiva. Como $\bar{\omega} \in \Omega$ si $\omega \in \Omega$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y también $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ para las constantes definidas en el Teorema 9.2.11. Ponemos $\rho_1 := \omega_1/2$ y $e_1 := \mathcal{P}(\rho_1)$.

9.2.12 Teorema. $\mathcal{P}: (0, \rho_1] \rightarrow [e_1, \infty)$ es una biyección. Para $x \geq e_1$ la siguiente relación es válida:

$$(9.2.7) \quad (\mathcal{P}|_{(0, \rho_1]})^{-1}(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} dy.$$

Demostración. Para $x \in (0, \rho_1]$ se tiene $-x + \omega_1 > \rho_1$. La función \mathcal{P} asume todo valor dos veces en P_Ω . Como $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(-x + \omega_1)$, \mathcal{P} asume el valor $\mathcal{P}(x)$ sólo una vez en $(0, \rho_1]$. En seguida, $\mathcal{P}|_{(0, \rho_1]}$ es inyectiva. Por otro lado, \mathcal{P} es continua en $(0, \rho_1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{P}(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \rho_1^-} \mathcal{P}(x) = e_1$. Esto muestra que $\mathcal{P}((0, \rho_1]) = [e_1, \infty)$ y que \mathcal{P} es estrictamente decreciente en $(0, \rho_1]$. Por el Teorema 9.2.11 y como $\mathcal{P}' \leq 0$ en $(0, \rho_1]$ tenemos

$$\mathcal{P}'(x) = -\sqrt{4\mathcal{P}(x)^3 - g_2\mathcal{P}(x) - g_3}.$$

Para la inversa E de $\mathcal{P}|_{(0, \rho_1]}$ eso implica

$$E'(x) = \frac{1}{\mathcal{P}'(\mathcal{P}^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Junto con el hecho de que $\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = 0$ eso termina la demostración de (9.2.7). \square

Se puede mostrar en general que la función inversa de una integral elíptica

$$(9.2.8) \quad \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{p(y)}} dy,$$

donde p es un polinomio del orden 3 o 4 con ceros simples, tiene una extensión meromorfa a una función elíptica en \mathbb{C} . Esto es análogo al hecho de que la inversa de la integral en (9.2.8) es una función trigonométrica (es decir, simplemente periódica), si p es un polinomio del orden 2 con ceros simples.

Las integrales elípticas surgen en la geometría analítica, por ejemplo cuando uno quiere calcular la longitud de arcos de elipses. En general estas integrales no pueden ser resueltas de manera explícita por funciones elementales. Esta es la razón por investigar sus extensiones meromorfas a \mathbb{C} , las funciones elípticas.

10 Familias normales meromorfas y aplicaciones

10.1. El teorema de Marty

En la sección 6.3 mencionamos que la proyección estereográfica $\varphi: S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ induce una métrica natural en $\hat{\mathbb{C}}$, la llamada *métrica cordal*. En esto usamos la métrica en S^2 inducida por la métrica Euclidiana en \mathbb{R}^3 . Aquí consideraremos una métrica equivalente en S^2 , la *métrica Riemanniana* d_{S^2} . Ella está definida midiendo la longitud de caminos en S^2 en la métrica Euclidiana, y tomando como distancia entre dos puntos en S^2 el ínfimo de las longitudes de caminos que los conectan. Sus geodésicas son precisamente los arcos en círculos grandes en S^2 . Luego transportamos esa métrica a $\hat{\mathbb{C}}$ mediante la proyección estereográfica como antes. Usando $\vartheta := \varphi^{-1}$ resulta la siguiente

10.1.1 Definición. La *métrica esférica* en $\hat{\mathbb{C}}$ está dada por

$$(10.1.1) \quad d_s(z_0, z_1) := d_{S^2}(\vartheta(z_0), \vartheta(z_1)).$$

Recordemos que si $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ es una región, entonces $f: G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se llama un mapeo holomorfo si f es una función meromorfa en G . Extendemos esa noción también llamando al mapeo $f \equiv \infty$ un mapeo holomorfo. El mapeo $z \rightarrow 1/z$ es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ y un mapeo holomorfo, donde definimos $1/\infty := 0$ y $1/0 := \infty$.

10.1.2 Nota. Un cálculo directo muestra para $z \in \hat{\mathbb{C}}$ que

$$\vartheta\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vartheta(z),$$

es decir, el punto $\vartheta(1/z)$ es el punto $\vartheta(z)$ rotado por π alrededor del eje de la primera coordenada. Como la métrica Riemanniana es invariante bajo rotaciones, se sigue que

$$(10.1.2) \quad d_s\left(\frac{1}{z_0}, \frac{1}{z_1}\right) = d_s(z_0, z_1) \quad \text{para todo } z_0, z_1 \in \hat{\mathbb{C}}.$$

10.1.3 Definición. Sean $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ abierto y $f, f_n: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ mapeos para $n \in \mathbb{N}$. Entonces decimos que f_n converge a f normalmente si $f_n \rightarrow f$ localmente uniformemente en U respecto a la métrica d_s en $\hat{\mathbb{C}}$.

10.1.4 Nota. La sucesión f_n converge a f normalmente si y sólo si $1/f_n \rightarrow 1/f$, por la Nota 10.1.2.

10.1.5 Proposición. Sean $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región y (f_n) una sucesión de mapeos holomorfos en U que converge normalmente a un mapeo $f: G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Entonces f es un mapeo holomorfo. Si todos los mapeos f_n son funciones holomorfas, entonces o bien f es una función holomorfa o bien $f \equiv \infty$.

Demostración. El mapeo f es continuo como límite localmente uniforme de mapeos continuos. Si $z_0 \in G \setminus (\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty))$ entonces existe una vecindad $U \subseteq G$ de z_0 tal que $U \cap f^{-1}(\infty) = \emptyset$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en U . Para n suficientemente grande la restricción de f_n a U es una función holomorfa, así que el Teorema 3.4.4 implica que f es una función holomorfa en U . Si $z_0 \in (G \cap f^{-1}(\infty)) \setminus \{\infty\}$ entonces basta aplicar el argumento anterior a $1/f_n$ y $1/f$, usando la definición de un mapeo holomorfo y la Nota 10.1.4. Y si $z_0 = \infty$, basta componer todas las funciones con la inversión en el argumento y usar los argumentos anteriores.

