Facultad de Ciencias, UNAM
Licenciatura en ciencias matemáticas

Seminario de Análisis Matemático A

Análisis Aplicado a Ecuaciones Diferenciales Parciales

Nils Ackermann

2009-1

Índice general

Introducción

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ una región acotada. Consideramos la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + a(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

para una función no conocida $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, donde $a, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. De acuerdo

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial_i^2}(x).$$

0.1 Ejemplos. Empecemos con unas aplicaciones básicas, suponiendo que a es constante.

(a) Si u es el potencial eléctrico en una región Ω, f la densidad de carga eléctrica y g el potencial fijado por $\partial\Omega$, entonces u satisface (0.1) con $a = 0$.

(b) Si u es la distribución estacionaria de temperatura en un cuerpo Ω y g la temperatura fijada sobre $\partial\Omega$, entonces u satisface (0.1) con $a = f = 0$.

(c) Las soluciones del problema del valor propio

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

sirven para construir soluciones de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,x) = \Delta_x U(t,x) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ U(t,x) = 0, & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

la ecuación de la difusión o la conducción del calor.

(d) Las soluciones del problema (0.2) también sirven para construir soluciones de la ecuación de ondas:

$$
(0.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) = \Delta_x U(t,x) & x \in \Omega,\ t > 0, \\ U(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} U(0,x) = U_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}
$$

Con ecuaciones de este tipo uno modela la propagación de ondas electromagnéticas (por ejemplo de la luz), u oscilaciones (por ejemplo de cuerdas o diafragmas).

(e) La teoría de estas ecuaciones lineales es básica para estudiar ecuaciones no lineales, por ejemplo modelos de reacción-difusión que aparecen en la química y la biología:

$$
(0.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,x) = \Delta_x U(t,x) + f(t,x,U(t,x)) & t > 0,\ x \in \Omega, \\ U(t,x) = g(t,x,U(t,x)), & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega, \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}
$$

(f) La ecuación de Schrödinger de la teoría cuántica, lineal o no lineal, necesita una teoría similar, con la diferencia que se usan funciones con valores complejos.

Si Ω es una bola o de otra forma sencilla y si a es constante, muchas veces uno puede expresar la solución de (0.1) explícitamente por un integral sobre funciones conocidas, utilizando la solución fundamental. Pero si Ω es mas complicado y a depende de x, en general esto no es posible. Entonces uno se interesa en una teoría mas general que trata la existencia de soluciones de (0.1). Usando las herramientas de Análisis Funcional daremos los siguientes resultados, entre otros:

(a) Existe μ_0 tal que para todo $\mu \geq \mu_0$

$$
(0.6) \qquad \begin{cases} -\Delta u + au + \mu u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}
$$

tiene una y sólo una solución.

(b) Existe una sucesión μ_n tal que $\mu_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$ y tal que (0.6) tiene una y sólo una solución para todo $\mu \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mu_n\}$.

(c) Analizaremos lo que pasa si $\mu = \mu_n$ en (b).

(d) Demostraremos que existe una base Hilbertiana $\{\varphi_n\}$ de $L^2(\Omega)$ que cumple

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n + a\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, & \text{en } \Omega, \\ \varphi_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.7}$$

donde $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$ son los valores propios y los φ_n son las funciones propias del problema (0.2).

Regresando al los Ejemplos 0.1(c) y (d) donde $a = 0$, observamos que $U_i \in C^3(\overline{\Omega})$ tiene una representación

$$U_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^i \varphi_n(x), \qquad i = 0, 1 \tag{0.8}$$

porque $\{\varphi_n\}$ es una base Hilbertiana. Con esto y con (0.7), la solución de (0.3) es

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^0 \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\varphi_n(x), \tag{0.9}$$

y la solución de (0.4) es

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^0 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, t\right) + \frac{c_n^1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, t\right)\right) \varphi_n(x). \tag{0.10}$$

Eso demuestra la utilidad de conocer la base Hilbertiana $\{\varphi_n\}$.

1. Análisis Funcional

1.1. Espacios de Banach

1.1.1. Métricas y Normas

1.1 Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* en E es una aplicación $E \to [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ que satisface

(I) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$

(II) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in E$

(III) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

La pareja $(E, \|\cdot\|)$ se llama un *espacio vectorial normado*. La norma induce una métrica $d(x, y) := \|x - y\|$ en E. Si (E, d) es un espacio métrico **completo**, entonces se dice que $(E, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach*.

Notación. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$. Definimos

$$\begin{aligned}
U_r(x) &:= U_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) < r \,\} && \textit{bola abierta} \\
B_r(x) &:= B_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) \leq r \,\} && \textit{bola cerrada} \\
S_r(x) &:= S_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) = r \,\} && \textit{esfera}
\end{aligned}$$

Si X es un espacio normado y $x = 0$, suprimimos x de la notación: $U_r := U_r(0)$, $U_r X := U_r(0; X)$, etc.

1.2 Definición. Sea E un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en E. Entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son *normas equivalentes* si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \tag{1.1}$$

para todo $x \in E$.

1.3 Proposición. *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes en E. Denotamos por E_i al espacio normado $(E, \|\cdot\|_i)$ para $i = 1, 2$. Entonces coinciden las sucesiones convergentes en E_1 y E_2, y coinciden las sucesiones de Cauchy en E_1 y E_2.*

Demostración. Existen constantes C_1, C_2 como en (1.1). Sea (x_n) una sucesión convergente en E_1, es decir, existe $x \in E_1$ tal que $\|x_n - x\|_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\|x_n - x\|_2 \leq C_2 \|x_n - x\|_1 \to 0,$$

es decir, (x_n) converge en E_2. La otra dirección se obtiene similarmente.

Ahora sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E_1. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_1(\varepsilon) \, \forall m, n \geq n_1(\varepsilon) \colon \|x_m - x_n\|_1 \leq \varepsilon.$$

Definimos $n_2(\varepsilon) := n_1(\varepsilon/C_2)$ para todo $\varepsilon > 0$. Obtenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall m, n \geq n_2(\varepsilon) \colon \|x_m - x_n\|_2 \leq C_2 \|x_m - x_n\|_1 \leq C_2 \frac{\varepsilon}{C_2} = \varepsilon,$$

es decir, (x_n) es una sucesión de Cauchy en E_2. La otra dirección se sigue análogamente. □

1.4 Nota. Sean X, Y espacios métricos con métricas d_X y d_Y. En $X \times Y$ se define la métrica natural $d_{X \times Y}$ por

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Análogamente, y consistente con lo anterior, para dos espacios normados E, F se define la norma natural en $E \times F$ por

$$\|(x, y)\|_{E \times F} := \|x\|_E + \|y\|_F.$$

1.5 Nota. La suma en E es la aplicación $E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$, y la multiplicación por un escalar es la aplicación $\mathbb{R} \times E \to E$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$.

1.6 Proposición. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado.*

(a) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ *para todo* $x, y \in E$.

(b) *La norma es una aplicación continua.*

(c) *La suma en E y la multiplicación por un escalar son aplicaciones continuas.*

Demostración de la Proposición 1.6. **(a)** Para todo $x, y \in E$ la desigualdad del triángulo implica que

$$\begin{aligned} \|x\| - \|y\| &= \|x - y + y\| - \|y\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Por la misma razón se sigue que

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Entonces se obtiene (a).

(b) Eso se sigue de (a) directamente. En particular, la norma es Lipschitz continua con constante 1.

(c) Tarea. □

1.1.2. Operadores Lineales Acotados

1.7 Definición. Sean E, F espacios normados, y sea $L\colon E \to F$ un operador lineal. L es un *operador lineal acotado* si existe $C \geq 0$ tal que

$$\|Lx\|_F \leq C\|x\|_E \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{1.2}$$

Un subconjunto A en un espacio normado E es *acotado* si $\sup_{x\in A}\|x\| < \infty$.

1.8 Proposición. *Sean E, F espacios normados, $L\colon E \to F$ lineal. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(I) *L es acotado*

(II) *L es continuo*

(III) *$Lx_n \to 0$ si $x_n \to 0$*

(IV) *existe $r > 0$ tal que $L(U_rE) \subseteq U_1F$.*

(V) *$L(A)$ es acotado para cada $A \subseteq E$ que es acotado*

Demostración. **(I) ⇒ (II)** Supongamos que $x_n \to x$. En consecuencia, $\|Lx_n - Lx\| = \|L[x_n - x]\| \leq C\|x_n - x\| \to 0$.

(II) ⇒ (III) Supongamos que $x_n \to 0$. Como L es continuo y $L(0) = 0$, se sigue que $Lx_n \to 0$.

(III) ⇒ (IV) Si no existe tal r, entonces existe $x_n \to 0$ en E tal que $Lx_n \notin U_1F$ para todo n, es decir, tal que $\|Lx_n\| \geq 1$ para todo n. Pero esto contradice $Lx_n \to 0$ y la continuidad de la norma.

(IV) ⇒ (V) Si $A \subseteq E$ es acotado, entonces existe $C > 0$ tal que $A \subseteq U_CE = \frac{C}{r}U_rE$. Se sigue que $L(A) \subseteq L(U_CE) \subseteq \frac{C}{r}U_1F = U_{C/r}F$, es decir, $L(A)$ es acotado.

(V) ⇒ (I) Existe $C > 0$ tal que $L(U_1E) \subseteq U_CF$. Entonces se sigue que $\left\|L\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_F \leq C$ para todo $x \in E\backslash\{0\}$, y entonces $\|Lx\|_F \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$. □

1.9 Ejemplo. Como es usual, para $f\colon A \to \mathbb{R}$ denotamos

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A}|f(x)|.$$

Sabemos que los espacios L^p para $p \geq 1$ son espacios de Banach. También sabemos que el espacio

$$E = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

donde $C[0,1]$ es el conjunto de las funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{R}$, es un espacio de Banach. Analicemos el espacio normado

$$F = (C[0,1], \|\cdot\|_{L^1}).$$

Tenemos para $f \in C[0,1]$:

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, \mathrm{d}x = \|f\|_\infty,$$

es decir, el operador lineal $E \to F$, dado por la identidad, es acotado, y luego continuo por la Proposición 1.8.

Pregunta: ¿Son equivalentes las normas? Vamos a demostrar que F no es completo, de donde se sigue que las normas no son equivalentes: Si las normas fueran equivalentes, por la Proposición 1.3 y porque E es completo, también F sería completo, una contradicción.

Para demostrar que F no es completo consideramos la sucesión f_n en $C[0,1]$, dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demostraremos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en F que no converge en F.

Si $m \geq n$ entonces

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_F &= \frac{1}{m^2}(m-n) + \int_{1/m^2}^{1/n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - n \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

cuando $m, n \to \infty$. Entonces (f_n) es de Cauchy en F.

Supongamos que existe $f \in F$ tal que $f_n \to f$ en F, es decir, $\|f_n - f\|_F \to 0$. Ponemos $C := \|f\|_\infty$. Si $n \geq 2C$ entonces

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_F &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \int_0^{1/C^2} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\geq \int_0^{1/C^2} (|f_n(x)| - |f(x)|) \, \mathrm{d}x \geq \int_0^{1/C^2} f_n(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{C} = \frac{1}{C} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2C} > 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Eso es una contradicción. En consecuencia f_n no converge a f.

1.10 Ejemplo. Consideremos los espacios normados

$$\begin{aligned} E &= (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \\ F &= (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \end{aligned}$$

y el operador lineal

$$L \colon E \to F, \ Lf := f'.$$

Demostremos que L no es continuo. Para esto, consideramos la sucesión $(f_n) \subseteq E$, dada por $f_n(x) = x^n$. Se sigue que $\|f_n\|_E = 1$, y

$$\|Lf_n\|_F = \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |nx^{n-1}| = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $L(B_1 E)$ no es acotado en F, y por la Proposición 1.8 L no es continuo.

Si definimos

$$\|f\|_{E_1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad E_1 := (C^1[0,1], \|\cdot\|_{E_1}),$$

en consecuencia

$$\|Lf\|_F = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{E_1},$$

L es acotado y continuo entre E_1 y F.

Esto demuestra que las propiedades de espacios y operadores dependen fundamentalmente de las normas que se usan.

1.11 Teorema. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita.*

(a) *$A \subseteq E$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.*

(b) *Si $\|\cdot\|_2$ es otra norma en E entonces $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes.*

Demostración. Sea N la dimensión de E, sea $\{ e_1, e_2, \ldots, e_N \}$ una base de E, y sea $L \colon \mathbb{R}^N \to E$ dado por

$$(x^1, x^2, \ldots, x^N) \mapsto \sum_{k=1}^{N} x^k e_k.$$

Entonces L es un isomorfismo lineal. Demostremos que L también es un homeomorfismo (es decir, L y L^{-1} son continuos), donde $\mathbb{R}^N$ tiene la norma

$$|x|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x^k)^2}.$$

Si $x_n \to x$ en $\mathbb{R}^N$, entonces $x_n^k \to x^k$ para $k = 1, 2, \ldots, N$. Por la Proposición 1.6(c) (continuidad de las operaciones) se sigue que

$$Lx_n = \sum_{k=1}^{N} x_n^k e_k \to \sum_{k=1}^{N} x^k e_k = Lx$$

en E. Entonces L es continuo. Como $S_1\mathbb{R}^N$ es compacto en $\mathbb{R}^N$, también $L(S_1\mathbb{R}^N)$ es compacto en E. Como $0 \notin L(S_1\mathbb{R}^N)$, $C := \min_{x\in S_1\mathbb{R}^N} \|Lx\|_E > 0$ (el mínimo existe por la compacidad de $L(S_1\mathbb{R}^N)$ y la continuidad de la norma). Se sigue que para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$:

$$\left\| L\frac{x}{|x|_2} \right\|_E \geq C,$$

y entonces

$$|x|_2 \leq \frac{1}{C}\|Lx\|_E$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. En consecuencia, se tiene que para todo $y \in E$ y $x := L^{-1}y$

$$|L^{-1}y|_2 \leq \frac{1}{C}\|y\|_E,$$

es decir, L^{-1} es continuo.

(a): Sea $M := L^{-1}(A)$. Si A es compacto, entonces M es compacto como imagen de A bajo la aplicación continua L^{-1}. Por lo tanto M es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^N$. Como $A = L(M)$ y L es acotado, la Proposición 1.8(v) implica que A es acotado. Claramente un conjunto compacto es cerrado.

Si A es cerrado y acotado, M es acotado porque L^{-1} es acotado. M es cerrado como la preimagen de A bajo la aplicación continua L. En seguida M es compacto en $\mathbb{R}^N$, y A es compacto como la imagen de M bajo L.

(b): Escribimos $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|$. Como L y L^{-1} son continuos para las dos normas, existen constantes $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C_1|x|_2 &\leq \|Lx\|_1 \leq C_2|x|_2 \\ C_3|x|_2 &\leq \|Lx\|_2 \leq C_4|x|_2 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces se sigue para todo $y \in E$:

$$\frac{C_3}{C_2}\|y\|_1 \leq C_3|L^{-1}y|_2 \leq \|y\|_2 \leq C_4|L^{-1}y|_2 \leq \frac{C_4}{C_1}\|y\|_1.$$

$\square$

1.1.3. El Álgebra de los Operadores Acotados

1.12 Definición. Sean E, F espacios normados. Definimos el conjunto

$$\mathcal{L}(E,F) := \{\, L\colon E \to F \mid L \text{ es lineal y acotado} \,\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial de los operadores lineales. Para $L \in \mathcal{L}(E,F)$ definimos

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\, \|Lx\|_F \mid x \in E,\ \|x\|_E \leq 1 \,\}.$$

Escribimos $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.

1.13 Proposición. (a) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *es una norma en* $\mathcal{L}(E,F)$*. Satisface*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\left\{ \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \;\middle|\; x \in E\backslash\{0\} \right\}.$$

(b) *Si F es completo, también $\mathcal{L}(E,F)$ es completo.*

(c) *Si E,F,G son espacios normados, si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B \in \mathcal{L}(F,G)$, entonces $BA \in \mathcal{L}(E,G)$ y*
$$\|BA\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}.$$

Demostración. **(a)** Si $x \in E\backslash\{0\}$, entonces
$$\frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} = \left\| L\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_F \leq \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

y en consecuencia
$$\sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Por otro lado, para todo $x \in E$ tal que $0 < \|x\|_E \leq 1$ se cumple que
$$\|Lx\|_F \leq \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E}$$

y luego que
$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in B_1 E} \|Lx\|_F \leq \sup_{x\in E\backslash\{0\}} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ es una norma es fácil, lo omitimos.