Si todos f_n son funciones holomorfas, consideramos el caso $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$ y $f(z_0) = \infty$. Si f no fuera constante, entonces $1/f_n$ tendría el límite no constante $1/f$, el cual sería una función holomorfa con un cero en z_0 . Por el Teorema 7.5.1 esto implicaría que $1/f_n$ tiene ceros cerca de z_0 para n grande, en contradicción con la holomorfía de f_n . Por lo tanto, $f \equiv \infty$ en ese caso, y mostramos la segunda afirmación. \square

10.1.6 Definición. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en G . Si toda sucesión en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge normalmente en G entonces \mathcal{F} se llama una *familia normal de funciones meromorfas en G* .

Necesitamos una noción de longitud de caminos en \mathbb{C} que es consistente con la métrica esférica. Es natural tomar para la longitud de un camino γ en \mathbb{C} la longitud de $\vartheta \circ \gamma$. Un cálculo elemental nos proporciona la fórmula

$$(10.1.3) \quad \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} (\vartheta \circ \gamma) \right| dt = \int_0^1 \frac{2|\gamma'|}{1 + |\gamma|^2} dt.$$

10.1.7 Definición. Para un camino de integración $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definimos su *longitud esférica* por

$$(10.1.4) \quad L_s(\gamma) := \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2} dt.$$

Las propiedades básicas son las siguientes:

10.1.8 Proposición. Sean γ, γ_1 y γ_2 caminos de integración en \mathbb{C} . Entonces se cumplen:

- (a) $L_s(\gamma^{-1}) = L_s(\gamma)$;
- (b) $L_s(\gamma_1 \gamma_2) = L_s(\gamma_1) + L_s(\gamma_2)$;
- (c) $L_s\left(\frac{1}{\gamma}\right) = L_s(\gamma)$ si $0 \notin \text{tr } \gamma$.

Demostración. Los incisos (a) y (b) se demuestran en la misma manera como los incisos (b) y (c) de la Proposición 7.4.3. Para demostrar (c) sea $0 \notin \text{tr } \gamma$. Calculamos

$$L_s\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \int_a^b \frac{2\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right|}{1 + \left|\frac{1}{\gamma}\right|^2} = \int_a^b \frac{2|\gamma'|}{|\gamma|^2 \left(1 + \left|\frac{1}{\gamma}\right|^2\right)} = \int_a^b \frac{2|\gamma'|}{1 + |\gamma|^2} = L_s(\gamma). \quad \square$$

Ahora podemos considerar caminos de integración que pasan por ∞ .

10.1.9 Definición. Un mapeo $\gamma: [a, b] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un camino de integración si $\vartheta \circ \gamma$ es un mapeo continuamente diferenciable a trozos de $[a, b]$ en \mathbb{R}^3 .

Es fácil mostrar que si $\gamma: [a, b] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un camino de integración, entonces sólo uno de los conjuntos $\gamma^{-1}(0)$ y $\gamma^{-1}(\infty)$ puede ser infinito. En consecuencia existe una partición de $[a, b]$ en subintervalos tal que γ asume el valor ∞ en un número finito de ellos, y tal que allí γ no tiene ceros. Si $I = [c, d]$ es uno de estos intervalos, definimos

$$L_s(\gamma|_I) := L_s\left(\frac{1}{\gamma|_I}\right).$$

Sumando las longitudes esféricas sobre todos los subintervalos obtenemos $L_s(\gamma)$, lo cual es precisamente la longitud de $\vartheta \circ \gamma$.

10.1.10 Nota. (a) Las definiciones de d_s y L_s implican para $z_0, z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ que

$$(10.1.5) \quad d_s(z_0, z_1) = \inf\{L_s(\gamma) \mid \gamma \text{ es un camino de integración en } \hat{\mathbb{C}} \text{ de } z_0 \text{ a } z_1\}.$$

(b) La Proposición 10.1.8(c) implica nuevamente la invariancia de la métrica esférica, ecuación (10.1.2).

(c) Es conocido que para dos puntos en S^2 siempre existe una geodésica más corta que los conecta. Esto implica la existencia de geodésicas para la métrica esférica en $\hat{\mathbb{C}}$.

En ciertos subconjuntos la métrica Euclidiana y la métrica esférica son comparables:

10.1.11 Proposición. Sean $R, \varepsilon > 0$. Entonces existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$(10.1.6) \quad \frac{1}{C_1}|z_1 - z_2| \leq d_s(z_1, z_2) \leq C_1|z_1, z_2| \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in D_R$$

y

$$(10.1.7) \quad \frac{1}{C_2} \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| \leq d_s(z_1, z_2) \leq C_2 \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus D_\varepsilon.$$

Demostración. Por la definición de la métrica esférica es obvio que

$$d_s(z_1, z_2) \leq 2|z_1 - z_2| \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

así que la segunda desigualdad de (10.1.6) es cierta.

Mostremos la primera desigualdad en (10.1.6). Por contradicción supongamos que existen sucesiones $(z_{1,n})$ y $(z_{2,n})$ en D_R tales que

$$(10.1.8) \quad \frac{d_s(z_{1,n}, z_{2,n})}{|z_{1,n} - z_{2,n}|} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como las sucesiones son acotadas, necesariamente $d_s(z_{1,n}, z_{2,n}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por la equivalencia de la métrica cordal y la métrica Riemanniana en S^2 eso implica que $|\vartheta(z_{1,n}), \vartheta(z_{2,n})| \rightarrow 0$. Geométricamente es obvio que existe una vecindad U de PN en S^2 tal que las geodésicas entre $\vartheta(z_{1,n})$ y $\vartheta(z_{2,n})$ se encuentran en $S^2 \setminus U$ para n suficientemente grande. Esto implica que existe $R_1 > 0$ tal que si γ_n es una geodésica con dominio $[0, 1]$ entre $z_{1,n}$ y $z_{2,n}$ respecto a la métrica esférica en \mathbb{C} , entonces $\text{tr } \gamma_n \subseteq D_{R_1}$ para todo n suficientemente grande. En consecuencia,

$$L_s(\gamma_n) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'_n|}{1 + |\gamma_n|^2} \geq \frac{2}{1 + R_1^2} \int_0^1 |\gamma'_n| \geq \frac{2}{1 + R_1^2} |z_{1,n} - z_{2,n}|$$

y luego

$$d_s(z_{1,n}, z_{2,n}) \geq \frac{2}{1 + R_1^2} |z_{1,n} - z_{2,n}|$$

para n suficientemente grande, por la ecuación (10.1.5). Esto contradice a (10.1.8) y termina la demostración de (10.1.6).

La existencia de C_2 tal que se cumple (10.1.7) es una consecuencia de (10.1.9) y (10.1.6). \square

Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, γ un camino de integración en U con dominio $[a, b]$ y f una función holomorfa en U entonces $f \circ \gamma$ es un camino de integración en \mathbb{C} y

$$(10.1.9) \quad L_s(f \circ \gamma) = \int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))\gamma'(t)|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} dt.$$

Este hecho es la motivación para considerar la expresión $2|f'|/(1 + |f|^2)$. Si f no tiene ceros, entonces podemos considerar la función holomorfa $g := 1/f$ y calculamos

$$(10.1.10) \quad \frac{2|g'|}{1 + |g|^2} = \frac{2|f'|}{1 + |f|^2} \quad \text{donde } f \text{ no tiene polos ni ceros.}$$

10.1.12 Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y f una función meromorfa en U . Ponemos $g := 1/f$. La *derivada esférica* $f^\#$ de f en U se define como

$$f^\# := \begin{cases} \frac{2|f'|}{1 + |f|^2} & \text{en } U \setminus f^{-1}(\infty) \\ \frac{2|g'|}{1 + |g|^2} & \text{en } U \setminus f^{-1}(0). \end{cases}$$

Por la ecuación (10.1.10) esta definición es consistente.

10.1.13 Nota. Sea γ un camino de integración en un conjunto abierto U con dominio $[a, b]$, y sea f una función meromorfa en U . Entonces

$$(10.1.11) \quad L_s(f \circ \gamma) = \int_a^b f^\#(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Esto es una consecuencia de la definición de la longitud esférica de un camino de integración en $\hat{\mathbb{C}}$ y de la Definición 10.1.12.

10.1.14 Lema. Sean $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ una región y \mathcal{F} una familia de funciones de U en $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces \mathcal{F} es normal si y sólo si \mathcal{F} es localmente equicontinua.

Demostración. Que \mathcal{F} es normal es equivalente a que la restricción de \mathcal{F} a un subconjunto compacto K de G es relativamente compacta en $C^0(K, \hat{\mathbb{C}})$, el espacio métrico de las funciones continuas de K en $\hat{\mathbb{C}}$ (con la métrica $d_\infty(f, g) := \max_{z \in K} d(f(z), g(z))$). Y que \mathcal{F} es localmente equicontinua es equivalente a que la restricción de \mathcal{F} a un subconjunto compacto K de G es equicontinua. Como $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, la afirmación es una consecuencia del teorema de Arzelá-Ascoli, aplicando un proceso diagonal como en la demostración del Teorema 7.5.5. \square

10.1.15 Lema. Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región. Si f_n, f son funciones meromorfas en G y si $f_n \rightarrow f$ normalmente, entonces $f_n^\# \rightarrow f^\#$ localmente uniformemente.

Demostración. En $G \setminus f^{-1}(\infty)$ la sucesión de funciones holomorfas f_n converge a f normalmente. Como $f \not\equiv \infty$, el Teorema 3.4.4 implica que también f_n' converge normalmente a f' , lo cual implica que $f_n^\#$ converge a $f^\#$ localmente uniformemente. En $G \setminus f^{-1}(0)$ la sucesión $g_n := 1/f_n$ converge a $g := 1/f$ normalmente. Aplica el mismo argumento de arriba, y la definición de la derivada $f^\#$ implica la afirmación. \square

10.1.16 Teorema (Marty). Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en G . Entonces \mathcal{F} es normal si y sólo si las derivadas esféricas de las funciones en \mathcal{F} son localmente uniformemente acotadas en G .

Demostración. Supongamos primero que las derivadas esféricas de las funciones en \mathcal{F} son localmente uniformemente acotadas en G . Sea $K \subseteq G$ compacto. Existe $C \geq 0$ tal que $\sup_{z \in K} f^\#(z) \leq C$ para toda función $f \in \mathcal{F}$. Para $z_0, z_1 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$ esto implica, usando (10.1.11) para la longitud esférica del camino $f \circ [z_0, z_1]$:

$$d_s(f(z_0), f(z_1)) \leq \int_0^1 f^\#((1-t)z_0 + tz_1) |z_1 - z_0| dt \leq C |z_1 - z_0|.$$

Como la constante C es independiente de f , la familia $\mathcal{F}|_K$ es equicontinua en K . En consecuencia, \mathcal{F} es localmente equicontinua y el Lema 10.1.14 implica que \mathcal{F} es normal.

Inversamente, sea \mathcal{F} normal. Si la afirmación no fuera cierta, existiría $K \subseteq U$ compacto y una sucesión $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ tales que

$$(10.1.12) \quad \sup_{z \in K} f_n^\#(z) \rightarrow \infty.$$

Como \mathcal{F} es normal, podríamos suponer, después de pasar a una subsucesión, que (f_n) converge normalmente en U . Por el Lema 10.1.15 la sucesión (f_n^\sharp) sería uniformemente convergente en K , en contradicción con (10.1.12). Esto muestra que las derivadas esféricas de las funciones en \mathcal{F} son localmente uniformemente acotadas en G . \square

10.2. Los teoremas de Montel y Picard

Empecemos con un resultado técnico, el cual es la base para el teorema de Montel:

10.2.1 Teorema (El lema de Zalcman). *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en G . Si \mathcal{F} no es normal, entonces existe una sucesión $(z_n) \subseteq G$ que converge a un punto en G , una sucesión de números positivos ρ_n que converge a 0 y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tales que la funciones escaleadas $g_n(z) := f_n(z_n + \rho_n z)$ convergen normalmente a una función meromorfa no constante g en \mathbb{C} con las propiedades $g^\sharp(0) = 1$ y $g^\sharp \leq 1$ en \mathbb{C} .*

Demostración. Supongamos que \mathcal{F} no es normal. Por el Teorema 10.1.16 existen un subconjunto compacto $K \subseteq G$, funciones $f_n \in \mathcal{F}$ y puntos $w_n \in K$ tales que $f_n^\sharp(w_n) \rightarrow \infty$. Pasando a una subsucesión y haciendo una traslación podemos suponer que $w_n \rightarrow 0 \in G$. Existe $r > 0$ tal que $\overline{D}_r \subseteq G$. Definimos

$$R_n := \max_{z \in \overline{D}_r} f_n^\sharp(z)(r - |z|).$$

Como $w_n \rightarrow 0$ y $f_n^\sharp(w_n) \rightarrow \infty$ se tiene que $R_n \rightarrow \infty$. Para cada n sea $z_n \in \overline{D}_r$ un punto en el que

$$R_n = f_n^\sharp(z_n)(r - |z_n|).$$

Estos puntos existen por la continuidad de f_n^\sharp . Se sigue que

$$f_n^\sharp(z_n) \geq \frac{R_n}{r - |z_n|} \geq \frac{R_n}{r} \rightarrow \infty.$$

Definimos

$$\rho_n := \frac{1}{f_n^\sharp(z_n)},$$

así que $\rho_n > 0$ y $\rho_n \rightarrow 0$. Observemos que

$$\rho_n R_n = \rho_n f_n^\sharp(z_n)(r - |z_n|) = r - |z_n|.$$

En seguida,

$$\overline{D}_{\rho_n R_n}(z_n) \subseteq \overline{D}_r \subseteq G$$

para cada n . Esto nos permite definir

$$g_n(z) := f_n(z_n + \rho_n z), \quad \text{para } z \in D_{R_n}.$$

Como $R_n \rightarrow \infty$, en todo conjunto compacto en \mathbb{C} la función g_n está bien definida si n es suficientemente grande. Se tiene

$$g_n^\sharp(z) = \rho_n f_n^\sharp(z_n + \rho_n z) \quad \text{si } z \in D_{R_n}.$$

Fijamos $R > 0$ y supongamos que n es tan grande que $R_n \geq 2R$. Entonces g_n está definida en D_R y

$$f_n^\sharp(z_n + \rho_n z)(r - |z_n + \rho_n z|) \leq R_n.$$

Esto implica para $z \in D_R$ que

$$(10.2.1) \quad g_n^\sharp(z) \leq \frac{\rho_n R_n}{r - |z_n + \rho_n z|} \leq \frac{\rho_n R_n}{r - |z_n| - \rho_n R} = \frac{\rho_n R_n}{\rho_n R_n - \rho_n R} = \frac{1}{1 - \frac{R}{R_n}} \leq 2.$$

Por el Lema 10.1.15 la colección de las funciones g_n forma una familia normal en D_R y contiene una subsucesión que converge normalmente a una función meromorfa g en D_R . Como $1/(1 - R/R_n) \rightarrow 1$, el Lema 10.1.15 y (10.2.1) implican que $g^\sharp \leq 1$ en D_R . Adicionalmente, como $g_n^\sharp(0) = \rho_n f_n^\sharp(z_n) = 1$ para cada n obtenemos $g^\sharp(0) = 1$. Cubriendo \mathbb{C} con una colección numerable de discos D_R la afirmación es la consecuencia de un proceso diagonal. \square

10.2.2 Teorema (Montel). *Una familia de funciones meromorfas en una región $G \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ que omita tres valores en $\hat{\mathbb{C}}$ es normal.*

Demostración. Como normalidad es una propiedad local, podemos suponer que G es simplemente conexo. Formando composiciones de las funciones en \mathcal{F} con transformaciones de Möbius podemos suponer que $\infty \notin G$ y que los valores omitidos son $0, 1$ y ∞ . Entonces las funciones en \mathcal{F} son holomorfas, no tienen ceros, y luego existen ramas de todas las raíces por el Teorema 5.1.6. Para $k \in \mathbb{N}$ sea \mathcal{F}_k la colección de todas las ramas de la raíz del orden 2^k de todas las funciones en \mathcal{F} . La familia \mathcal{F}_k omite los valores $0, \infty$ y todas las raíces unitarias del orden 2^k .

Mostremos que una de las familias \mathcal{F}_k es normal. Por contradicción, supongamos que \mathcal{F}_k no es normal para ninguna $k \in \mathbb{N}$. Para cada k sea g_k la función entera dada por el Teorema 10.2.1, con las propiedades $g_k^\sharp \leq 1$ en \mathbb{C} y $g_k^\sharp(0) = 1$. g es el límite normal de restricciones de las funciones holomorfas en \mathcal{F}_k , apropiadamente escaleadas. Como estas funciones omiten todas las raíces unitarias del orden 2^k , el teorema de Hurwitz (Teorema 7.5.1) implica que también g_k omite todas las raíces del orden 2^k .

Como $g_k^\sharp \leq 1$ en \mathbb{C} para toda k , la familia $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es normal por el Teorema 10.1.16. Sea g el límite de una subsucesión normalmente convergente de (g_k) . Si existieran $w_0 \in \mathbb{C}$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tales que $(g(w_0))^{2^\ell} = 1$, entonces tendríamos puntos $w_k \in \mathbb{C}$ tales que $(g_k(w_k))^{2^\ell} = 1$ para k suficientemente grande. Esto implicaría para $k \geq \ell$ grande que

$$(g_k(w_k))^{2^k} = (g_k(w_k))^{2^\ell 2^{k-\ell}} = \left((g_k(w_k))^{2^\ell} \right)^{2^{k-\ell}} = 1$$

ya que los exponentes son enteros, en contradicción con que g_k omite todas las raíces unitarias del orden 2^k . Por consiguiente, g omite el conjunto A de todas las raíces unitarias de los órdenes 2^k , $k \in \mathbb{N}$. Además, como $g^\sharp(0) = 1$, la función entera g no es

constante. Por el teorema de la función abierta (Teorema 3.4.7) el conjunto $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C})$, el cual contiene el conjunto A , es cerrado. En seguida, $\partial\mathbb{D} \subseteq \overline{A} \subseteq \mathbb{C} \setminus g(\mathbb{C})$, es decir, g omite el círculo unitario. Como $g(\mathbb{C})$ es conexo, sólo hay dos opciones: o bien $|g| < 1$ o bien $|g| > 1$ en todo \mathbb{C} . En el primer aplicamos el teorema de Liouville a g y en el segundo caso a $1/g$ para obtener que g es constante, una contradicción. Esto muestra que una de las familias \mathcal{F}_k es normal.