(b) Supongamos que (L_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces

$$(1.4) \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0(\varepsilon)\, \forall m,n \geq n_0\, \forall x \in E\colon \quad \|L_m x - L_n x\|_F \leq \|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

Entonces, para todo $x \in E$ la sucesión $(L_n x)$ es de Cauchy en F. Como F es completo, podemos definir $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ para todo $x \in E$. Se sigue fácilmente por la continuidad de las operaciones en E y F que L es un operador lineal.

Falta demostrar que también $L \in \mathcal{L}(E,F)$ y $L_n \to L$ en $\mathcal{L}(E,F)$.

Fijamos un $\varepsilon > 0$, $n := n_0(\varepsilon)$, y dejamos $m \to \infty$ en (1.4):
$$\forall x \in E\colon \quad \|Lx\|_F - \|L_{n_0(\varepsilon)}x\|_F \leq \|Lx - L_{n_0(\varepsilon)}x\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E,$$

y entonces
$$\forall x \in E\colon \quad \|Lx\|_F \leq (\varepsilon + \|L_{n_0(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|x\|_E,$$

es decir, $L \in \mathcal{L}(E,F)$ y $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon + \|L_{n_0(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Dejamos $m \to \infty$ en (1.4) otra vez y tenemos que
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0(\varepsilon)\, \forall n \geq n_0\, \forall x \in E\colon \quad \|Lx - L_n x\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

Se sigue que

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0(\varepsilon) \, \forall n \geq n_0 : \quad \|L - L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon,$$

es decir, $L_n \to L$ en $\mathcal{L}(E, F)$.

(c) Es claro que BA es un operador lineal. Para todo $x \in E$ se cumple

$$\|BAx\|_G \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|Ax\|_F \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E,$$

de donde se siguen las afirmaciones. □

1.14 Nota. Sea E un espacio de Banach. El espacio $\mathcal{L}(E)$ es de Banach y tiene una estructura adicional, la composición $E \times E \to E$, $(A, B) \mapsto AB$, que cumple $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. Este mapeo de compocición (o multiplicación) en $\mathcal{L}(E)$ es continuo, lo cual sigue de la Proposición 1.13(c).

En general, si un espacio de Banach $\mathcal{A}$ tiene la estructura de un Álgebra y cumple $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ se llama un *Álgebra de Banach*.

1.15 Proposición (La Series de Neumann)**.** *Sea E un espacio normado, y sea $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Entonces $I - A$ es invertible en $\mathcal{L}(E)$ y se cumple*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{1.5}$$

Demostración. Definimos una sucesión (A_n) en $\mathcal{L}(E)$ por

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

La Proposición 1.13(c) implica por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k. \tag{1.6}$$

Como $\|A\| < 1$, (1.6) dice que $A^k \to 0$ en $\mathcal{L}(E)$ cuando $k \to \infty$. Además, la series geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$$

converge absolutamente. Eso implica que la sucesión de sus sumas parciales es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por (1.6) tenemos para $m \geq n$ que

$$\|A_m - A_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|A^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k.$$

En consecuencia (A_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E)$, que converge a un elemento $B \in \mathcal{L}(E)$ porque ese espacio es completo.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$(I - A)A_n = I - A^{n+1} = A_n(I - A). \tag{1.7}$$

La continuidad de la multiplicación en $\mathcal{L}(E)$ implica, dejando $n \to \infty$, que

$$(I - A)B = I = B(I - A),$$

es decir, $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = B = \lim_{n\to\infty} A_n$. □

1.16 Nota. En el contexto de la Proposición anterior se denota

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{1.8}$$

1.1.4. Espacios Duales

1.17 Definición. Sea E un espacio normado. El *espacio dual* de E es el espacio de las funciones lineales continuas:

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Si $x \in E$ y $f \in E'$, denotamos

$$\langle f, x\rangle := f(x).$$

Como $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach, la Proposición 1.13(b) implica que también E' es un espacio de Banach.

1.18 Ejemplo. (a) Para $E := (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y un $x_0 \in [0,1]$ la aplicación $L\colon E \to \mathbb{R}$, $Lf := f(x_0)$, es una función lineal continua: $\|Lf\|_{\mathbb{R}} = |Lf| = |f(x_0)| \le \|f\|_E$.

(b) Para $E = L^1(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto, la aplicación

$$u \mapsto \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x$$

es una función lineal continua. Eso se sigue de

$$\left|\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x = \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

(c) Para $E := L^p(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto, $p, p' > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $f \in L^{p'}(\Omega)$, la aplicación

$$u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

es una función lineal continua. Eso se sigue de la desigualdad de Hölder:

$$\left|\int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |f(x)|\,|u(x)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

1.1.5. Proyecciones

1.19 Nota. El núcleo y el rango de un operador lineal son subespacios lineales. El núcleo de un operador lineal continuo es un subespacio cerrado porque es la preimagen del punto 0. El rango de un operador lineal continuo puede ser cerrado o no.

Notación. Para un operador lineal A denotamos el rango por $\mathcal{R}(A)$ y el núcleo por $\mathcal{N}(A)$.

1.20 Definición. Sea E un espacio vectorial. Una *proyección* es un operador lineal $P\colon E \to E$ que satisface $P^2 = P$.

1.21 Proposición. *Sea E un espacio vectorial.*

(a) *Si P es una proyección en E, entonces $I - P$ es una proyección, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$, $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$ y $E = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P)$.*

(b) *Si $E = X \oplus Y$, entonces existe una proyección $P\colon E \to E$ donde $\mathcal{R}(P) = X$ y $\mathcal{N}(P) = Y$. La llamamos la* proyección sobre X a lo largo de Y.

Demostración. **(a):** Calculamos $(I - P)(I - P) = I - 2P + P^2 = I - P$, es decir, $I - P$ es una proyección. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(I - P) \quad &\Leftrightarrow \quad x - Px = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Px = x \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in E\colon x = Py \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{R}(P) \end{aligned}$$

y en consecuencia que $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$. Como $P = I - (I - P)$, el mismo argumento da $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.

Supongamos que $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(I - P)$. Esto implica que $x = Px = 0$, es decir $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$. Para $x \in E$ tenemos $x = x - Px + Px = (I - P)x + Px \in \mathcal{R}(I - P) + \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{R}(P)$.

(b): Para $z \in E$ existen elementos únicos $x \in X$ y $y \in Y$ tal que $z = x + y$. Definimos un operador lineal $P\colon E \to E$ por $Pz := x$.

Si $x \in X$, entonces $Px = x$ por la unicidad de la descomposición de x en elementos en X y Y. Esto implica para cualquier $z \in E$ que $P^2 z = Pz$, es decir P es una proyección y $\mathcal{R}(P) = X$. Si $y \in Y$, entonces tenemos $Py = 0$ por unicidad, y similarmente $Pz = 0$ implica que $z \in Y$. Eso demuestra que $\mathcal{N}(P) = Y$. $\square$

1.22 Definición. Sea E un espacio normado, y sean X, Y subespacios cerrados de E tal que $E = X \oplus Y$. Entonces X y Y se llaman *suplementarios topológicos.*

1.23 Lema. *Si E es un espacio normado y si $P \in \mathcal{L}(E)$ es una proyección, entonces $\mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{R}(P)$ son suplementarios topológicos.*

Demostración. Como P es continuo $\mathcal{N}(P)$ es cerrado. Usando $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ y la continuidad de $I - P$, obtenemos que $\mathcal{R}(P)$ es cerrado. Por la Proposición 1.21(a) se sigue la afirmación. □

1.24 Nota. Mas adelante veremos que si X, Y son suplementarios topológicos de un espacio de Banach E, entonces la proyección sobre X a lo largo de Y es continua.

1.2. Espacios de Hilbert

1.2.1. Productos Escalares

1.25 Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $E \times E \to \mathbb{R}$, escrita como (x, y) para $x, y \in E$, es un *producto escalar* si cumple:

(I) $(x, x) \geq 0$ para todo $x \in E$, y $(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ (definida positiva).

(II) $(\cdot, x)$ y $(x, \cdot)$ son funciones lineales para todo $x \in E$ (bilineal).

(III) $(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in E$ (simétrica).

Si $(x, y) = 0$ escribimos $x \perp y$. Para $A \subseteq E$ ponemos

$$A^{\perp} := \{\, x \in E \mid x \perp y \text{ para todo } y \in A \,\}.$$

1.26 Proposición. *En un espacio E con producto escalar $(\cdot, \cdot)$ ponemos $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.*

(a) *Se cumple la* desigualdad de Cauchy-Schwarz*:*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \text{para todo } x, y \in E.$$

(b) *Para todo $x, y \in E$ se cumple: $x \perp y$ si y sólo si $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(c) *$\| \cdot \|$ es una norma en E.*

(d) *Para todo $x \in E$ la función lineal $f_x := (x, \cdot)$ es continua y tiene norma $\|f_x\|_{E'} = \|x\|_E$.*

(e) *Se cumple la* desigualdad del paralelogramo*:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \text{para todo } x, y \in E.$$

Demostración. **(a)** Para $x = 0$ no hay nada que demostrar. Entonces supongamos que $x \neq 0$. Definimos un polinomio cuadrado en λ:

$$f(\lambda) := \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2.$$

Sea λ_0 el punto donde f alcanza su mínimo:

$$0 = f'(\lambda_0) = 2\lambda_0\|x\|^2 + 2(x, y) \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = -\frac{(x, y)}{\|x\|^2}.$$

Entonces

$$0 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = f(\lambda_0) = \frac{(x, y)^2}{\|x\|^2} - 2\frac{(x, y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|x\|^2}. \tag{1.9}$$

De esto se sigue la afirmación.

(b) La parte "sólo si" es una consecuencia de $\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Inversamente, si $x \neq 0$ y λ_0 es como en la demostración de (a), se sigue de (1.9) que

$$\|y\|^2 \leq \|\lambda_0 x + y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|x\|^2}.$$

En consecuencia, $(x, y) = 0$.

(c) Las propiedades de la definidad positiva y $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ son triviales. La desigualdad del triángulo se verifica usando (a):

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(d) Eso se sigue de (a) y de $(x, x) = \|x\|\,\|x\|$.

(e) Es un cálculo fácil. □

1.27 Nota. Una norma está dada por un producto escalar si y sólo si cumple la desigualdad del paralelogramo.

1.28 Definición. Un espacio E con producto escalar es un *espacio de Hilbert* si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Desde aquí para el resto de la Sección 1.2 E siempre sea un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y norma $\|\cdot\|$.

1.29 Ejemplo.

(a) $\mathbb{R}^N$ con el producto escalar $(x, y) := \sum_{k=1}^N x^k y^k$.

(b)
$$l^2 := \left\{ (x^k)_{k=1}^\infty \;\middle|\; \sum_{k=1}^\infty (x^k)^2 < \infty \right\}$$
con el producto escalar $(x, y) := \sum_{k=1}^\infty x^k y^k$.

(c) $L^2(\Omega)$ con el producto escalar $(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

1.2.2. Ortogonalidad y Proyecciones Simétricas

1.30 Proposición. *Sea X un subespacio de un espacio de Hilbert E.*

(a) $X^\perp$ *es cerrado*

(b) $X^\perp = (\overline{X})^\perp$

(c) $E = \overline{X} \oplus X^\perp$

(d) $X^{\perp\perp} := (X^\perp)^\perp = \overline{X}$.

Demostración. **(a)** Para todo $x \in E$ 1.26(d) implica que $x^\perp$ es cerrado porque es el núcleo de la función lineal continua f_x. Entonces
$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} x^\perp$$
también es cerrado.

(b) Es claro que $(\overline{X})^\perp \subseteq X^\perp$. Inversamente, consideramos $y \in X^\perp$. Entonces $X \subseteq y^\perp$. Como $y^\perp$ es cerrado, $\overline{X} \subseteq y^\perp$, es decir que $y \in (\overline{X})^\perp$.

(c) Es claro que $\overline{X} \cap X^\perp = \{0\}$. Para cada $x^* \in E$ hay que obtener $y^* \in \overline{X}$ y $z^* \in X^\perp$ tales que $x^* = y^* + z^*$. Sea $(y_n) \subseteq \overline{X}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* - y_n\| = \inf_{y \in \overline{X}} \|x^* - y\| =: \alpha. \tag{1.10}$$

La identidad del paralelogramo y $(y_m + y_n)/2 \in \overline{X}$ implican que

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x^*) - (y_n - x^*)\|^2 \\
&= 2\|x^* - y_m\|^2 + 2\|x^* - y_n\|^2 - 4\|x^* - (y_m + y_n)/2\|^2 \\
&\le 2\|x^* - y_m\|^2 + 2\|x^* - y_n\|^2 - 4\alpha \\
&\to 0
\end{aligned}$$

cuando $m, n \to \infty$. En consecuencia, (y_n) es una sucesión de Cauchy que converge a un $y^* \in \overline{X}$. La ecuación (1.10) y la continuidad de la norma implican que

$$\|x^* - y^*\| = \alpha. \tag{1.11}$$

Sea y_1^* otro punto en $\overline{X}$ que cumple (1.11). Consideramos la sucesión (y_n) dada por $y^*, y_1^*, y^*, y_1^*, y^*, y_1^*, \ldots$ que cumple (1.10). La prueba anterior dice que también esta sucesión (y_n) converge, es decir $y^* = y_1^*$. Entonces y^* es el único elemento en $\overline{X}$ que satisface $\|x^* - y^*\| = \alpha$.

Pongamos $z^* := x^* - y^*$. Entonces para todo $y \in \overline{X}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\|z^*\| = \|x^* - y^*\| \leq \|x^* - y^* + \lambda y\| = \|z^* + \lambda y\|$$

porque $-y^* + \lambda y \in \overline{X}$. Usando 1.26(b) se obtiene que $z^* \perp y$ y además $z^* \in X^\perp$.

(d) Si $x \in X$ entonces $(x, y) = 0$ para todo $y \in X^\perp$. Se sigue que $x \in (X^\perp)^\perp$. Como eso se cumple para todo $x \in X$ entonces $X \subseteq X^{\perp\perp}$. Como $X^{\perp\perp}$ es cerrado por (a), también $\overline{X} \subseteq X^{\perp\perp}$. Por otro lado, si $x \in X^{\perp\perp}$ demostraremos que $x \in \overline{X}$. Por (c), existen $y \in \overline{X}$ y $z \in X^\perp \setminus \{0\}$ tal que $x = y + z$. Como $x \perp z$ y $y \perp z$, obtenemos

$$0 = (x, z) = (y + z, z) = (y, z) + (z, z) = \|z\|^2,$$

es decir, $z = 0$ y $x = y \in \overline{X}$. □

1.31 Definición. Sea P una proyección en E. P es una *proyección ortogonal* si $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

1.32 Definición. Un operador lineal $A \colon E \to E$ que cumple $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo $x, y \in E$ es *simétrico*. Como el producto escalar es una función bilineal, el conjunto de operadores lineales simétricos es un subespacio lineal del espacio de los operadores lineales.

1.33 Proposición. *Una proyección P en E es ortogonal si y sólo si es simétrica. En este caso $P \in \mathcal{L}(E)$ y $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$ o $\|P\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$. Además, $\mathcal{N}(P)$ y $\mathcal{R}(P)$ son cerrados.*

Demostración. Sea P ortogonal. Como $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$, entonces para todo $x, y \in E$ se sigue que

$$(Px, y) = (Px, Py + (I - P)y) = (Px, Py),$$

y por la misma razón se sigue que $(x, Py) = (Px, Py)$. Entonces P es simétrico.

Sea P simétrico. Entonces para todo $x, y \in E$ se sigue que

$$(Px, (I - P)y) = (x, P(I - P)y) = (x, (P - P^2)y) = (x, (P - P)y) = 0,$$

es decir, $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

Para todo $x \in E$

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P^2 x) = (x, Px) \leq \|x\| \, \|Px\|.$$

Por lo tanto, $P \in \mathcal{L}(E)$ y $\|P\| \leq 1$. Si $P \neq 0$, entonces existe $x \in E$ tal que $y := Px \neq 0$ y

$$\frac{\|Py\|}{\|y\|} = \frac{\|P^2x\|}{\|Px\|} = 1.$$

Por eso $\|P\| \geq 1$.

Como P es continuo el Lema 1.23 dice que $\mathcal{R}(P)$ y $\mathcal{N}(P)$ son cerrados. □

1.34 Teorema (Fréchet-Riesz)**.** *Para todo $f \in E'$ existe precisamente un $x \in E$ tal que $f = (x, \cdot)$.*

Demostración. Para demostrar la unicidad, sean $x_1, x_2 \in E$ tal que $f = (x_1, \cdot) = (x_2, \cdot)$. Entonces $(x_1 - x_2, y) = 0$ para todo $y \in E$, es decir, $x_1 = x_2$.

Para la existencia, supongamos que $f \neq 0$. Entonces $\mathcal{N}(f) \neq E$. Como $\mathcal{N}(f)$ es cerrado, $E = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^\perp$ y $f\colon \mathcal{N}(f)^\perp \to \mathbb{R}$ es inyectivo, es decir biyectivo. Esto implica que

$$\dim(\mathcal{N}(f)^\perp) = 1. \tag{1.12}$$

Elijamos $z \in S_1E \cap \mathcal{N}(f)^\perp$. Denotamos por P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{N}(f)^\perp$ y pongamos $x := f(z)z$. Sea $y \in E$. Por (1.12) existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Py = \alpha z$. Calculamos

$$\begin{aligned}(x, y) &= (Px, y) = (x, Py) = f(z)(z, Py)\\ &= f(z)\alpha(z, z) = f(\alpha z) = f(Py) = f(Py + (I - P)y) = f(y).\end{aligned}$$

□

1.35 Nota. En la situación del Teorema 1.34 se cumple que $\|f\|_{E'} = \|x\|_E$ por la Proposición 1.26(d). También la aplicación $E \to E'$, dada por $x \mapsto (x, \cdot)$, es lineal y biyectiva. Entonces los espacios E y E' son isomorfos isométricamente.

1.36 Lema. *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$.*

(a) *Si $\alpha > 0$ es tal que*

$$\|Ax\| \geq \alpha\|x\| \qquad \textit{para todo } x \in \mathcal{N}(A)^\perp, \tag{1.13}$$

entonces $\mathcal{R}(A)$ es cerrado.

(b) *Si $\alpha > 0$ es tal que*

$$(Ax, x) \geq \alpha\|x\|^2 \qquad \textit{para todo } x \in E, \tag{1.14}$$

entonces A es un isomorfismo.

Demostración. **(a):** Como $E = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^{\perp}$, entonces

$$L := A|_{\mathcal{N}(A)^{\perp}} : \mathcal{N}(A)^{\perp} \to \mathcal{R}(A)$$

es biyectivo. Por (1.13) L^{-1} es continuo; es decir, L es un isomorfismo. Para demostrar que $\mathcal{R}(A)$ es cerrado, sea (x_n) una sucesión en $\mathcal{R}(A)$ que converge en E a un x. Pongamos $y_n := L^{-1}x_n$. Por $\|y_m - y_n\| \leq \|L^{-1}\| \, \|x_m - x_n\|$ se sigue que (y_n) es una sucesión de Cauchy en E. Como E es completo y $\mathcal{N}(A)^{\perp}$ cerrado, existe $y \in \mathcal{N}(A)^{\perp}$ tal que $y_n \to y$. La continuidad de L implica que $x_n = Ly_n \to Ly$, es decir $x = Ly \in \mathcal{R}(A)$. Entonces $\mathcal{R}(A)$ es cerrado.

(b): Para todo $x \in E$ (1.14) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implican

$$\|Ax\| \geq \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|} \geq \alpha \|x\|. \tag{1.15}$$

Es claro que A es inyectivo. El punto (a) dice que $\mathcal{R}(A)$ es cerrado, es decir, $E = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$. Demostremos que A es suprayectivo. Supongamos que $\mathcal{R}(A) \neq E$. Por tanto existe $x \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \backslash \{0\}$, y $(Ax, x) = 0$. Esto contradice a (1.14). La continuidad de A^{-1} se sigue de (1.15). □

1.2.3. Sistemas Ortonormales

Notación. Si A es un subconjunto en un espacio vectorial, por $[A]$ denotamos la envolvente lineal de A. Si $A = \{ x_1, x_2, \dots \}$ es numerable, escribimos $[x_1, x_2, \dots] := [A]$.

1.37 Definición. Un *sistema ortonormal numerable (finito)* es un subconjunto $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\{e_k\}_{k=1}^{n}$) de E tal que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

1.38 Proposición. *Sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal numerable (o finito) en E y sea P la proyección ortogonal sobre $\overline{X}$, donde $X := [e_1, e_2, \dots]$. Para todo $x \in E$ se cumplen:*

(a) *La series $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ converge en $\mathbb{R}$, y la series $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ converge en E.*

(b) *Se cumple*
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2.$$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = Px$

Demostración. Para $x \in E$ definimos $P_k x := (x, e_k) e_k$. Para todo $x \in E$ se cumple

$$P_k^2 x = ((x, e_k)e_k, e_k)e_k = (x, e_k)(e_k, e_k)e_k = P_k x,$$

es decir P_k es una proyección sobre $[e_k]$. Además, para todo $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(P_k x, y) &= ((x, ek)e_k, y)\\ &= (x, e_k)(e_k, y)\\ &= (x, (y, e_k)e_k)\\ &= (x, P_k y).\end{aligned}$$

Eso demuestra que P_k es simétrico. En consecuencia, P_k es la proyección ortogonal sobre $[e_k]$, por la Proposición 1.33.

Como los e_k son ortogonales dos a dos, $Q_n := \sum_{k=1}^n P_k$ es una proyección sobre $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, y como los P_k son simétricos, también Q_n es simétrico, es decir ortogonal.

Fijemos $x \in E$. Tenemos $Q_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k$. Por la ortogonalidad se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k \right\|^2 = \|Q_n x\|^2 \le \|Q_n x\|^2 + \|(I - Q_n)x\|^2 = \|x\|^2. \tag{1.16}$$

Esto implica que $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ converge en $\mathbb{R}$. Calculamos, usando la ortogonalidad otra vez:

$$\|Q_n x - Q_m x\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} (x, e_k)e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |(x, e_k)|^2.$$

Entonces $Q_n x$ es una sucesión de Cauchy en E, y converge a un elemento de $\overline{X}$ porque E es completo. Eso demuestra (a). Dejando $n \to \infty$ en (1.16) demuestra (b).

(c) Definimos $Qx := \lim_{n\to\infty} Q_n x$ para $x \in E$. La continuidad de las operaciones implica que Q es lineal. Además, como $\|Q_n\| = 1$ para todo n, para todo $x \in E$ se tiene

$$\|Qx\| = \lim_{n\to\infty} \|Q_n x\| \le \lim_{n\to\infty} \|Q_n\| \|x\| = \|x\|.$$

Se sigue que $Q \in \mathcal{L}(E)$.

Para $x \in E$ y $m \ge n$ tenemos

$$Q_m Q_n x = Q_n x$$

por la definición de los Q_n. Dejando $m \to \infty$ y después $n \to \infty$, utilizando la continuidad de Q, obtenemos $Q^2 x = Qx$, es decir, Q es una proyección con $\mathcal{R}(Q) \subseteq \overline{X}$. Claramente $X \subseteq \mathcal{R}(Q)$ porque $Q_n e_k = e_k$ para $n \ge k$. El Lema 1.23 y la continuidad de Q implican que $\mathcal{R}(Q)$ es cerrado. Por lo tanto, $\overline{X} \subseteq \mathcal{R}(Q)$ y Q es una proyección sobre $\overline{X}$.

Sean $x, y \in E$. Calculamos

$$(Qx, y) = \lim_{n\to\infty} (Q_n x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, Q_n y) = (x, Qy)$$

utilizando que Q_n es simétrico. En consecuencia, Q es simétrico, es decir, ortogonal, y por tanto $Q = P$. $\square$

1.39 Definición. Un sistema ortonormal numerable (o finito) $\{e_k\}_{k\in J}$ en E es una *base Hilbertiana* si

$$x = \sum_{k\in J}(x, e_k)e_k \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{1.17}$$

Aquí J es un conjunto de índices numerable (o finito).

1.40 Lema. *$\{e_k\}_{k\in J}$ es una base Hilbertiana si y sólo si $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$.*

Demostración. Si $\{e_k\}$ es una base Hilbertiana en E, entonces $\overline{[e_1, e_2, \dots]} \subseteq E$. La inclusión inversa se sigue de (1.17).

Si $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$, entonces sea P la proyección ortogonal sobre $\overline{[e_1, e_2, \dots]}$. La Proposición 1.30(c) implica que $P = I$. Por lo tanto, para todo $x \in E$ La Proposición 1.38(c) implica que $x = Px = \sum_{k\in J}(x, e_k)e_k$. □

1.41 Definición. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *denso* si $\overline{A} = X$. X es *separable* si contiene un subconjunto numerable y denso a la misma vez.

1.42 Lema. *Sean X, Y espacios métricos, $A \subseteq X$ denso en X, y $f\colon X \to Y$ una aplicación continua tal que $f(X)$ es denso en Y. Entonces $f(A)$ es denso en Y.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Existe una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que $f(x_n) \to y$ en Y, porque $f(X)$ es denso en Y. Como A es denso en X y f es continuo, para todo n podemos agarrar $a_n \in A$ tal que $d(f(x_n), f(a_n)) \le 1/n$. Se sigue que

$$d(y, f(a_n)) \le d(y, f(x_n)) + d(f(x_n), f(a_n)) \le d(y, f(x_n)) + \frac{1}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. □

1.43 Ejemplos. (a) $\mathbb{R}^N$ con cualquier norma es separable: $\mathbb{Q}^N$ es numerable y denso en $\mathbb{R}^N$.

(b) l^2 tiene una base Hilbertiana numerable dada por $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ donde la 1 es en el lugar k. Eso se sigue de

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\Big\|_{l^2}^2 = \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x^k e_k\Big\|_{l^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x^k|^2 \to 0$$

cuando $n \to \infty$. En la tarea se prueba que un espacio con base Hilbertiana numerable es separable. Entonces l^2 es separable.

(c) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto. Entonces $C(K)$, el conjunto de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, es separable (Teorema de Stone-Weierstraß).

(d) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y sea $p \in [1, \infty)$. La inclusión de $C(\overline{\Omega})$ en $L^p(\Omega)$ es continua:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq \operatorname{meas}(\Omega)^{1/p} \|u\|_\infty.$$

La inclusión también es densa, y $C(\overline{\Omega})$ es separable por (c). Entonces el Lema 1.42 dice que $L^p(\Omega)$ es separable.

(e) l^∞, el espacio de las sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo, no es separable: Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq l^\infty$ es densa. Denotamos $x_n = (\xi_n^1, \xi_n^2, \dots)$. Definimos $y := (\psi^1, \psi^2, \dots) \in l^\infty$ por

$$\psi^k := \begin{cases} \xi_k^k + 1 & \text{si } |\xi_k^k| \leq 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces $\|y - x_n\|_{l^\infty} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, una contradicción.

1.44 Teorema. *Si $E \neq \{0\}$ es separable, entonces existe una base Hilbertiana numerable.*

Demostración. Supongamos que $\dim E = \infty$, el otro caso ya está conocido. Sea $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ denso en E. Sea n_1 el primer índice tal que $x_{n_1} \neq 0$. Si hemos definido $n_1, n_2, \dots, n_k$ entonces sea n_{k+1} el primer índice tal que $x_{n_{k+1}} \notin [x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}]$. Definimos $y_k := x_{n_k}$. Entonces $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ es un conjunto linealmente independiente tal que $[x_1, x_2, \dots] = [y_1, y_2, \dots]$, y por eso $E = \overline{[y_1, y_2, \dots]}$.

Definimos $z_1 := y_1$ y $e_1 := z_1/\|z_1\|$. Si hemos definido $e_1, e_2, \dots, e_k$, entonces definimos $z_{k+1} := y_{k+1} - \sum_{i=1}^k (y_{k+1}, e_i) e_i$ (la proyección ortogonal de y_{k+1} sobre $[e_1, e_2, \dots, e_k]^\perp$). Como $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ es linealmente independiente, $z_{k+1} \neq 0$. Definimos $e_{k+1} := z_{k+1}/\|z_{k+1}\|$. Es claro que $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ es un sistema ortonormal numerable en E. También es claro que $[e_1, e_2, \dots] = [y_1, y_2, \dots]$, y por eso $E = \overline{[e_1, e_2, \dots]}$. Ahora finalizamos con el Lema 1.40. □

1.2.4. Operadores Adjuntos

1.45 Lema. *Para todo $x \in E$ se cumple*

$$\|x\| = \sup\{\, |(x, y)| \mid y \in B_1 \,\}.$$

Demostración. Es claro que $\sup\{\, |(x, y)| \mid y \in B_1 \,\} \leq \|x\|$. Por otro lado, si $x \neq 0$ entonces $x/\|x\| \in B_1$ y $\|x\| = (x, x/\|x\|) \leq \sup\{\, |(x, y)| \mid y \in B_1 \,\}$. □

1.46 Proposición. *Para todo $A \in \mathcal{L}(E)$ existe precisamente un $A^* \in \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \qquad \textit{para todo } x, y \in E. \tag{1.18}$$

La aplicación $A \mapsto A^*$ es un automorfismo isométrico de $\mathcal{L}(E)$.

Demostración. Fijamos $A \in \mathcal{L}(E)$. Sea $\Gamma\colon E' \to E$ el isomorfismo isométrico dado en la Nota 1.35. Definimos $\Lambda\colon E \to E'$ por $\Lambda(y)(x) := (Ax, y)$. Es claro que Λ es lineal. Ponemos $A^* := \Gamma\Lambda$, un operador lineal que cumple (1.18). Fácilmente se demuestra que éste es el único operador lineal que cumple (1.18). En seguida, el mapeo $A \mapsto A^*$ es lineal.

Usando el Lema 1.45, calculamos

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{\, \|Ax\| \mid x \in B_1 \,\} \\
&= \sup\{\, (Ax, y) \mid x, y \in B_1 \,\} \\
&= \sup\{\, (x, A^*y) \mid x, y \in B_1 \,\} \\
&= \sup\{\, \|A^*y\| \mid y \in B_1 \,\} \\
&= \|A^*\|.
\end{aligned}$$

Por eso $A \mapsto A^*$ es isométrico y inyectivo. Como $A^{**} = A$, $A \mapsto A^*$ también es suprayectivo. □

1.47 Definición. A^* se llama el *operador adjunto* de A.

1.48 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{L}(E)$. Entonces se cumplen:*

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp &= \mathcal{N}(A^*), & \overline{\mathcal{R}(A)} &= \mathcal{N}(A^*)^\perp, \\
(\overline{\mathcal{R}(A^*)})^\perp &= \mathcal{N}(A), & \overline{\mathcal{R}(A^*)} &= \mathcal{N}(A)^\perp.
\end{aligned}$$

Demostración. Primero demostremos $(\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp = \mathcal{N}(A^*)$. Usando la Proposición 1.30(b) se obtienen las equivalencias: $x \in (\overline{\mathcal{R}(A)})^\perp \;\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{R}(A)^\perp \;\Leftrightarrow\; \forall y \in E\colon (x, Ay) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in E\colon (A^*x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{N}(A^*)$.

La identidad $(\overline{\mathcal{R}(A)}) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$ se sigue de la primera identidad usando la Proposición 1.30(d). Las otras identidades se siguen de las primeras dos porque $A^{**} = A$. □

1.49 Nota. Si $A \in \mathcal{L}(E)$ tiene rango cerrado, entonces la Proposición 1.48 implica que la ecuación

$$Ax = y$$

tiene una solución si y sólo si $y \in \mathcal{N}(A^*)^\perp$. Particularmente tiene una solución para todo $y \in E$ si y sólo si $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$. Si A es simétrico (es decir $A^* = A$) y inyectivo, y si además tiene rango cerrado, A es biyectivo.

1.3. Dos Principios Fundamentales

1.3.1. El Teorema de la Gráfica Cerrada

1.50 Definición. Un subconjunto de un espacio métrico es *denso en ninguna parte* si su cierre no contiene ningún punto interior. Un espacio métrico es de *primera categoría (de Baire)* si es una unión numerable de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte. Un espacio métrico es de *segunda categoría (de Baire)* si no es de primera categoría.