Sea \mathcal{F}_k esa familia normal. Si $(f_j) \subseteq \mathcal{F}$ es una sucesión, existen funciones holomorfas h_j en G tales que $h_j^{2^k} = f_j$ para toda j . En seguida, $(h_j) \subseteq \mathcal{F}_k$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que (h_j) converge normalmente en G . Como la restricción de la 2^k -ésima potencia a un subconjunto acotado es una función uniformemente continua, se sigue fácilmente que (f_j) también converge normalmente. Esto muestra que \mathcal{F} es una familia normal. \square

10.2.3 Definición. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea f una función meromorfa en el disco pinchado $\dot{D}_r(z_0)$, para algún $r > 0$. Decimos que f omite el valor $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ en z_0 si existe $\delta \in (0, r]$ tal que $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \dot{D}_\delta(z_0)$. Si $z_0 = \infty$ y si f es una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r$ para algún $r > 0$ entonces decimos que f omite el valor $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ en ∞ si existe $R \geq r$ tal que $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$.

10.2.4 Ejemplo. La función $e^{1/z}$ omite los valores 0 y ∞ en 0. La función e^z omite los valores 0 y ∞ en ∞ .

10.2.5 Teorema (grande de Picard). *Sea f una función meromorfa en el disco pinchado $\dot{D}_r(z_0)$, para algunos $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Si f omite tres valores de $\hat{\mathbb{C}}$ en z_0 , entonces f tiene una extensión meromorfa a $D_r(z_0)$.*

Demostración. Supongamos que $z_0 = 0$ y que f omite los valores 0, 1 y ∞ en \dot{D}_r (después de tomar r más chica y de aplicar una transformación de Möbius). En seguida, f es una función holomorfa sin ceros en \dot{D}_r . Sea ε_n una sucesión decreciente de números positivos tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Definimos

$$g_n(z) := f(\varepsilon_n z) \quad \text{para } z \in \dot{D}_r.$$

Entonces (g_n) es una familia de funciones meromorfas en \dot{D}_r que omite los valores 0, 1 y ∞ . Por la Proposición 10.1.5 y el Teorema 10.2.2 podemos suponer que (g_n) converge normalmente en \dot{D}_r a una función holomorfa g o a la función $g \equiv \infty$. En el primer caso fijamos $\rho \in (0, r)$ y escogemos M tal que $|g| < M$ en S_ρ . En seguida existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ se tiene $|f(\varepsilon_n z)| = |g_n(z)| < M$ para $|z| = \rho$. Por el principio del máximo, $|f| < M$ en el anillo $K_0(\varepsilon_n \rho, \varepsilon_{n_0} \rho)$ si $n \geq n_0$. eso implica que f tiene una singularidad removible en 0. En el otro caso aplicamos el argumento anterior a la función $1/f$ y obtenemos que $1/f$ tiene una extensión holomorfa a 0 con el valor 0, es decir, f tiene un polo en 0. \square

10.2.6 Nota. Un caso particular del Teorema 10.2.5 dice que si z_0 es una singularidad esencial de la función holomorfa f en $\dot{D}_r(z_0)$, entonces f sólo omite un valor de \mathbb{C} en z_0 . Esto es una mejora del teorema de Casorati-Weierstraß (Teorema 6.2.6).

10.2.7 Corolario (Teorema chico de Picard). *Una función entera y no constante asume cada valor en \mathbb{C} , con una posible excepción.*

Demostración. Sea f una función entera que omita dos puntos en \mathbb{C} . La función $g(z) := f(1/z)$ tiene una singularidad aislada en 0 y omite dos valores en \mathbb{C} , y el valor ∞ . Por el Teorema 10.2.5 0 es una singularidad removible o un polo de g . Por ello ∞ es removible o un polo para f , es decir, f es un mapeo meromorfo en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $f^{-1}(\infty) \subseteq \{\infty\}$. El Teorema 6.3.10 implica que f es un polinomio que omita dos valores en \mathbb{C} , y el teorema fundamental del álgebra implica que f es constante. \square

10.3. Iteración de funciones racionales

Aquí consideramos mapeos holomorfos $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, es decir, funciones racionales, y sus iteraciones

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

y

$$f^{-n} := (f^n)^{-1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

En esto siempre supongamos que f no es constante, así que f es suprayectiva por ser una aplicación abierta. Para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$ la iteración de f induce una sucesión $(f^n(z))_n$ en $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, la iteración de f mueve los puntos de $\hat{\mathbb{C}}$ en pasos discretos. Por ello uno considera la iteración de f como un *sistema dinámico de tiempo discreto* en $\hat{\mathbb{C}}$. Resulta que este movimiento tiene características muy complejas, en las cuales se pueden observar fenómenos interesantes.

Primero observemos que basta considerar ciertos subconjuntos de la clase de las funciones racionales, con propiedades que facilitan los cálculos.

10.3.1 Definición. Sean f, g funciones racionales. Ellas se llaman *conjugadas* si existe $\varphi \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Si f y g son conjugadas por φ , entonces $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$, es decir, f^n y g^n son conjugadas para todo $n \in \mathbb{N}$. El comportamiento de los sistemas dinámicos generados por f y g es esencialmente idéntico, y basta analizar un sólo mapeo de cada clase de conjugación.