1.51 Teorema (Lema de Baire)**.** *Un espacio métrico completo $X \neq \varnothing$ es de segunda categoría: Si $A_n \subseteq X$ son cerrados y si*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1.19}$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(A_n) \neq \varnothing$*.*

Demostración. Supongamos que $A_n \subseteq X$ son cerrados, cumplen (1.19) y que $\operatorname{int}(A_n) = \varnothing$ para todo n. Entonces $X \backslash A_n \neq \varnothing$ es abierto y denso en X para todo $n \in \mathbb{N}$. Escogemos $x_1 \in X \backslash A_1$ y $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(x_1) \subseteq X \backslash A_1$. Escogemos $x_2 \in U_{r_1}(x_1) \backslash A_2$ y $r_2 \in (0, r_1/2]$ tal que $B_{r_2}(x_2) \subseteq U_{r_1}(x_1) \backslash A_2$. Siguiendo en esta manera obtenemos dos sucesiones (x_n) y (r_n) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq U_{r_n}(x_n) \backslash A_{n+1}, \qquad r_{n+1} \in (0, r_n/2].$$

Se sigue que

$$x_n \in B_{r_m}(x_m) \subseteq X \backslash A_m \qquad \text{para todo } n \geq m \geq 1. \tag{1.20}$$

Para $n \geq m$ tenemos

$$d(x_m, x_n) \leq r_m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} r_1 \to 0 \qquad \text{como } m \to \infty.$$

Por eso (x_n) es una sucesión de Cauchy que converge a un $x \in X$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ (1.20) implica que $x \notin A_m$. Entonces $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, en contradicción con (1.19). $\square$

Notación. Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $A, B \subseteq E$. Denotamos

$$\begin{aligned} x + A &:= \{\, x + y \mid y \in A \,\}, \\ \alpha A &:= \{\, \alpha y \mid y \in A \,\}, \\ A + B &:= \{\, y + z \mid y \in A,\ z \in B \,\}. \end{aligned}$$

A es *convexo* si $(1-t)x + ty \in A$ para todo $x, y \in A$ y $t \in [0,1]$.

1.52 Lema. *Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y sean $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $A, B \subseteq E$. Se cumple:*

(a) *Si A es abierto, entonces $x + A$ y $A + B$ son abiertos.*

(b) *Si A es abierto, entonces αA es abierto.*

(c) $2A \subseteq A + A$

(d) *Si F es un espacio vectorial, $L\colon E \to F$ lineal, y A convexo, entonces $L(A)$ es convexo.*

(e) *Si* A *es convexo, entonces* $\overline{A}$ *es convexo.*

(f) *Si* A *es convexo, entonces* $2A = A + A$.

1.53 Teorema (de la aplicación abierta)**.** *Sean* E, F *espacios de Banach y sea* $L \in \mathcal{L}(E, F)$ *suprayectivo. Entonces* L *es una aplicación abierta, es decir,* $L(U)$ *es abierto en* F *para todo subconjunto abierto* U *de* E.

Demostración. Primero demostraremos que existe $r > 0$ tal que

$$B_r F \subseteq \overline{L(B_1 E)}. \tag{1.21}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ ponemos $A_n := \overline{L(B_n E)}$. Como L es suprayectivo, tenemos que

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y el Teorema 1.51 implica que existe n_0 tal que $\operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$. Como $A_{n_0} = n_0 A_1$ Lema 1.52(b) implica que también

$$\operatorname{int}(A_1) = \operatorname{int}\left(\frac{1}{n_0} A_{n_0}\right) = \frac{1}{n_0} \operatorname{int}(A_{n_0}) \neq \varnothing$$

y que existen $y_0 \in F$ y $r > 0$ tal que $B_{2r}(y_0; F) \subseteq A_1$. Existe una sucesión $(x_n) \subseteq B_1 E$ tal que $Lx_n \to y_0$ cuando $n \to \infty$. Como $-x_n \in B_1 E$ para todo n también $L(-x_n) \in A_1$ y $-y_0 = \lim_{n\to\infty} L(-x_n) \in A_1$. Entonces

$$B_{2r} F = B_{2r}(0; F) = -y_0 + B_{2r}(y_0; F) \subseteq A_1 + A_1. \tag{1.22}$$

Por el Lema 1.52(d) y (e), A_1 es convexo. Usando el Lema 1.52(f) se sigue por (1.22) que $B_{2r} F \subseteq 2A_1$ y entonces (1.21).

En la segunda etapa demostraremos que con r dado en (1.21) se cumple

$$B_{r/2} F \subseteq L(B_1 E). \tag{1.23}$$

Fijamos $y \in B_{r/2} F$. Entonces (1.21) implica que existe $z_1 \in B_{1/2} E$ tal que $\|y - Lz_1\| \leq r/4$. Usando (1.21) otra vez obtenemos $z_2 \in B_{1/4} E$ tal que $\|y - Lz_1 - Lz_2\| \leq r/8$. Siguiendo en esta manera obtenemos una sucesión $(z_n) \subseteq E$ tal que

$$\|z_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} Lz_k \right\| \leq r \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \tag{1.24}$$

Ponemos $x_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$. Por tanto

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 1.$$

Además para $n \geq m$

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Entonces x_n converge a un $x \in B_1 E$. Usando (1.24) se verifica que $y = Lx \in L(B_1 E)$. Eso finaliza la prueba de (1.23).

En el último paso supongamos que $U \subseteq E$ es abierto. Dado un $y \in L(U)$ existe $x \in U$ tal que $y = Lx$. Como U es abierto, el Lema 1.52(a) implica que existe $t > 0$ tal que $x + B_t E \subseteq U$. De (1.23) se sigue que $B_{tr/2} F \subseteq L(B_t E)$. Entonces $y + B_{tr/2} F \subseteq y + L(B_t E) = L(x + B_t E) \subseteq L(U)$, y $y + B_{tr/2}$ es una vecindad de y. Como $y \in L(U)$ fue arbitrario, $L(U)$ es abierto. □

1.54 Corolario. *Un operador lineal biyectivo y continuo entre dos espacios de Banach es un isomorfismo (es decir que la inversa también es continua).*

1.55 Corolario. *Sea E un espacio vectorial con dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ tal que los espacios normados $E_1 := (E, \|\cdot\|_1)$ y $E_2 := (E, \|\cdot\|_2)$ son completos. Supongamos que existe $C_1 \geq 0$ tal que $\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1$ para todo $x \in E$. Entonces las dos normas son equivalentes.*

Demostración. El operador $\mathrm{id}\colon E_1 \to E_2$ es biyectivo y continuo. Por Corolario 1.54 también $\mathrm{id}\colon E_2 \to E_1$ es continuo, es decir, existe $C_2 \geq 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$ para todo $x \in E$. □

1.56 Definición. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación. El conjunto

$$\{\, (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \,\}$$

se llama *la gráfica de f*.

1.57 Notas. Sean X, Y espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una aplicación.

(a) Son equivalentes

  (i) La gráfica de f es cerrada en $X \times Y$.

  (ii) Si $x_n \to x$ en X y $f(x_n) \to y$ en Y entonces $y = f(x)$.

(b) Si f es continuo entonces la gráfica de f es cerrada en $X \times Y$.

1.58 Teorema (Gráfica Cerrada)**.** *Sean E, F dos espacios de Banach. Sea $L\colon E \to F$ un operador lineal tal que L tiene gráfica cerrada en $E \times F$. Entonces L es acotado.*

Demostración. Definimos una otra norma en E:

$$\|x\|_2 := \|x\|_E + \|Lx\|_F \qquad \forall x \in E.$$

Esta norma se llama *norma de la gráfica.*

Demostraremos que $E_2 := (E, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E_2. Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy en E y (Lx_n) es una sucesión de Cauchy en F por la definición de $\|\cdot\|_2$. Como E y F son completos, existen $x \in E$ y $y \in F$ tal que $x_n \to x$ en E y $Lx_n \to y$ en F. Como la gráfica de L es cerrada, la Nota 1.57(a) implica que $Lx = y$ y $\|x_n - x\|_2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, (x_n) converge a x en E_2.

Como $\|x\|_E \leq \|x\|_2$ para todo $x \in E$, y como E y E_2 son completos, Corolario 1.55 implica que existe $C \geq 1$ tal que $\|x\|_2 \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$, es decir, $\|Lx\|_F \leq (C-1)\|x\|_E$ para todo $x \in E$. $\square$

1.59 Teorema. *Sea E un espacio de Hilbert y $A\colon E \to E$ un operador lineal simétrico. Entonces A es continuo.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ en E. Para todo $z \in E$ se cumple $(z, Ax_n) \to (z, y)$ y $(z, Ax_n) = (Az, x_n) \to (Az, x) = (z, Ax)$. Entonces $(z, Ax) = (z, y)$ para todo $z \in E$, es decir, $Ax = y$. Por Nota 1.57(a) la gráfica de A es cerrada, y A es continuo por el Teorema 1.58. $\square$

1.3.2. El Principio de Acotación Uniforme

1.60 Teorema (Principio de Acotación Uniforme)**.** *Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado, y sea $(L_j)_{j\in J}$ una familia de operadores en $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $\sup_{j\in J}\|L_j x\|_F \leq \infty$ para todo $x \in E$. Entonces $\sup_{j\in J}\|L_j\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$, es decir, la familia es acotada uniformemente en $\mathcal{L}(E,F)$.*

Demostración. Definimos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \{\, x \in E \mid \forall j \in J\colon \|L_j x\|_F \leq n \,\} = \bigcap_{j\in J} \{\, x \in E \mid \|L_j x\|_F \leq n \,\}.$$

Como todos L_j son continuos, A_n es cerrado. Por la hipótesis se obtiene

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

El Teorema 1.51 implica que existe n_0 tal que $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \varnothing$. Entonces obtenemos $x_0 \in E$ y

$r > 0$ tal que $x_0 + B_r E \subseteq A_{n_0}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\|L_j\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup\{\, \|L_j x\|_F \mid \|x\|_E \leq 1 \,\} \\
&= \frac{1}{r} \sup\{\, \|L_j x\|_F \mid \|x\|_E \leq r \,\} \\
&\leq \frac{1}{r} \sup\{\, \|L_j x\|_F \mid x \in -x_0 + A_{n_0} \,\} \\
&= \frac{1}{r} \sup\{\, \|L_j (x - x_0)\|_F \mid x \in A_{n_0} \,\} \\
&\leq \frac{1}{r} (\sup\{\, \|L_j x\|_F \mid x \in A_{n_0} \,\} + \|L_j x_0\|_F) \\
&\leq \frac{2n_0}{r},
\end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. □

1.61 Teorema (Banach-Steinhaus)**.** *Sean E, F espacios de Banach y sea (L_n) una sucesión de operadores en $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(I) *$(L_n x)$ converge en F para todo $x \in E$,*

(II) *$\|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ es acotado y $(L_n x)$ converge para todo x en un subconjunto denso de E.*

En este caso definimos el operador $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$. Se cumple $L \in \mathcal{L}(E,F)$ y $\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demostración. **(I) implica (II):** Por convergencia $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n x\| < \infty$ para todo $x \in E$. El Teorema 1.60 implica que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$. Como subconjunto denso uno puede tomar E.

(II) implica (I): Sea X un subconjunto denso de E tal que $L_n x$ converge para todo $x \in X$. Ponemos $C := \sup \|L_n\|$. Demostraremos que $L_n(x)$ converge para todo $x \in E$. Para eso, fijamos $x \in E$ y una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe k tal que $\|x - x_k\| \leq \varepsilon/(3C)$ y n_0 tal que $\|L_m(x_k) - L_n(x_k)\| \leq \varepsilon/3$ para todo $m, n \geq n_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|L_m(x) - L_n(x)\| \leq \|L_m(x) - L_m(x_k)\| + \|L_m(x_k) - L_n(x_k)\| + \|L_n(x_k) - L_n(x)\| \\
\leq C\|x - x_k\| + \varepsilon/3 + C\|x - x_k\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $m, n \geq n_0$, es decir, $L_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en F y converge.

Supongamos que se cumplen (I) y (II) y definimos $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ para $x \in E$. Por la continuidad de las operaciones se sigue que L es un operador lineal. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} \|L_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|$. Se sigue que $\|Lx\| = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|L_n\| \, \|x\|$, es decir, $L \in \mathcal{L}(E,F)$ y $\|L\| \leq \lim_{n\to\infty} \|L_n\|$. □

1.4. Operadores Compactos

1.4.1. Conjuntos Compactos

1.62 Notas. (a) En espacios métricos compacidad y compacidad secuencial (toda sucesión tiene una subsucesión convergente) son equivalentes.

(b) Un subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado.

(c) Un subconjunto compacto de un espacio normado es acotado.

1.63 Lema. *Sea E un espacio normado. Si $B_1 E$ es compacto, entonces* $\dim E < \infty$.

Demostración. Supongamos que $\dim E = \infty$, y construyamos una sucesión $(x_n) \subseteq S_1$ que no tiene subsucesión convergente. Esto implicará que $B_1 E$ no es compacto.

Sea $x_1 \in S_1$. Si ya están construidos los elementos $x_1, x_2, \dots, x_k$, entonces definimos $F := [x_1, x_2, \dots, x_k]$. Como $\dim E = \infty$, existe $y \in E \backslash F$. Denotamos $\mu := \operatorname{dist}(y, F) = \operatorname{ínf}_{z \in F} \|y - z\|$. Sea $(z_n) \subseteq F$ tal que $\|y - z_n\| \to \operatorname{dist}(y, F)$. Tenemos que $\|z_n\| \leq \|y - z_n\| + \|y\| \to \mu + \|y\|$ cuando $n \to \infty$, es decir que (z_n) es acotado. Pasando a una subsucesión, tenemos que $z_n \to z \in F$ (¡$\dim F < \infty$!). Por tanto, $\|y - z\| = \mu > 0$, y definimos $x_{k+1} := (y - z)/\mu \in S_1$. Obtenemos

$$\|x_{k+1} - x_l\| = \frac{\|y - z - \mu x_l\|}{\mu} \geq \frac{\operatorname{dist}(y, F)}{\mu} = 1 \qquad \text{para } l \in \{1, 2, \dots, k\} \tag{1.25}$$

porque $z + \mu x_l \in F$.

Usando (1.25), se sigue que $\|x_k - x_l\| \geq 1$ para $k \neq l$. Esto demuestra que (x_k) no contiene subsucesión de Cauchy, es decir, no contiene subsucesión convergente. $\square$

1.64 Definición. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *compacto relativamente* si $\overline{A}$ es compacto.

1.65 Lema. *Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es compacto relativamente si y sólo si*

(1.26) *toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge en X.*

Demostración. Si $\overline{A}$ es compacto, entonces toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge en $\overline{A}$, es decir en X. Se sigue (1.26).

Ahora supongamos (1.26). Sea $(x_n) \subseteq \overline{A}$. Para todo n existe $y_n \in A$ tal que $d(x_n, y_n) \leq 1/n$. Pasando a una subsucesión supongamos que $y_n \to y \in X$ cuando $n \to \infty$. Como $(y_n) \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es cerrado, tenemos $y \in \overline{A}$. Además

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq \frac{1}{n} + d(y_n, y) \to 0,$$

es decir, $x_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Se sigue que $\overline{A}$ es compacto. $\square$

1.66 Lema. *Sean X, Y espacios métricos, $A \subseteq X$ compacto relativamente y $f\colon X \to Y$ continuo. Entonces $f(A)$ es compacto relativamente.*

Demostración. Sea $(y_n) \subseteq f(A)$. Existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $f(x_n) = y_n$ para todo n. Pasando a una subsucesión, por el Lema 1.65 existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Como f es continuo, $y_n = f(x_n) \to f(x)$. En seguida $f(A)$ cumple (1.26) y es compacto relativamente por el Lema 1.65. □

1.67 Definición. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es *precompacto* (o *totalmente acotado*) si para todo $\varepsilon > 0$ existen puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_\varepsilon(x_k).$$

1.68 Lema. *Sean X un espacio métrico completo y $A \subseteq X$. Entonces A es compacto relativamente si y sólo si A es precompacto.*

Demostración. Sea A compacto relativamente, y sea $\varepsilon > 0$. Como $\overline{A}$ es compacto, entonces existen elementos $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tal que la unión de las bolas $U_\varepsilon(x_k)$ cubren $\overline{A}$ y entonces A.

Sea A precompacto, y sea $(y_n) \subseteq A$. Existe una cubierta de A por un número finito de bolas $B_1(x_k)$. Pasando a una subsucesión y reordenando los elementos x_k, podemos suponer que $(y_n) \subseteq B_1(x_1)$. Siguiendo con este proceso para bolas con radio $1/2, 1/3, \ldots$, por selección diagonal obtenemos una subsucesión de (y_n) que es de Cauchy. Como X es completo, esta subsucesión converge en X.

Hemos probado (1.26), y por el Lema 1.65 concluimos. □

1.4.2. Caracterización de Operadores Compactos

1.69 Definición. Sean E, F espacios normados. Un operador lineal $K\colon E \to F$ es *compacto* si la imagen de un conjunto acotado en E bajo K es compacto relativamente en F.

1.70 Lema. *Sean E, F espacios de Banach y $K\colon E \to F$ lineal.*

(a) *Si K es compacto, también es continuo.*

(b) *K es compacto si y sólo si (Kx_n) contiene una subsucesión convergente en F para toda sucesión acotada $(x_n) \subseteq E$.*

(c) *La identidad en E es compacta si y sólo si E tiene dimensión finita.*

(d) *La composición de un operador compacto con un operador continuo es compacta.*

(e) *El conjunto de los operadores lineales compactos es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. **(a)** $\overline{K(B_1E)}$ es compacto y entonces acotado, por la Nota 1.62(c).

(b) Sea K compacto y sea (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces (Kx_n) es compacto relativamente en F. El Lema 1.65 dice que (Kx_n) contiene una sucesión convergente. Inversamente, sea $A \subseteq E$ acotado y $(y_n) \subseteq K(A)$. Entonces existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $y_n = Kx_n$ para todo n. Como (x_n) es acotado, (y_n) contiene una subsucesión convergente. Eso se cumple para todas sucesiones en $K(A)$, es decir que $K(A)$ es compacto relativamente por el Lema 1.65. En consecuencia K es compacto.

(c) Si E tiene dimensión finita, por el Teorema 1.11(a) la bola B_1E es compacta. Eso implica que también id_E es un operador compacto. Inversamente, supongamos que id_E es compacto. En consecuencia, B_1E es compacto. Por el Lema 1.63 E tiene dimensión finita.

(d) Sea G un espacio normado y sea K compacto. Si $L \in \mathcal{L}(G, E)$ entonces $K \circ L$ es compacto: La imagen $L(A)$ de un conjunto acotado $A \subseteq G$ es acotada. Por eso $K(L(A))$ es compacto relativamente. Si $L \in \mathcal{L}(F, G)$ entonces $L \circ K$ es compacto: La imagen $K(A)$ de un conjunto acotado $A \subseteq E$ es compacta relativamente en F. Como L es continuo, el Lema 1.66 dice que $L(K(A))$ es compacto relativamente en G.

(e) Sean $K_1, K_2 \colon E \to F$ compactos, y sea $(x_n) \subseteq E$ acotado. Entonces, pasando a una subsucesión, (K_1x_n) y $K_2(x_n)$ convergen, por el inciso (b). Luego $(K_1 + K_2)(x_n) = K_1x_n + K_2x_n$ converge, es decir, $K_1 + K_2$ es compacto, otra vez por el inciso (b). Probar que αK es compacto para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $K \colon E \to F$ compacto es similar. $\square$

1.71 Ejemplos. (a) Sean E, F espacios normados y $K \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\dim \mathcal{R}(K) < \infty$. Entonces K es compacto.

(b) La inclusión $C^1[0,1] \hookrightarrow C[0,1]$ es compacta: Si $(u_n) \subseteq C^1[0,1]$ es una sucesión acotada, es decir,
$$\|u_n\|_{C^1[0,1]} := \|u_n\|_\infty + \|u_n'\|_\infty$$
es acotada, entonces u_n es acotada en $C[0,1]$ uniformemente. Además, como u_n' es acotado uniformemente, (u_n) es una familia equicontinua. Por el teorema de Arzelá-Ascoli, (u_n) contiene una subsucesión convergente en $C[0,1]$. La compacidad de la inclusión se sigue del Lema 1.70(b).

(c) Sea $k \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Definimos un operador lineal $K \colon C[0,1] \to C[0,1]$ por
$$(Ku)(t) := \int_0^1 k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$
Entonces K es bien definido y compacto: Sea $(u_n) \subseteq C[0,1]$ una sucesión acotada. Existe $C \geq 0$ tal que $\|u_n\|_\infty \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como k es uniformemente continuo existe $\delta > 0$ tal que
$$|k(t_1, s_1) - k(t_2, s_2)| \leq \varepsilon / C$$

si $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [0,1]$ y $|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| \leq \delta$. En consecuencia, se sigue para todo $t_1, t_2 \in [0,1]$ con $|t_1 - t_2| \leq \delta$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$|(Ku_n)(t_1) - (Ku_n)(t_2)| \leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)|\,|u_n(s)|\,\mathrm{d}s \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{C}\,C\,\mathrm{d}s = \varepsilon,$$

es decir, $Ku_n \in C[0,1]$ y (Ku_n) es una familia equicontinua. Además,

$$|(Ku_n)(t)| \leq \int_0^1 \|k\|_\infty C\,\mathrm{d}s = \|k\|_\infty C$$

para todo $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, es decir, (Ku_n) es acotada en $C[0,1]$. Por el teorema de Arzelá-Ascoli (Ku_n) contiene una subsucesión convergente en $C[0,1]$.

1.4.3. Operadores Compactos en Espacios de Hilbert

1.72 Definición. Sea E un espacio de Hilbert. Una sucesión $(x_n) \subseteq E$ *converge débilmente* a $x \in E$ si $(x_n, y) \to (x, y)$ para todo $y \in E$. En este caso usamos la notación $x_n \rightharpoonup x$.

1.73 Nota. A veces también decimos que x_n *converge originalmente* a x si $x_n \to x$ en E.

1.74 Proposición. (a) *Una sucesión convergente débilmente tiene sólo un límite débil.*

(b) *Una sucesión convergente originalmente converge débilmente, con el mismo límite.*

(c) *Un operador lineal acotado entre dos espacios de Hilbert preserve convergencia débil de sucesiones.*

(d) *Una sucesión convergente débilmente en un espacio de Hilbert es acotada.*

(e) *Una sucesión acotada en un espacio de Hilbert contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Sean E y F espacios de Hilbert. **(a):** Sean x^*, x^{**} dos límites débiles de una sucesión convergente débilmente (x_n) en E. Para todo $y \in E$ se sigue que

$$(x^* - x^{**}, y) = (x^*, y) - (x^{**}, y) = \lim_{n\to\infty}\big((x_n, y) - (x_n, y)\big) = 0,$$

es decir, $x^* = x^{**}$.

(b): Supongamos que $x_n \to x^*$ en E. Para todo $y \in E$ se sigue que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x^*, y)$ por la continuidad del producto escalar.

(c): Sean $L \in \mathcal{L}(E, F)$ y $x_n \rightharpoonup x^*$ en E. Para $z \in F$ definimos $g_z \in E'$ por $g_z(x) := (Lx, z)$. Por el Teorema de Fréchet-Riesz existe $y \in E$ tal que $f_y(x) = (x, y) = g_z(x) = (Lx, z)$ para todo $x \in E$. En consecuencia,

$$(Lx_n, z) = (x_n, y) \to (x^*, y) = (Lx^*, z)$$

cuando $n \to \infty$. $z \in F$ siendo arbitrario, ésto dice que $Lx_n \rightharpoonup Lx^*$ en F.

(d): Definimos $f_n := (x_n, \cdot) \in E'$. Entonces $f_n(y)$ converge para todo $y \in E$. Por el Teorema 1.61 $\|f_n\|$ es acotada, y por la Proposición 1.26(d) $\|x_n\| = \|f_n\|$ es acotada.

(e): Primero sea E separable. Entonces existe $(y_k) \subseteq E$ densa. Para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $((x_n, y_k))_n$ es acotada en $\mathbb{R}$. Para $k = 1$ seleccionamos una subsucesión (x_n^1) de (x_n) tal que (x_n^1, y_1) converge en $\mathbb{R}$. Después seleccionamos una subsucesión (x_n^2) de (x_n^1) tal que (x_n^2, y_2) converge en $\mathbb{R}$. Siguiendo con eso, para todo $k \in \mathbb{N}$ obtenemos una subsucesión de (x_n) tal que (x_n^k, y_k) converge en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$. Definimos la subsucesión (z_n) de (x_n) por $z_n := x_n^n$ (proceso diagonal). Entonces (z_n, y_k) converge en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además (z_n) es acotada.

Definimos $f_n \in E'$ por $f_n := (z_n, \cdot)$. Entonces $\|f_n\| = \|z_n\| \leq C$ con una constante $C \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. También $f_n(y_k)$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$. El Teorema 1.61 implica que $f_n(y)$ converge para todo $y \in E$ a un elemento $f \in E'$. El teorema de Fréchet-Riesz nos garantiza la existencia de $z \in E$ tal que $f = (z, \cdot)$. Con eso concluimos porque $(z_n, y) = f_n(y) \to f(y) = (z, y)$ cuando $n \to \infty$ para todo $y \in E$.

Si E es un espacio de Hilbert general (es decir no separable), entonces definimos $F := \overline{[x_1, x_2, \dots]}$. Como en la demostración del Teorema 1.44 se construye una base Hilbertiana numerable para F. En la Tarea 3, Nº 6, se demostró que en este caso F es separable. Por la primera parte existe una subsucesión (z_n) de (x_n) que converge débilmente en F. Sea P la proyección ortogonal sobre F. Para todo $y \in E$ se sigue que

$$(z_n, y) = (Pz_n, y) = (z_n, Py) \to (z, Py) = (Pz, y) = (z, y)$$

cuando $n \to \infty$. Esto finaliza la demostración. $\square$

1.75 Ejemplo. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal numerable en E, entonces $x_n \rightharpoonup 0$ cuando $n \to \infty$: Sea $y \in E$. La Proposición 1.38(a) implica que la series $\sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n)|^2$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces $(y, x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, si $m \neq n$ se sigue que

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|x_m\|^2 + \|x_n\|^2 = 2.$$

Entonces (x_n) no contiene una subsucesión de Cauchy. Por eso tampoco contiene una subsucesión convergente originalmente.

1.76 Proposición. *Sean E, F espacios de Hilbert. Entonces K es compacto si y sólo si (Kx_n) converge en F para todas sucesiones (x_n) débilmente convergentes en E. En este caso, $Kx_n \to Kx$ si $x_n \rightharpoonup x$.*

Demostración. Sea K compacto y supongamos que $x_n \rightharpoonup x$ en E. Asumimos por contradicción que $Kx_n \not\to Kx$. Pasando a una subsucesión supongamos que existe $r > 0$ tal que

$$\|Kx_n - Kx\| \geq r \qquad \text{para todo } n. \tag{1.27}$$

Utilizaremos la Proposición 1.74. Como (x_n) es acotada y K es compacto, podemos pasar a una subsucesión tal que $Kx_n \to y$. Como $Kx_n \rightharpoonup Kx$, se sigue que $y = Kx$. En seguida $Kx_n \to Kx$, una contradicción a (1.27). En consecuencia, $Kx_n \to Kx$ en F.

Inversamente, sea (x_n) una sucesión acotada en E. Por la Proposición 1.74(e), pasando a una subsucesión podemos suponer que (x_n) es débilmente convergente. Entonces (Kx_n) converge en F por la hipótesis. En consecuencia, toda sucesión acotada en E contiene una subsucesión tal que (Kx_n) converge en F. Por el Lema 1.70(b) K es compacto. □

1.77 Proposición. *Sea E un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto. Entonces K^* es compacto.*

Demostración. Sea $x_n \rightharpoonup x$ una sucesión débilmente convergente en E. Por la Proposición 1.76 $K^*x_n \rightharpoonup K^*x$. Como K es compacto, $KK^*x_n \to KK^*x$ en E. Se sigue que

$$\begin{aligned}\|K^*x_n - K^*x\|^2 &= (K^*x_n - K^*x, K^*x_n - K^*x)\\ &= (KK^*x_n - KK^*x, x_n - x)\\ &\leq \|KK^*x_n - KK^*x\|\,\|x_n - x\|\\ &\to 0\end{aligned}$$

porque $\|x - x_n\|$ es acotada uniformemente por la Proposición 1.74(d). Concluimos usando la Proposición 1.76 otra vez. □

1.4.4. La Teoría de Riesz-Fredholm

1.78 Lema. *Sean E un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(E)$. Supongamos que existen subespacios cerrados E_n de E y escalares λ_n, $n \in \mathbb{N}$, tales que se cumplen:*

$$\bar{\lambda} := \inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| > 0, \tag{1.28}$$

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3 \subsetneq \dots, \tag{1.29}$$

y

$$(\lambda_n I - K)(E_n) \subseteq E_{n-1} \qquad \textit{para todo } n \geq 2. \tag{1.30}$$

Entonces K no es compacto.

Demostración. Como E_n es un espacio de Hilbert, $E_n = E_{n-1} \oplus E_{n-1}^{\perp_{E_n}}$, donde $\perp_{E_n}$ denota el suplemento ortogonal en E_n. Como $E_{n-1} \subsetneq E_n$, es claro que $E_{n-1}^{\perp_{E_n}} \neq \{0\}$. Podemos escoger $x_n \in E_{n-1}^{\perp_{E_n}} = E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ con $\|x_n\| = 1$, para $n \geq 2$. Si $n > m$ entonces

$$Kx_m - Kx_n = \underbrace{(\lambda_n I - K)x_n - (\lambda_m I - K)x_m + \lambda_m x_m}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\lambda_n x_n}_{\in E_{n-1}^{\perp}}.$$

Usando $\|x_n\| = 1$ se sigue que $\|Kx_m - Kx_n\| \geq \bar{\lambda}$ para todo $m \neq n$, $m, n \geq 2$, es decir, (Kx_n) no contiene una subsucesión de Cauchy. Como (x_n) es una sucesión acotada, K no puede ser compacto. □

1.79 Teorema. *Sea E un espacio de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto. Se cumplen:*

(a) $\dim \mathcal{N}(I-K) < \infty$,

(b) $\mathcal{R}(I-K)$ *es cerrado,*

(c) $\mathcal{R}(I-K) = \mathcal{N}(I-K^*)^\perp$,

(d) $\mathcal{N}(I-K) = \{0\}$ *si y sólo si* $\mathcal{R}(I-K) = E$,

(e) $\dim \mathcal{N}(I-K) = \dim(\mathcal{R}(I-K)^\perp) = \dim \mathcal{N}(I-K^*)$.

Demostración. **(a)** Para todo $x \in \mathcal{N}(I-K)$ se cumple $Kx = x$. Entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{N}(I-K)} = K|_{\mathcal{N}(I-K)}$ es compacto. La afirmación se sigue de 1.70(c).

(b) Demostraremos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|(I-K)x\| \geq \alpha \|x\| \tag{1.31}$$

para todo $x \in \mathcal{N}(I-K)^\perp$ porque en este caso el Lema 1.36(a) implica que $\mathcal{R}(I-K)$ es cerrado. Si no, entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq S_1\mathcal{N}(I-K)^\perp$ tal que $\|(I-K)x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como K es compacto y (x_n) acotado, pasando a una subsucesión supongamos que $Kx_n \to y$ en E. En consecuencia también $x_n \to y$ en E y $\|y\| = 1$. Como K es continuo, se sigue que $Ky = y$, es decir, $y \in S_1\mathcal{N}(I-K)$. Pero como $x_n \in S_1\mathcal{N}(I-K)^\perp$ se sigue que $\|x_n - y\| = \sqrt{2}$ para todo n, una contradicción. **(c)** Eso se sigue de (b) y de la Proposición 1.48.

(d) Supongamos que $\mathcal{N}(I-K) \neq \{0\}$ y que $\mathcal{R}(I-K) = E$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := \mathcal{N}((I-K)^n)$, que es un espacio cerrado. Es claro que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe $x_1 \in E_1 \backslash \{0\}$. Como $I-K$ es suprayectivo, existe una sucesión (x_n) tal que $(I-K)x_{n+1} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$(I-K)^n x_{n+1} = x_1 \neq 0 \qquad \text{pero} \qquad (I-K)^{n+1} x_{n+1} = 0.$$

Entonces $x_{n+1} \in E_{n+1} \backslash E_n$ y se cumple (1.29). Con $\lambda_n := 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ también se cumplen (1.28) y (1.30). Como K es compacto obtenemos una contradicción con el Lema 1.78, es decir que $\mathcal{R}(I-K) = E$ implica que $\mathcal{N}(I-K) = \{0\}$.

Por otro lado, si $\mathcal{N}(I-K) = \{0\}$, entonces por la Proposición 1.48 $\mathcal{R}(I-K^*) = \mathcal{N}(I-K)^\perp = E$. Lo que ya hemos demostrado para K también se cumple para K^* porque por La Proposición 1.77 K^* es compacto. Entonces $\mathcal{N}(I-K^*) = \{0\}$ y en consecuencia $\mathcal{R}(I-K) = \mathcal{N}(I-K^*)^\perp = E$.