10.3.2 Ejemplo. Sea $f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio del orden n . Usamos una conjugación $\varphi(z) := cz$ con un $c \in \mathbb{C}$ y obtenemos

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = c^{1-n} a_n z^n + \dots$$

Tomando c tal que $c^{1-n} a_n = 1$ transformamos f por conjugación en un polinomio mónico, es decir, con coeficiente 1 en frente de la potencia más alta.

Una herramienta básica para analizar funciones racionales iteradas es la partición de \mathbb{C} en un conjunto regular y un conjunto irregular:

10.3.3 Definición. Sea f una función racional y sea \mathcal{G} la familia de sus iteradas. El conjunto F de Fatou de f consiste de todos los puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ que tienen una vecindad abierta en la cual \mathcal{G} forma una familia normal. El conjunto J de Julia de f es el complemento del conjunto de Fatou en $\hat{\mathbb{C}}$.

Es obvio de la definición que el conjunto de Fatou es abierto y el conjunto de Julia cerrado en $\hat{\mathbb{C}}$. Para mostrar las primeras propiedades de estos conjuntos necesitamos una nueva noción:

10.3.4 Definición. Sean X, Y espacios métricos y \mathcal{F} una familia de mapeos entre X y Y . \mathcal{F} es equicontinua en un punto $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ y $y \in B_\delta(x_0)$ se tiene que $d(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$.

10.3.5 Proposición. Sea f una función racional y \mathcal{G} la familia de sus iteradas. Entonces el conjunto de Fatou de f es el conjunto de los puntos donde \mathcal{G} es equicontinua.

Demostración. Sean F el conjunto de Fatou de f y U el conjunto de los puntos donde \mathcal{G} es equicontinua. Es obvio que $F \subseteq U$. Sea inversamente $z_0 \in U$. Sólo tratamos el caso $z_0 \neq \infty$ ya que el otro se sigue por inversión. Por la Proposición 10.1.11 existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_1}|z_1 - z_2| \leq d_s(z_1, z_2) \leq C_1|z_1 - z_2|$$

si $d_s(z_1, 0), d_s(z_2, 0) \leq \frac{3\pi}{4}$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(f^n(z_0), f^n(z)) \leq \frac{\pi}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \overline{D}_{2\delta}(z_0)$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $d_s(f^n(z_0), 0) \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$|f^n(z)| \leq C_1 d_s(f^n(z), 0) \leq \frac{3C_1\pi}{4}$$

para todo $z \in \overline{D}_{2\delta}(z_0)$. Por la fórmula de Cauchy eso implica que

$$(f^n)^\sharp(z) \leq |(f^n)'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{2\delta}(z_0)} \frac{f^n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{3C_1}{8\delta^2}$$

para todo $z \in D_\delta(z_0)$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $d_s(f^n(z_0), 0) \geq \frac{\pi}{2}$, entonces ponemos $g := 1/f^n$ y obtenemos $d_s(g(z_0), g(z)) \leq \frac{\pi}{4}$ para todo $z \in \overline{D}_{2\delta}(z_0)$ y $d_s(g(z_0), 0) = \pi - d_s(g(z_0), \infty) \leq \frac{\pi}{2}$. Como arriba eso implica que

$$(f^n)^\sharp(z) \leq \frac{3C_1}{8\delta^2}$$

para todo $z \in D_\delta(z_0)$. El Teorema 10.1.16 implica que \mathcal{G} es normal en $D_\delta(z_0)$, así que $z_0 \in F$. \square

10.3.6 Teorema. Sean f una función racional, F su conjunto de Fatou y J su conjunto de Julia. Entonces las siguientes identidades son ciertas:

$$f(F) = F, \quad f^{-1}(F) = F, \quad f(J) = J, \quad f^{-1}(J) = J.$$

En otras palabras, F y J son completamente invariantes bajo f .

Demostración. Sea \mathcal{G} la familia de las iteradas de f . Usaremos la caracterización de F dada en la Proposición 10.3.5. Mostremos primero la contención

$$(10.3.1) \quad f^{-1}(F) \subseteq F.$$

Sea $z_0 \in f^{-1}(F)$. Existe $w_0 \in F$ tal que $f(z_0) = w_0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $d_s(f^n(w_0), f^n(w)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $w \in B_{\delta_1}(w_0)$ (la bola respecto a la métrica esférica). Como f es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(z_0) \subseteq f^{-1}(B_{\delta_1}(w_0))$. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y todo $z \in B_{\delta_2}(z_0)$ se sigue para $w := f(z)$ que

$$d_s(f^n(z_0), f^n(z)) = d_s(f^{n-1}(w_0), f^{n-1}(w)) < \varepsilon.$$

En consecuencia, \mathcal{G} es equicontinua en z_0 y luego $z_0 \in F$. Eso muestra (10.3.1).

Ahora mostramos la contención

$$(10.3.2) \quad f(F) \subseteq F.$$

Para ello sea $w_0 \in f(F)$. Existe $z_0 \in F$ tal que $w_0 = f(z_0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que $d_s(f^n(z_0), f^n(z)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in B_{\delta_1}(z_0)$. Como f es abierta, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(w_0) \subseteq f(B_{\delta_1}(z_0))$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $w \in B_{\delta_2}(w_0)$ existe $z \in B_{\delta_1}(z_0)$ tal que $f(z) = w$. Se sigue que

$$d_s(f^n(w_0), f^n(w)) = d_s(f^{n+1}(z_0), f^{n+1}(z)) < \varepsilon.$$

En consecuencia, \mathcal{G} es equicontinua en w_0 y luego $w_0 \in F$. Eso muestra (10.3.2).

Recordamos que f es suprayectiva y que luego $f(f^{-1}(A)) = A$ para todo subconjunto $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Con (10.3.1) eso implica

$$F = f(f^{-1}(F)) \subseteq f(F),$$

así que (10.3.2) da $f(F) = F$. Por otro lado,

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) \supseteq F \supseteq f^{-1}(F),$$

nuevamente por (10.3.1). En seguida, $f^{-1}(F) = F$. Formar el complemento en esta última igualdad implica $J = f^{-1}(J)$, y aplicar f en ambos lados da $f(J) = J$. \square

Las iteraciones de transformaciones de Möbius pueden ser analizadas fácilmente de manera explícita. Por ello nos fijamos en una clase de funciones racionales que generan un sistema dinámico no trivial pero que todavía tienen una forma simple, los polinomios mónicos del orden mayor o igual a 2. Todos estos polinomios tienen un punto fijo en ∞ .