(e) Primero demostraremos

$$\dim \mathcal{N}(I-K) \geq \dim \mathcal{R}(I-K)^\perp. \tag{1.32}$$

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $\dim \mathcal{N}(I-K) < \dim \mathcal{R}(I-K)^\perp$. Entonces existe $A \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(I-K), \mathcal{R}(I-K)^\perp)$ inyectivo pero no suprayectivo. Extendamos A a un operador en $\mathcal{L}(E, \mathcal{R}(I-K)^\perp)$ poniendo $Ax = 0$ para $x \in \mathcal{N}(I-K)^\perp$. En efecto, si P es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{N}(I-K)$, extendamos A por AP. Como $\mathcal{R}(AP) = A(\mathcal{N}(I-K))$ tiene dimensión finita, AP y $\widetilde{K} := K + AP$ son compactos. Sea $x \in \mathcal{N}(I-\widetilde{K})$. Se cumple

$$(I-K)x = APx \in \mathcal{R}(I-K) \cap \mathcal{R}(I-K)^{\perp} = \{0\},$$

es decir, $x \in \mathcal{N}(I-K)$. Como A es inyectivo en $\mathcal{N}(I-K)$, tenemos $x = 0$. En consecuencia, $\mathcal{N}(I-\widetilde{K}) = \{0\}$. Aplicando (d) al operador compacto $\widetilde{K}$ obtenemos $\mathcal{R}(I-\widetilde{K}) = E$. Por otro lado $\mathcal{R}(I-\widetilde{K}) \subseteq \mathcal{R}(I-K) \oplus \mathcal{R}(A) \subsetneq E$ porque $\mathcal{R}(A) \subsetneq \mathcal{R}(I-K)^{\perp}$. ¡Contradicción! Eso demuestra (1.32).

Usando la Proposición 1.48 otra vez (1.32) implica que $\dim \mathcal{N}(I-K) \geq \dim \mathcal{N}(I-K^*)$. Como K^* es compacto por 1.77, intercambiando $K = K^{**}$ y K^* se ve que también $\dim \mathcal{N}(I-K^*) \geq \dim \mathcal{N}(I-K)$. $\square$

1.80 Corolario (Alternativa de Fredholm)**.** *Sea E un espacio de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto. Se cumple exactamente una de las alternativas:*

(I) *Para todo $y \in E$ cada una de las ecuaciones*

$$x - Kx = y, \qquad x - K^*x = y$$

tiene precisamente una solución.

(II) *Las ecuaciones homogéneas*

$$x - Kx = 0, \qquad x - K^*x = 0$$

tienen soluciones no triviales. En este caso los espacios de soluciones de ambas ecuaciones son de dimensión finita igual. Para $y \in E$ la ecuación $x - Kx = y$ tiene una solución (no única) si y sólo si $(y, x) = 0$ para todo x que cumplen $x - K^*x = 0$. La ecuación $x - K^*x = y$ tiene una solución (no única) si y sólo si $(y, x) = 0$ para todo x que cumplen $x - Kx = 0$.

1.4.5. El Espectro de Operadores Compactos

1.81 Definición. Sean E un espacio de Banach y $L \in \mathcal{L}(E)$. El conjunto

$$\rho(L) := \{\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda I - L \text{ es biyectivo} \,\}$$

es el *conjunto resolvente* de L. Por Corolario 1.54 $(\lambda I - L)^{-1}$ es continuo para todo $\lambda \in \rho(L)$. La aplicación $\rho(L) \to \mathcal{L}(E)$ dada por $\lambda \to (\lambda I - L)^{-1}$ es la *resolvente* de L. El conjunto

$$\sigma(L) := \mathbb{R} \backslash \rho(L)$$

es el *espectro* de L. $\lambda \in \sigma(L)$ es un *valor propio* de L si $\mathcal{N}(\lambda I - L) \neq \{0\}$. En este caso $\mathcal{N}(\lambda I - L)$ es el *espacio propio* de L correspondiente al valor propio λ, y los elementos de $\mathcal{N}(\lambda I - L) \backslash \{0\}$ son los *vectores propios* de L correspondiente a λ. Denotemos

$$\sigma_p(L) := \{\, \lambda \in \sigma(L) \mid \mathcal{N}(\lambda I - L) \neq \{0\} \,\},$$

el *espectro punto* de L.

1.82 Proposición. *Sea E un espacio de Banach y $L \in \mathcal{L}(E)$. Entonces el espectro $\sigma(L)$ es compacto y* $\sup_{\lambda\in\sigma(L)}|\lambda| \leq \|L\|$.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ cumple $|\lambda| > \|L\|$. Entonces $\|L/\lambda\| < 1$ y por la Proposición 1.15 $I - L/\lambda$ es invertible en $\mathcal{L}(E)$. En consecuencia $\lambda I - L = \lambda(I - L/\lambda)$ es invertible, es decir, $\lambda \in \rho(L)$. Eso demuestra que $\sup_{\lambda\in\sigma(L)}|\lambda| \leq \|L\|$.

Veremos que $\rho(L)$ es abierto: Sea $\lambda_0 \in \rho(L)$. Pongamos $r := 1/\|(\lambda_0 I - L)^{-1}\|$ y demostremos que $U_r(\lambda_0) \subseteq \rho(L)$. Para eso, supongamos que $\lambda \in U_r(\lambda_0)$. Ponemos $A := \lambda_0 I - L$ y $B := \lambda I - L$. Calculamos

$$\begin{aligned} I - BA^{-1} &= I - (\lambda I - L)(\lambda_0 I - L)^{-1} \\ &= I - ((\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - L)(\lambda_0 I - L)^{-1} \\ &= I - (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - L)^{-1} - I \\ &= -(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - L)^{-1}. \end{aligned}$$

Con ésto obtenemos que

$$\|I - BA^{-1}\| \leq |\lambda - \lambda_0| \, \|(\lambda_0 I - L)^{-1}\| < r \cdot \frac{1}{r} = 1.$$

Usamos la Tarea 2, Nº 4.a) y concluimos que B es invertible, es decir $\lambda \in \rho(L)$. Se sigue que $U_r(\lambda_0) \subseteq \rho(L)$, es decir, $\rho(L)$ es abierto y $\sigma(L)$ cerrado. Como $\sigma(L)$ también es acotado, $\sigma(L)$ es compacto. $\square$

1.83 Proposición. *Sea E un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(E)$ simétrico. Definimos*

$$m := \inf_{x\in S_1 E}(Ax, x) \qquad y \qquad M := \sup_{x\in S_1 E}(Ax, x).$$

Entonces $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ y $m, M \in \sigma(A)$.

Demostración. Sea $\lambda > M$. Se sigue que

$$((\lambda I - A)x, x) = \lambda\|x\|^2 - (Ax, x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2$$

para todo $x \in E$. Usando el Lema 1.36(b) obtenemos que $\lambda I - A$ es biyectivo, es decir, $\lambda \in \rho(A)$ o $\sigma(A) \subseteq (-\infty, M]$.

Demostremos que $M \in \sigma(A)$: Denotando $((x, y)) := (Mx - Ax, y)$ se sigue que $((\cdot, \cdot))$ es una función bilineal simétrica y positiva semidefinida, es decir, $((x, x)) \geq 0$ para todo $x \in E$. Como en la Proposición 1.26(a) se demuestra que $((\cdot, \cdot))$ cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en la demostración no se usa la definidad positiva, solo la semidefinidad positiva). Aplicando el Lema 1.45, obtenemos

$$\begin{aligned}\|(MI-A)x\| &= \sup_{y\in S_1E} |(Mx-Ax,y)| \\ &= \sup_{y\in S_1E} |((x,y))| \\ &\leq \sup_{y\in S_1E} ((x,x))^{1/2}((y,y))^{1/2} \\ &= \sup_{y\in S_1E} (Mx-Ax,x)^{1/2}(My-Ay,y)^{1/2} \\ &\leq (Mx-Ax,x)^{1/2}\|MI-A\|^{1/2}\end{aligned} \tag{1.33}$$

para todo $x \in E$. Sea $(x_n) \subseteq S_1E$ tal que $\lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = M$. De (1.33) obtenemos que $\|(MI-A)x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $M \in \rho(A)$ entonces $x_n = (MI-A)^{-1}(MI-A)x_n \to 0$, una contradicción. Entonces $M \in \sigma(A)$.

Sustituyendo $-A$ por A se obtienen las propiedades de m en la misma manera. □

1.84 Corolario. *Sea E un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(E)$ simétrico. Si $\sigma(A) = \{0\}$ entonces $A = 0$.*

Demostración. La Proposición 1.83 implica que $(Ax, x) = 0$ para todo $x \in E$. Fijando $y \in E$ se sigue para todo $x \in E$ que

$$2(Ay, x) = (A(x+y), x+y) - (Ax, x) - (Ay, y) = 0,$$

es decir, $Ay = 0$. □

1.85 Teorema. *Sea E un espacio de Hilbert con* $\dim(E) = \infty$ *y sea $K \in \mathcal{L}(E)$ compacto. Se cumplen:*

(a) $0 \in \sigma(K)$

(b) $\dim \mathcal{N}(\lambda I - K) < \infty$ *para todo* $\lambda \in \sigma_p(K)\backslash\{0\}$

(c) $\sigma(K)\backslash\{0\} \subseteq \sigma_p(K)$

(d) $\sigma(K)\backslash\{0\}$ *consiste de puntos aislados en* $\sigma(K)$.

Demostración del Teorema 1.85. **(a)** Si $0 \notin \sigma(K)$ entonces K es invertible en $\mathcal{L}(E)$ y $I = KK^{-1}$ es compacto. Eso no puede ser por el Lema 1.70(c) porque $\dim(E) = \infty$.

(b) Eso es una consecuencia del Teorema 1.79(a).

(c) Si $\lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ y $\lambda \notin \sigma_p(K)$ entonces $\mathcal{N}(\lambda I - K) = \{0\}$. Por el Teorema 1.79(d) $\mathcal{R}(\lambda I - K) = E$, es decir, $\lambda I - K$ es biyectivo y $\lambda \notin \sigma(K)$. ¡Contradicción!

(d) Sea $(\lambda_n) \subseteq \sigma(K)\backslash\{0\}$ tal que $\lambda_m \neq \lambda_n$ para todo $m \neq n$, y tal que $\lambda_n \to \lambda$. Es suficiente demostrar que $\lambda = 0$. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $\lambda \neq 0$. Entonces se cumple (1.28) del Lema 1.78. Escojemos vectores propios x_n de K correspondiente a λ_n y denotemos $E_n := [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$.

Demostraremos por inducción sobre n que $\{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$ es linealmente independiente: Como $x_1 \neq 0$, $\{x_1\}$ es linealmente independiente. Si $\{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$ es linealmente independiente, supongamos que

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \tag{1.34}$$

con escalares α_k. Se sigue que

$$Kx_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+1} \alpha_k x_k$$

y

$$Kx_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k x_k.$$

En consecuencia

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{n+1}) \alpha_k x_k = 0.$$

Como los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes $(\lambda_k - \lambda_{n+1})\alpha_k = 0$. Como los λ_m son distintos dos a dos $\alpha_k = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Eso contradice $x_{n+1} \neq 0$ y (1.34). Por lo tanto no se cumple (1.34) y $\{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} \}$ es linealmente independiente.

Es claro que se cumple (1.29) del Lema 1.78. Si $x \in E_n$ entonces

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Por lo tanto

$$(\lambda_n I - K)x = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k x_k \in E_{n-1}.$$

Entonces se cumple (1.30) del Lema 1.78. Como K es compacto, obtenemos una contradicción con el Lema 1.78, es decir, $\lambda = 0$. □

1.86 Nota. De (c) del teorema se sigue que $\sigma(K) \backslash \{0\} = \sigma_p(K) \backslash \{0\}$. Junto con la Proposición 1.82 los puntos (a) y (d) implican que se cumple una de las siguientes alternativas:

(i) $\sigma(K) = \{0\}$,

(ii) $\sigma(K)$ es finito,

(iii) $\sigma(K) \backslash \{0\}$ consiste de una sucesión que converge a 0.

1.87 Teorema. *Sea E un espacio de Hilbert separable y sea $K \in \mathcal{L}(E)$ simétrico y compacto. Entonces existe una base Hilbertiana numerable de E formada por vectores propios de K.*

Demostración. Denotemos $\lambda_0 := 0$. Por Nota 1.86 existe una sucesión $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (tal vez finita o vacía) de valores propios de A, diferentes dos a dos, tal que $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Denotemos $E_n := \mathcal{N}(\lambda_n I - K)$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Como vectores propios correspondiente a valores propios diferentes son ortogonales, en consecuencia

$$E_m \perp E_n \qquad \text{si } m \neq n. \tag{1.35}$$

Denotemos

$$F := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} E_n$$

y probemos que $\overline{F} = E$: Es claro que $K(F) \subseteq F$. Si $x \in F^\perp$, para todo $y \in F$ se sigue que $Ky \in F$ y por lo tanto $(y, Kx) = (Ky, x) = 0$. Entonces $K(F^\perp) \subseteq F^\perp$. El operador $\widetilde{K} := K|_{F^\perp}$ es un operador compacto simétrico en el espacio de Hilbert $F^\perp$. Además $\sigma(\widetilde{K}) = \{0\}$ porque si no, $\widetilde{K}$ tiene un valor propio no cero y un vector propio $x \in F^\perp$. En consecuencia x también es un vector propio de K asociado a un valor propio de K. Pero eso implica que $x \in F$, es decir que $x = 0$. ¡Contradicción! Por lo tanto $\sigma(\widetilde{K}) = \{0\}$. Obtenemos por el Corolario 1.84 que $\widetilde{K} = 0$ y en consecuencia que $F^\perp \subseteq \mathcal{N}(K) \subseteq F$, es decir, $F^\perp = \{0\}$. Entonces $E = \overline{F} \oplus F^\perp = \overline{F}$.

Denotemos por P la proyección ortogonal sobre E_0. Si $S := \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es denso en E, entonces $\{Px_1, Px_2, Px_3, \dots\}$ es denso en E_0: Para $x \in E_0$ existe una sucesión $(y_n) \subseteq S$ tal que $y_n \to x$ en E. Como P es continuo, en consecuencia $Py_n \to Px = x$, y además $(Py_n) \subseteq P(S) \subseteq E_0$. Eso demuestra que E_0 es separable. Por el Teorema 1.44 existe una base Hilbertiana numerable para E_0. Para $n \geq 1$ sabemos del Teorema 1.85(b) que $\dim E_n < \infty$ y que existe una base Hilbertiana finita para E_n. La unión de estas bases de los subespacios E_n, $n \in \mathbb{N}_0$, constituye una base Hilbertiana numerable de E por lo que hemos demostrado arriba y por el Lema 1.40. $\square$

2. Espacios de Funciones

2.1. Funciones Continuas y Diferenciables

2.1.1. Notación y Repaso de Diferenciabilidad

Particularmente nos interesan los espacios de Banach $\mathbb{R}^N$. Siempre supongamos que $N \in \mathbb{N}$. Denotemos elementos $x \in \mathbb{R}^N$ como

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^N)^T := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix},$$

y denotemos el producto escalar en $\mathbb{R}^N$ por

$$x_1 \cdot x_2 := x_1^T x_2 = \sum_{k=1}^{N} x_1^k x_2^k$$

y la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^N$ por

$$|x| := |x|_2 := \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^{N} (x^k)^2 \right)^{1/2}.$$

Análogamente, para $p \geq 1$ denotamos

$$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{N} (x^k)^p \right)^{1/p},$$

y

$$|x|_\infty := \max\{\, |x^k| \mid k = 1, 2, \dots, N \,\}.$$

Para representaciones de operadores lineales entre espacios Euclidianos como matrices usamos la base Hilbertiana $\{\, e_1, e_2, \dots, e_N \,\}$ de $\mathbb{R}^N$, donde $e_k^i = \delta_{ki}$.

Si $U \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto, si $x \in U$, y si $f \colon U \to \mathbb{R}^M$ es una aplicación, entonces denotamos la derivada parcial de f^i en x en la k-ésima coordenada por

$$\partial_k f^i(x) := \frac{\partial}{\partial x^k} f^i(x) := \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f^i(x + te_k) - f^i(x)}{t}$$

si existe este límite. Si f es diferenciable en x entonces denotamos su derivada en x por $\mathrm{D}f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. De acuerdo, la matriz de representación es

$$\mathrm{D}f(x) \simeq \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \partial_2 f^1(x) & \cdots & \partial_N f^1(x) \\ \partial_1 f^2(x) & \partial_2 f^2(x) & \cdots & \partial_N f^2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^M(x) & \partial_2 f^M(x) & \cdots & \partial_N f^M(x) \end{pmatrix}$$

Si todas derivadas parciales existen en U y son continuas, entonces f es diferenciable continuamente en U, es decir, $\mathrm{D}f\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ es continuo.

En el caso donde $M = 1$ y f es diferenciable en x, la matriz de representación de $\mathrm{D}f(x)$ es

$$(\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \ldots, \partial_N f(x)).$$

Escribimos el gradiente de f en x como

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \partial_2 f(x) \\ \vdots \\ \partial_N f(x) \end{pmatrix}.$$

Este es el elemento en $\mathbb{R}^N$ dado por el Teorema de Frechét-Riesz para la función lineal $\mathrm{D}f(x)$.

Ahora supongamos que $M = 1$. Decimos que f es diferenciable continuamente n veces si existen y son continuas todas derivadas parciales hasta el orden n. En este caso, el orden de diferenciación no importa. En muchas situaciones combinamos derivadas parciales en la misma dirección. Para eso definimos un *multiíndice* como un elemento $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N) \in \mathbb{N}_0^N$, y pongamos

$$|\alpha|_1 := \sum_{k=1}^{N} \alpha^k, \qquad \partial^\alpha := \prod_{k=1}^{N} \partial_k^{\alpha^k}.$$

Por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, la derivada parcial

$$\partial_3\partial_2\partial_3\partial_1\partial_2 f = \partial_1\partial_2\partial_2\partial_3\partial_3 f$$

es la misma que

$$\partial^\alpha f,$$

donde

$$\alpha = (1, 2, 2, 0).$$

En este caso, $|\alpha|_1 = 5$ es el orden de diferenciación.

Para una función medible $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ y $p \geq 1$ denotamos

$$\|\varphi\|_p := \|\varphi\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |\varphi(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

y

$$\|\varphi\|_\infty := \|\varphi\|_{L^\infty(U)} = \operatorname*{ess\,sup}_U |\varphi|.$$

Nos fijamos en el caso $M = 1$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$. Si $n \geq 2$ y f es diferenciable continuamente n veces en x, denotamos

$$\mathrm{D}^n f(x) := \{\, \partial^\alpha f(x) \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ |\alpha|_1 = n \,\}.$$

Siempre consideramos $\mathrm{D}f(x)$ como elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Para $n \in \mathbb{N}_0$ y $p \geq 1$ denotamos

$$|\mathrm{D}^n f(x)|_p := \left(\sum_{|\alpha|_1 = n} |\partial^\alpha f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

También ponemos

$$|\mathrm{D}^n f(x)|_\infty := \text{máx}\{\, |\partial^\alpha f(x)| \mid |\alpha|_1 = n \,\}.$$

Con ésto definimos

$$\|\mathrm{D}^n f\|_p := \|\mathrm{D}^n f\|_{L^p(U)} := \|\, |\mathrm{D}^n f(x)|_p \|_p = \left(\sum_{|\alpha|_1 = n} \|\partial^\alpha f\|_p^p\right)^{1/p}$$

y

$$\|\mathrm{D}^n f\|_\infty := \|\mathrm{D}^n f\|_{L^\infty(U)} := \|\, |\mathrm{D}^n f(x)|_\infty \|_\infty = \text{máx}\{\, \|\partial^\alpha f\|_\infty \mid |\alpha|_1 = n \,\}.$$

Decir que $\mathrm{D}^n f$ es acotado en U significa que $\|\mathrm{D}^n f\|_\infty < \infty$. Similarmente hablamos de la continuidad de $\mathrm{D}^n f$ si $\partial^\alpha f$ es una función continua en U para todo multiíndice α tal que $|\alpha|_1 = n$.

2.1.2. Espacios de Funciones Diferenciables

2.1 Definición. Sean X un espacio métrico y E un espacio de Banach.

$$C(X, E) := \{\, u\colon X \to E \mid u \text{ es continuo} \,\}$$
$$C_{\mathrm{B}}(X, E) := \{\, u\colon X \to E \mid u \text{ es continuo y acotado} \,\}.$$

El espacio $C_{\mathrm{B}}(X, E)$ con la norma $\|u\|_\infty := \sup_{x \in X} \|u(x)\|_E$ es un espacio de Banach. Si $E = \mathbb{R}$, entonces escribimos $C(X)$ y $C_{\mathrm{B}}(X)$ en lugar de $C(X, \mathbb{R})$ y $C_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{R})$.

2.2 Nota. Si X es compacto, entonces $C(X, E) = C_{\mathrm{B}}(X, E)$.

2.3 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Definimos para $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
C^n(\Omega) &:= \{\, u\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es diferenciable continuamente } n \text{ veces en } \Omega \,\}\\
C^n_{\mathrm{B}}(\Omega) &:= \{\, u \in C^n(\Omega) \mid \partial^\alpha u \text{ es acotado para } |\alpha|_1 \le n \,\}\\
C^n(\overline{\Omega}) &:= \{\, u \in C^n(\Omega) \mid \partial^\alpha u \text{ tiene una extensión continua a } \overline{\Omega} \text{ para } |\alpha|_1 \le n \,\}\\
C^n_{\mathrm{B}}(\overline{\Omega}) &:= \{\, u \in C^n_{\mathrm{B}}(\Omega) \mid \partial^\alpha u \text{ tiene una extensión continua a } \overline{\Omega} \text{ para } |\alpha|_1 \le n \,\}
\end{aligned}$$

Para cada una de las cuatro definiciones arriba también definimos

$$C^\infty_*(*) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n_*(*).$$

En lo siguiente será útil el conjunto $\mathcal{M}(N,m,n)$ de multiíndices N-dimensionales con orden entre m y n:

$$\mathcal{M}(N,m,n) := \{\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N \mid m \le |\alpha|_1 \le n \,\}.$$

Denotemos $\mathcal{M}(N,n) := \mathcal{M}(N,n,n)$.

2.4 Proposición. *Los espacios $C^n_{\mathrm{B}}(\Omega)$ y $C^n_{\mathrm{B}}(\overline{\Omega})$ con la norma*

$$\|u\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \|\mathrm{D}^k u\|_\infty$$

son espacios de Banach.

Demostración. Primero consideramos $C^n_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Sea $(u_l) \subseteq C^n_{\mathrm{B}}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. En consecuencia, para todo $\alpha \in \mathcal{M}(N,0,n)$ se cumple que

$$\|\partial^\alpha u_l - \partial^\alpha u_m\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n} \max_{|\beta|_1 = k} \|\partial^\beta u_l - \partial^\beta u_m\|_\infty = \|u_l - u_m\|_{C^n},$$

es decir, $(\partial^\alpha u_l)_l$ es una sucesión de Cauchy en $C_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Como este espacio es completo, existe $\bar{u}^\alpha \in C_{\mathrm{B}}(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u_l \to \bar{u}^\alpha$ uniformemente en Ω cuando $l \to \infty$.

Demostremos que

$$\bar{u}^0 \in C^n_{\mathrm{B}}(\Omega) \tag{2.1}$$

y

$$\partial^\alpha \bar{u}^0 = \bar{u}^\alpha \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{M}(N,0,n). \tag{2.2}$$

Primero asumimos que $\alpha \in \mathcal{M}(N,1)$, es decir, $\partial^\alpha = \partial_i$ para un $i \in \{\, 1,2,\dots,N \,\}$. Fijamos $x_0 \in \Omega$. Definimos $V := \{\, t \in \mathbb{R} \mid x_0 + te_i \in \Omega \,\}$ y $g_l, g, h\colon V \to \mathbb{R}$ por $g_l(t) := u_l(x_0 + te_i)$,

$g(t) := \bar{u}^0(x_0+te_i)$ y $h(t) := \bar{u}^\alpha(x_0+te_i)$. Entonces $g_l'(t) = \partial_i u_l(x_0+te_i)$, $g_l \to g$ y $g_l' \to h$ en $C_{\mathrm{B}}(V)$. En este caso ya es conocido que g es diferenciable y que $g' = h$. Se sigue que existe $\partial_i \bar{u}^0(x_0)$ y que $\partial^\alpha \bar{u}^0(x_0) = \partial_i \bar{u}^0(x_0) = g'(0) = h(0) = \bar{u}^\alpha(x_0)$. En consecuencia hemos probado que $\bar{u}^0 \in C_B^1(\Omega)$. Aplicando el mismo argumente a las sucesiones de derivadas parciales, por inducción se siguen (2.1) y (2.2). Esto implica que $u_l \to \bar{u}^0$ en $C_{\mathrm{B}}^n(\Omega)$ y que $C_{\mathrm{B}}^n(\Omega)$ es completo:

$$\|u_l - \bar{u}^0\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{|\alpha|_1=k} \|\partial^\alpha u_l - \partial^\alpha \bar{u}^0\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} \max_{|\alpha|_1=k} \|\partial^\alpha u_l - \bar{u}^\alpha\|_\infty \to 0$$

cuando $l \to \infty$.

Claramente, $C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega})$ es un subespacio lineal de $C_{\mathrm{B}}^n(\Omega)$. Demostremos que es cerrado. Sea $(u_l) \subseteq C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega})$ una sucesión que converge a una función u en $C_{\mathrm{B}}^n(\Omega)$. Hay que demostrar que $u \in C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega})$. Fijamos $\alpha \in \mathcal{M}(N,0,n)$ y denotamos por $\bar{u}_l^\alpha$ una extensión continua de $\partial^\alpha u_l$ a $\overline{\Omega}$. Sea $x \in \partial\Omega$ y $(x_i) \subseteq \Omega$ tal que $x_i \to x$ cuando $i \to \infty$. Se sigue para todo l, m que

$$\begin{aligned} |\bar{u}_l^\alpha(x) - \bar{u}_m^\alpha(x)| &= \lim_{i\to\infty} |\partial^\alpha u_l(x_i) - \partial^\alpha u_m(x_i)| \\ &\leq \|\partial^\alpha u_l - \partial^\alpha u_m\|_\infty \\ &\leq \|u_l - u_m\|_{C^n}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

es decir, $(\bar{u}_l^\alpha(x))_l$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ que converge . Definimos

$$\bar{u}^\alpha(x) := \begin{cases} \partial^\alpha u(x) & x \in \Omega \\ \lim_{l\to\infty} \bar{u}_l^\alpha(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dejando tender $m \to \infty$ en (2.3) obtenemos

$$|\bar{u}_l^\alpha(x) - \bar{u}^\alpha(x)| \leq \|u_l - u\|_{C^n},$$

y esto se cumple para todo $x \in \overline{\Omega}$. Por lo tanto, $\bar{u}_l^\alpha \to \bar{u}^\alpha$ en $C_B(\overline{\Omega})$ cuando $l \to \infty$ y $\bar{u}^\alpha$ es continuo en $\overline{\Omega}$. Eso demuestra que $\partial^\alpha u$ tiene una extensión continua a $\overline{\Omega}$, la función $\bar{u}^\alpha$. Hemos probado que $u \in C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega})$. □

2.5 Lema. *Sean X, Y espacios métricos, sea Y completo, sea $A \subseteq X$ y sea $f\colon A \to Y$ continuo uniformemente. Entonces existe una extensión continua de f a $\overline{A}$.*

Demostración. Tarea 7. □

2.6 Notas. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

(a) Es claro que $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ y $C_{\mathrm{B}}(\Omega) = C_{\mathrm{B}}^0(\Omega)$. Identifiquemos $C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$ y $C_{\mathrm{B}}(\overline{\Omega}) = C_{\mathrm{B}}^0(\overline{\Omega})$. Se cumplen $C^n(\overline{\Omega}) \subseteq C^n(\Omega)$ y $C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega}) \subseteq C_{\mathrm{B}}^n(\Omega)$.

(b) Si Ω es acotado entonces $C^n(\overline{\Omega}) = C^n_{\mathrm{B}}(\overline{\Omega})$.

(c) El Lema 2.5 implica: Si Ω es acotado, entonces $u \in C^n(\overline{\Omega})$ si y sólo si $u \in C^n_{\mathrm{B}}(\Omega)$ y $\partial^\alpha u$ es continuo uniformemente en Ω para $\alpha \in \mathcal{M}(N, 0, n)$.

2.7 Recapitulación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ continuo. El conjunto

$$\operatorname{supp}(u) := \overline{\{\, x \in \mathbb{R}^N \mid u(x) \neq 0 \,\}} \cap \Omega$$

es el *soporte de u en Ω*. Si $U \subseteq \Omega$ es el conjunto abierto maximal tal que $u|_U \equiv 0$, entonces

$$\operatorname{supp}(u) = \Omega \backslash U.$$

En la misma manera se define el soporte de una aplicación medible $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$: Si $U \subseteq \Omega$ es el conjunto abierto máximo tal que $u|_U = 0$ c.t.p., entonces

$$\operatorname{supp}(u) := \Omega \backslash U.$$

En consecuencia $\operatorname{supp}(u)$ siempre es cerrado relativo a Ω. Si $\operatorname{supp}(u)$ es compacto, entonces es cerrado en $\mathbb{R}^N$.

2.8 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Definimos para $n \in \mathbb{N}_0$

$$C^n_{\mathrm{c}}(\Omega) := \{\, u \in C^n(\Omega) \mid u \text{ tiene soporte compacto en } \Omega \,\},$$
$$C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) := \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n_{\mathrm{c}}(\Omega).$$

Por supuesto, pongamos $C_{\mathrm{c}}(\Omega) := C^0_{\mathrm{c}}(\Omega)$.

2.9 Nota. El espacio $C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio normado *no completo*. Por eso a veces se considera la completación

$$C_0(\Omega) := \{\, u \in C(\Omega) \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subseteq \Omega,\ K \text{ compacto } \forall x \in \Omega \backslash K \colon |u(x)| \leq \varepsilon \,\}$$

de $C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ en esta norma: $C_0(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach y $C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ es denso en $C_0(\Omega)$.

2.1.3. Espacios de Hölder

2.10 Definición. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $f\colon X \to Y$ es *Hölder continua de exponente* γ si existe $\gamma \in (0, 1]$ tal que

$$[f]_{\gamma;X,E} := \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)^\gamma} < \infty.$$

En este caso $[f]_{\gamma;X,E}$ es la *constante de Hölder*. Si $Y = \mathbb{R}$, entonces normalmente suprimimos el espacio Y. Si no hay posibilidad de confusión también suprimimos X.

f es *Hölder continuo localmente de exponente* γ si para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x en X tal que $f|_U$ es Hölder continuo de exponente γ.

2.11 Ejemplo. Sea $\gamma \in (0,1]$. Definimos $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) := x^\gamma$. Como $f'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$ para $x > 0$, entonces f' es decreciente en $(0,\infty)$. Para $x \geq y \geq 0$ se sigue que

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_y^x f'(s-y)\,\mathrm{d}s = \int_0^{x-y} f'(s)\,\mathrm{d}s = f(x-y).$$

Esto implica que f es Hölder continuo de exponente γ y que $[f]_{\gamma;[0,\infty)} \leq 1$. Como $f(x) - f(0) = f(x-0)$ para todo $x \geq 0$, en consecuencia $[f]_{\gamma;[0,\infty)} = 1$.

2.12 Notas. (a) Si f es Hölder continuo localmente en X, entonces f es continuo. Si f es Hölder continuo en X, entonces f es continuo uniformemente.

(b) Supongamos que $A \subseteq X$, que Y es completo, y que $f\colon A \to Y$ es Hölder continuo de exponente γ. Por (a) y el Lema 2.5 existe una extensión continua $\bar{f}\colon \overline{A} \to Y$. Se sigue que para $x, y \in \overline{A}$, $(x_n), (y_n) \subseteq A$, $x_n \to x$ y $y_n \to y$:

$$\frac{d(\bar{f}(x), \bar{f}(y))}{d(x,y)^\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(f(x_n), f(y_n))}{d(x_n,y_n)^\gamma} \leq [f]_{\gamma;A,Y}.$$

Entonces $\bar{f}$ es Hölder continuo de exponente γ y $[\bar{f}]_{\gamma;\overline{A},Y} = [f]_{\gamma;A,Y}$.

(c) Si X es compacto y si f es Hölder continuo localmente en X de exponente γ, entonces f es Hölder continuo de exponente γ en X.