10.3.7 Definición. Sean f una función racional y $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ un punto fijo de f . El *conjunto de atracción* $A(z_0)$ de z está formado por los puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tales que $\lim_n \rightarrow \infty f^n(z) = z_0$.

10.3.8 Teorema. Sea f un polinomio del orden mayor o igual a 2. El conjunto de atracción $A(\infty)$ de ∞ es una vecindad abierta de ∞ . El conjunto de Julia J de f coincide con la frontera de $A(\infty)$ y es un subconjunto compacto y no vacío de \mathbb{C} . Toda componente acotada de $\mathbb{C} \setminus J$ es simplemente conexa.

Demostración. Ponemos $A := A(\infty)$. Por el Teorema 3.6.1 existe $R > 0$ tal que $|f(z)| \geq 2|z|$ para todo $z \in U_R := \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$. Esto implica para todo $z \in U_R$ y $n \in \mathbb{N}$ que $|f^n(z)| \geq 2^n|z| \geq 2^n R$. En seguida, (f^n) converge a ∞ uniformly en U_R y luego $U_R \subseteq F$, el conjunto de Fatou de f . Se tiene que $z \in A$ si y sólo si $f^n(z) \in U_R$ para n suficientemente grande, así que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_R).$$

Como los mapeos f^n son continuos y U_R es abierto, A es abierto. Por el Teorema 10.3.6 $f^{-n}(U_R) \subseteq F$ para cada n . En consecuencia, $A \subseteq F$.

Es obvio que $f(A) \subseteq A$ y $f^{-1}(A) \subseteq A$, como en la demostración del Teorema 10.3.6 eso implica que

$$f(A) = A, \quad f^{-1}(A) = A, \quad f(\mathbb{C} \setminus A) = \mathbb{C} \setminus A, \quad f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A) = \mathbb{C} \setminus A.$$

Como A es abierto tenemos $\partial A \subseteq \mathbb{C} \setminus A$ y luego $f(\partial A) \subseteq f(\mathbb{C} \setminus A) = \mathbb{C} \setminus A$. Por otro lado, si $z_0 \in \partial A$, entonces existe una sucesión $(z_k) \subseteq A$ tal que $z_k \rightarrow z_0$. En seguida, $(f(z_k)) \subseteq A$ y, por continuidad, $f(z_k) \rightarrow z_0$. Eso implica que $z_0 \in \overline{A}$, es decir, $f(\partial A) \subseteq \overline{A}$. Estos hechos muestran que $f(\partial A) \subseteq \partial A$ y luego que

$$f^n(\partial A) \subseteq \partial A \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\partial A \subseteq \overline{D}_R$, las iteradas de f son uniformemente acotadas en ∂A . El principio del máximo implica que las iteradas de f son uniformemente acotadas en las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \partial A$. En seguida a es la única componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \partial A$. Además, por el Teorema 7.5.5 f^n forma una familia normal en cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \partial A$, así que ellas pertenecen a F y $J \subseteq \partial A$. Si $z_0 \in \partial A$ y si V es una vecindad abierta de z_0 entonces f^n converge a ∞ en $V \cap A$ pero queda acotada en z_0 . Esto muestra que $z_0 \in J$, es decir,

$$J = \partial A.$$

Como f tiene grado ≥ 2 existe al menos un punto fijo $z_0 \in \mathbb{C}$ de f . Obviamente, $z_0 \notin A$, así que $A \neq \hat{\mathbb{C}}$ y $J \neq \emptyset$. Como A es conexo, también $\overline{A} = A \cup J$ es conexo. Eso implica que toda componente conexa acotada de $F = \mathbb{C} \setminus J$ es simplemente conexa, por el Teorema 4.3.5. \square

10.3.9 Ejemplo. (a) El conjunto de Julia de $f(z) := z^2$ es S_1 .

(b) El conjunto de Julia de $f(z) := z^2 - 2$ es $[-2, 2]$.

Estos son los únicos ejemplos de polinomios $z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, que tienen como conjunto de Julia la traza de una curva suave. Pero aún en el caso de $f(z) = z^2$ la dinámica de las iteradas en S_1 es complicada: existe un conjunto denso de puntos en S_1 que inician órbitas periódicas, y existe un conjunto denso en S_1 de puntos que inician órbitas densas en S_1 .

El próximo teorema permite ver que los conjuntos de Julia son autosimilares:

10.3.10 Teorema. Sean f un polinomio del orden al menos 2 y J el conjunto de Julia de f . Si $z_0 \in J$ y si U es una vecindad abierta de z_0 entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(10.3.3) \quad J \subseteq \bigcup_{k=0}^n f^k(U).$$

Además, el conjunto

$$(10.3.4) \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(z_1)$$

es denso en J para todo $z_1 \in J$.

Demostración. Podemos suponer que f es mónico, por el Ejemplo 10.3.2. Fijemos $z_0 \in J$ y una vecindad abierta U de z_0 . Por la definición del conjunto de Julia la familia \mathcal{G} de las iteradas de f no es normal en U . Como f^n no asume el valor ∞ en U para ningún $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 10.2.2 implica que \mathcal{G} omite a lo más un valor en \mathbb{C} .

Si \mathcal{G} omite ningún valor en \mathbb{C} , entonces

$$(10.3.5) \quad J \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C}.$$

Como f^k no es constante para ninguna k los conjuntos $f^k(U)$ son abiertos. La compacidad de J implica la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que (10.3.3) es cierto.

Por otro lado, si \mathcal{G} omite el valor $w_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(U) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}.$$

Si existiera $z \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ tal que $f(z) = w_0$, entonces habría $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \in f^k(U)$. Esto implicaría $w_0 = f(z) \in f^{k+1}(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$, una contradicción. Entonces w_0 es el único cero del polinomio $f - w_0$ y luego $f(z) - w_0$ es un múltiple constante de $(z - w_0)^d$, donde $d \geq 2$ es el grado de f . Como f es mónico, $f(z) = w_0 + (z - w_0)^d$. Para $k \in \mathbb{N}$ y $z \in D_{1/2}(w_0)$ obtenemos que

$$|f^k(z) - w_0| = |z - w_0|^{d^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{d^k} \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$, independientemente de z . Eso muestra que (f^k) converge uniformemente en $D_{1/2}(w_0)$, así que $w_0 \in F$. En seguida, $J \subseteq \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ y (10.3.5) también se cumple en este caso.

Para mostrar la segunda afirmación, sean $z_1 \in J$ y Ω un subconjunto relativamente abierto de J . Existe $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\Omega = J \cap U$. Por (10.3.3) existe k tal que $z_1 \in f^k(U)$. Por consiguiente, usando $f^{-1}(J) = J$ obtenemos

$$\Omega \cap f^{-k}(z_1) = U \cap J \cap f^{-k}(z_1) = U \cap f^{-k}(z_1) \neq \emptyset. \quad \square$$

10.3.11 Nota. El Teorema 10.3.10 implica que J es autosimilar en el siguiente sentido: sea $z_0 \in J$ tal que f^k no tiene derivada cero en z_0 para ninguna k . Sea U una vecindad abierta de z_0 y sea n el número dado en (10.3.3). Si $V \subseteq U$ es abierto y suficientemente chica, entonces la restricción de f^k a V es un mapeo conforme para $k = 1, 2, \dots, n$. Por la invariancia completa de J se tiene que $f^k(V \cap J) = f^k(V) \cap J$ para estas k , es decir, imágenes conformes locales de J aparecen en muchos lados en J , nada más en otra escala.

Para poder aprovechar de las representaciones gráficas de conjuntos de Julia necesitamos:

10.3.12 Definición. Sea f una función racional. El *conjunto de Julia relleno de f* es la unión del conjunto de Julia de f con todas las componentes acotadas del conjunto de Fatou de f .

Restringiéndonos a polinomios de la forma $f_c(z) := z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, denotamos por J_c el conjunto de Julia de f_c .

10.3.13 Definición. El *conjunto de Mandelbrot \mathcal{M}* es el conjunto de todos los parámetros c tal que $(f_c^k(0))_k$ es una sucesión acotada.

Se puede mostrar que $c \in \mathcal{M}$ si y sólo si J_c es conexo. En lo siguiente mostramos la forma de algunos de estos conjuntos, ver figuras 10.1– (generadas con el programa *fraqtive*, el cual puede ser descargado de <http://fraqtive.mimec.org/>).

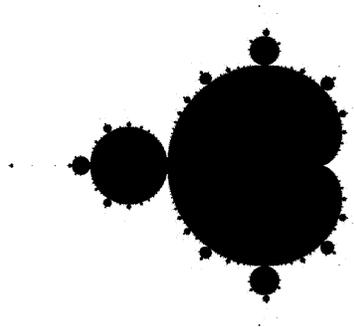


Figura 10.1: El conjunto de Mandelbrot

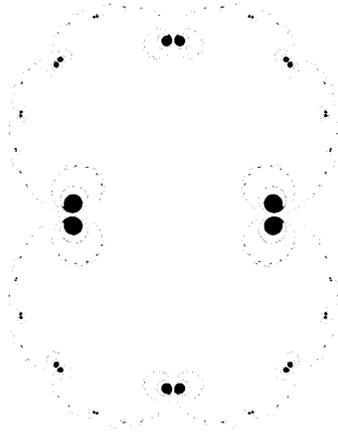


Figura 10.2: Conjunto de Julia relleno para $c = 0.251$.

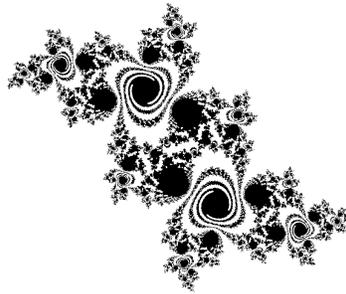


Figura 10.3: Conjunto de Julia relleno para $c = -0.148 - 0.652i$.

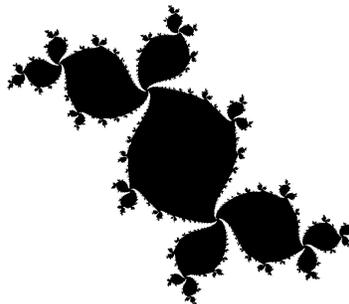


Figura 10.4: Conjunto de Julia relleno para $c = -0.1 - 0.7i$.

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197 (80c:30001)
- [2] D.S. Alexander, *A history of complex dynamics*, Aspects of Mathematics, E24, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994, From Schröder to Fatou and Julia. MR 1260930 (95d:01014)
- [3] R.J. Bagby, *The substitution theorem for Riemann integrals*, Real Anal. Exchange **27** (2001/02), no. 1, 309–314. MR 1887860 (2002k:26017)
- [4] A.F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 132, Springer-Verlag, New York, 1991, Complex analytic dynamical systems. MR 1128089 (92j:30026)
- [5] J.B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 1344449 (96i:30001)
- [6] E. Freitag and R. Busam, *Complex analysis*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR 2513384 (2012a:30002)
- [7] T.W. Gamelin, *Complex analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 1830078 (2002h:30001)
- [8] R.E. Greene and S.G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR 2215872 (2006m:30001)
- [9] S. Lang, *Complex analysis*, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1999. MR 1659317 (99i:30001)
- [10] H.O. Peitgen and P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Images of complex dynamical systems. MR 852695 (88e:00019)
- [11] H.A. Priestley, *Introduction to complex analysis*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 2003. MR 2014542 (2004i:30001)
- [12] R. Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics. MR 1084167 (91m:30001)

- [13] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR MR924157 (88k:00002)
- [14] D.N. Sarkhel and R. Výborný, *A change of variables theorem for the Riemann integral*, Real Anal. Exchange **22** (1996/97), no. 1, 390–395. MR 1433624 (97h:26010)
- [15] N. Steinmetz, *Rational iteration*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 16, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993, Complex analytic dynamical systems. MR 1224235 (94h:30035)