(d) Si $\gamma = 1$ en la Definición 2.10, entonces se utiliza “Lipschitz” en lugar de “Hölder”.

2.13 Definición. Sean X un espacio métrico, E un espacio de Banach, y $\gamma \in (0,1]$.

$$C^{0,\gamma}(X,E) := \{\, u\colon X \to E \mid u \text{ es Hölder continuo localmente de exponente } \gamma \,\},$$
$$C^{0,\gamma}_{\mathrm{B}}(X,E) := \{\, u \in C_{\mathrm{B}}(X,E) \mid u \text{ es Hölder continuo de exponente } \gamma \,\}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ entonces suprimimos el espacio E.

2.14 Lema. *El espacio $C^{0,\gamma}_{\mathrm{B}}(X,E)$ con la norma*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(X,E)} := \|u\|_\infty + [u]_{\gamma;X,E} \tag{2.4}$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(u_n) \subseteq C^{0,\gamma}_{\mathrm{B}}(X,E)$ una sucesión de Cauchy. Existe $C \geq 0$ tal que $\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(X,E)} \leq C$ para todo n. Como (u_n) también es una sucesión de Cauchy en $C_{\mathrm{B}}(X,E)$, entonces existe $u \in C_{\mathrm{B}}(X,E)$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en X. Calculamos

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{\|u(x)-u(y)\|_E}{d(x,y)^\gamma} = \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n(x)-u_n(y)\|_E}{d(x,y)^\gamma} \leq C,$$

de donde se sigue que $u \in C_B^{0,\gamma}(X, E)$. Además, para $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$[u_n - u_m]_{\gamma;X,E} \leq \varepsilon$$

para $m, n \geq n_0$. En consecuencia

$$\begin{aligned} [u_n - u]_{\gamma;X,E} &= \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|(u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)\|_E}{d(x,y)^\gamma} \\ &= \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \lim_{m \to \infty} \frac{\|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)\|_E}{d(x,y)^\gamma} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Junto con $u_n \to u$ en $C_{\mathrm{B}}(X, E)$ esto implica que $u_n \to u$ en $C_B^{0,\gamma}(X, E)$. □

2.15 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, y sea $\gamma \in (0, 1]$. Definimos para $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} &C^{n,\gamma}(\Omega) := \{\, u \in C^n(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in C^{0,\gamma}(\Omega) \text{ para } |\alpha|_1 = n \,\}, \\ &C_{\mathrm{B}}^{n,\gamma}(\Omega) := \{\, u \in C_{\mathrm{B}}^n(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in C_{\mathrm{B}}^{0,\gamma}(\Omega) \text{ para } |\alpha|_1 = n \,\}, \\ &C^{n,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{\, u \in C^n(\overline{\Omega}) \mid \partial^\alpha u \text{ tiene una extensión a } \overline{\Omega} \text{ en } C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \text{ para } |\alpha|_1 = n \,\}, \\ &C_{\mathrm{B}}^{n,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{\, u \in C_{\mathrm{B}}^n(\overline{\Omega}) \mid \partial^\alpha u \text{ tiene una extensión a } \overline{\Omega} \text{ en } C_{\mathrm{B}}^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \text{ para } |\alpha|_1 = n \,\}. \end{aligned}$$

2.16 Nota. Se cumple por la Nota 2.12(b) que $C_B^{0,\gamma}(\Omega) = C_B^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Si Ω es acotado, entonces $C^{n,\gamma}(\overline{\Omega}) = C_{\mathrm{B}}^{n,\gamma}(\overline{\Omega})$ por la Nota 2.12(c).

2.17 Proposición. *Los espacios $C_{\mathrm{B}}^{n,\gamma}(\Omega)$ y $C_{\mathrm{B}}^{n,\gamma}(\overline{\Omega})$ con la norma*

$$\|u\|_{C^{n,\gamma}} := \|u\|_{C^n} + \max_{|\alpha|_1 = n} [\partial^\alpha u]_\gamma$$

son espacios de Banach.

Demostración. Combinar la Proposición 2.4 y el Lema 2.14. □

2.1.4. Regularización

2.18 Definición. Fijando $N \in \mathbb{N}$ definimos $\eta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde $C > 0$ es elegido tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta \, \mathrm{d}x = 1$. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} \, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Se sigue que $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, que

$$\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = B_\varepsilon(0), \tag{2.5}$$

y que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 1 \tag{2.6}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Las funciones η_ε se llaman *regularizadores* (*mollifiers* en inglés).

2.19 Recapitulación. Sea $p \in (0, \infty]$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es el espacio de las funciones medibles $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u|_K \in L^p(K)$ para todo $K \subseteq \Omega$ que es compacto. Equivalentemente, $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si todo $x \in \Omega$ posee una vecindad $U \subseteq \Omega$ tal que $u|_U \in L^p(U)$.

2.20 Ejemplo. Sean $\Omega_1 := (0, 1)$, $\Omega_2 := (1, \infty)$, $p > 0$ y $u\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definido por $u(x) = 1/x$. Entonces $u \in L^p(\Omega_1)$ si y sólo si $p < 1$, y $u \in L^p(\Omega_2)$ si y sólo si $p > 1$. Pero $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega_i)$ para todo $p > 0$ y $i = 1, 2$.

2.21 Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y sea $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Definimos*

$$\Omega^\varepsilon := \{\, x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon \,\}$$

y la regularización $u_\varepsilon\colon \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}$ de u por $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, es decir,

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{U_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.7}$$

Entonces u_ε tiene las siguientes propiedades:

(I) $\operatorname{supp}(u_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(u) + U_\varepsilon\mathbb{R}^N =: U_\varepsilon(\operatorname{supp}(u))$

(II) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega^\varepsilon)$

(III) *Si $u \in C(\Omega)$ entonces u_ε converge uniformemente a u sobre subconjuntos compactos de Ω cuando $\varepsilon \to 0$.*

Demostración. **(I)** Sea $x \in \Omega^\varepsilon$ y $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(u)) \geq \varepsilon$. Entonces $U_\varepsilon(x) \cap \operatorname{supp}(u) = \varnothing$ y (2.7) implica que $u_\varepsilon(x) = 0$.

(II) Fijamos $i \in \{\, 1, 2, 3, \ldots, N \,\}$ y $x \in \Omega^\varepsilon$. Existe $r > \varepsilon$ tal que $B_r(x) \subseteq \Omega$. Se sigue para $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r - \varepsilon$ que

$$U_\varepsilon(x + te_i) \subseteq U_r(x).$$

Como $\partial_i\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $u|_{U_r(x)} \in L^1(U_r(x))$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica

$$\begin{aligned}\frac{u_\varepsilon(x + te_i) - u_\varepsilon(x)}{t} &- \int_\Omega \partial_i\eta_\varepsilon(x - y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{U_r(x)} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + te_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)}{t} - \partial_i\eta_\varepsilon(x - y)\right)u(y)\,\mathrm{d}y \to 0\end{aligned}$$

cuando $t \to 0$. Eso dice que u_ε es diferenciable parcialmente en x y que

$$\partial_i u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \partial_i \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \partial_i\eta_\varepsilon * u.$$

Sólo hemos usado $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$. Tenemos $\partial_i u_\varepsilon = \partial_i\eta_\varepsilon * u$, $\partial_i\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\operatorname{supp}(\partial_i\eta_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$. Por eso podemos aplicar los mismos argumentos para obtener que $\partial_i u_\varepsilon$ es diferenciable en Ω^ε. Por inducción se obtiene la afirmación.

(iii) Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Elijamos $\delta_0 > 0$ tal que

$$B_{\delta_0}(K) := \{\, x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x,K) \le \delta_0 \,\} \subseteq \Omega.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $B_{\delta_0}(K)$ es compacto y u continuo, existe $\delta_1 \in (0,\delta_0]$ tal que

$$\forall \delta \in (0,\delta_1]\, \forall x,y \in B_{\delta_0}(K)\colon (|x-y| \le \delta \quad\Rightarrow\quad |u(x)-u(y)| \le \varepsilon). \tag{2.8}$$

Se sigue para $\delta \in (0,\delta_1]$ y $x \in K$ que

$$|u_\delta(x) - u(x)| = \left|\int_\Omega \eta_\delta(x-y)(u(y)-u(x))\,\mathrm{d}y\right| \le \int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y)|u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}y \le \varepsilon$$

porque $B_\delta(x) \subseteq B_{\delta_0}(K)$. En consecuencia $\|u_\delta - u\|_{C(K)} \le \varepsilon$ para $\delta \in (0,\delta_1]$. De eso se sigue la afirmación. □

2.22 Lema. *El espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $C_c(\Omega)$.*

Demostración. Sea $u \in C_c(\Omega)$ y $K := \operatorname{supp}(u)$. Definimos $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(K,\partial\Omega)/3 > 0$. Para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ se sigue de La Proposición 2.21(i) que la regularización u_ε tiene soporte en $B_\varepsilon(K) \subseteq \Omega^\varepsilon$, es decir, $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega^\varepsilon)$. Además (iii) de la misma Proposición implica que u_ε converge uniformemente a u en $B_{\varepsilon_0}(K)$ cuando $\varepsilon \to 0$. En consecuencia u_ε converge uniformemente a u cuando $\varepsilon \to 0$. Extendiendo u_ε a Ω por 0, esto implica la afirmación. □

2.23 Recapitulación. Para $p \in [1,\infty)$ el espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$. Entonces el Lema 2.22 y el Lema 1.42 implican que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

2.24 Recapitulación. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces la función

$$u(x) := \operatorname{dist}(x,A) := \operatorname{ínf}\{\, d(x,y) \mid y \in A \,\}$$

es Lipschitz continua con constante 1: Sean $x,y \in X$ y $(y_n) \subseteq A$ tal que $d(y,y_n) \to \operatorname{dist}(y,A)$ cuando $n \to \infty$. Se sigue que

$$\operatorname{dist}(x,A) - d(y,y_n) \le d(x,y_n) - d(y,y_n) \le d(x,y)$$

para todo n. Dejando $n \to \infty$ eso implica que $\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \le d(x,y)$. En la misma manera se puede probar que $\operatorname{dist}(y,A) - \operatorname{dist}(x,A) \le d(x,y)$, y entonces $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| = |u(x)-u(y)| \le d(x,y)$

2.25 Lema. *Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Entonces existe $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u(x) = 1$ para todo $x \in K$ y $u(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \Omega$.*

Demostración. Como K es compacto, $\partial\Omega$ cerrado y $K \cap \partial\Omega = \varnothing$, $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)/5 > 0$. Definimos $K_0 := B_\varepsilon(K)$ y $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \operatorname{dist}(x, K_0) \geq \varepsilon, \\ 1 - \operatorname{dist}(x, K_0)/\varepsilon & \operatorname{dist}(x, K_0) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Recapitulación 2.24 implica que v es continuo. Entonces $v \in C_c(\Omega)$, $\operatorname{supp}(v) = B_\varepsilon(K_0) = B_{2\varepsilon}(K)$, $v(x) = 1$ para $x \in K_0$ y $v(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \Omega$. La Proposición 2.21 implica para $v_\varepsilon := \eta_\varepsilon * v$ que $\operatorname{supp}(v_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon(\operatorname{supp}(v)) = B_{3\varepsilon}(K)$, es decir, $v_\varepsilon \subseteq C_c^\infty(\Omega^\varepsilon)$. Además, para $x \in K$ se sigue que $B_\varepsilon(x) \subseteq K_0$. En consecuencia, (2.6) y (2.7) implican que $v_\varepsilon(x) = 1$. Como $\eta_\varepsilon \geq 0$ y por (2.6) para todo $x \in \Omega^\varepsilon$ obtenemos

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) v(y) \,\mathrm{d}y \in [0,1].$$

Definimos

$$u(x) := \begin{cases} v_\varepsilon(x) & x \in \Omega^\varepsilon, \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

y obtenemos u como en la afirmación. □

2.2. Espacios de Sobolev

En esta sección siempre supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto.

2.2.1. Derivadas Débiles

Los espacios de funciones diferenciables que hemos definido en las secciones anteriores no son espacios de Hilbert. Como tiene muchas ventajas trabajar en espacios de Hilbert, nos interesamos en espacios de Hilbert de funciones diferenciables. En ésto, se necesita una versión débil de diferenciabilidad.

2.26 Recapitulación. Sea $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces existe $M \geq 0$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq Q := [-M, M]^N$. Para todo $x^2, x^3, \ldots, x^N \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\int_{-M}^{M} \partial_1 \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^N) \,\mathrm{d}x^1 = \varphi(M, x^2, \ldots, x^N) - \varphi(-M, x^2, \ldots, x^N) = 0$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_1 \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^N) \,\mathrm{d}x &= \int_Q \partial_1 \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^N) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \cdots \int_{-M}^{M} \partial_1 \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^N) \,\mathrm{d}x^1 \,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^N = 0 \end{aligned}$$

En la misma manera se prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.9}$$

Para un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, una función $u \in C^1(\Omega)$ y una función $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$, tenemos que $\varphi u \in C_{\mathrm{c}}^1(\Omega)$. Extendemos φu a $\mathbb{R}^N$ por 0 y obtenemos $\varphi u \in C_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R}^N)$. Por la Recapitulación 2.26 se sigue que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(\varphi u) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_i(\varphi u) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (u \partial_i \varphi + \varphi \partial_i u) \, \mathrm{d}x$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. De esto se sigue una fórmula de integración parcial:

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i u \, \varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.10}$$

Iterando esta fórmula, se sigue para $u \in C^k(\Omega)$ y un multiíndice α del orden $|\alpha|_1 \leq k$ que

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

En la siguiente definición usemos (2.11) para *definir* la derivada débil parcial de u asociado con α.

2.27 Definición. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, y sea α un multiíndice. Entonces v es la α-ésima derivada parcial débil de u si

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega v \, \varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega). \tag{2.12}$$

En este caso escribimos $\partial^\alpha u := v$.

2.28 Lema. *Si existe una derivada parcial débil α-ésima de $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ entonces $\partial^\alpha u$ está definida únicamente c.t.p.*

Demostración. Supongamos que $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ cumple

$$(-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial^\alpha u \, \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega v \, \varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega).$$

Pongamos $w := \partial^\alpha u - v$. Se sigue que $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y que

$$\int_\Omega w \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega). \tag{2.13}$$

Demostremos que $w = 0$ en c.t.p.

Primero supongamos que $\operatorname{meas}(\Omega) < \infty$ y que $w \in L^1(\Omega)$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.22 podemos elegir $\bar{w} \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|w - \bar{w}\|_1 \leq \varepsilon$. Pongamos

$$K_1 := \{\, x \in \Omega \mid \bar{w}(x) \geq \varepsilon \,\}, \qquad K_2 := \{\, x \in \Omega \mid \bar{w}(x) \leq -\varepsilon \,\}, \qquad K := K_1 \cup K_2.$$

Se sigue que K_1, K_2 son compactos y ajenos. Pongamos $\delta := \operatorname{dist}(K_1, K_2)/2 > 0$. Por el Lema 2.25 existen $\varphi_i \subseteq C_c^\infty(U_\delta(K_i))$ tal que $\varphi_i(x) = 1$ para todo $x \in K_i$ y $\varphi_i(x) \subseteq [0,1]$ para todo $x \in U_\delta(K_i)$. Extendamos φ_i por 0 a Ω y pongamos $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$. Se sigue que $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi(x) = 1$ para $x \in K_1$, $\varphi(x) = -1$ para $x \in K_2$, y $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. En consecuencia (2.13) implica que

$$\begin{aligned}
\|w\|_1 &\leq \varepsilon + \|\bar{w}\|_1 \\
&= \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |\bar{w}(x)| \,\mathrm{d}x + \int_K |\bar{w}(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \operatorname{meas}(\Omega) + \int_K \bar{w}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon(1 + \operatorname{meas}(\Omega)) + \int_\Omega \bar{w}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega\setminus K} \bar{w}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq 2\varepsilon(1 + \operatorname{meas}(\Omega)) + \int_\Omega w(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\varepsilon(1 + \operatorname{meas}(\Omega)),
\end{aligned}$$

y dejando $\varepsilon \to 0$ que $\|w\|_1 = 0$. Por eso $w = 0$ en c.t.p. de Ω.

En el caso general, pongamos

$$\Omega_n := \{\, x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/n,\ |x| < n \,\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se cumple que Ω_n es abierto y $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n.$$

Aplicando la primera parte a $w|_{\Omega_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $w = 0$ en c.t.p. en Ω. $\square$

2.29 Nota. Si $u \in C^1(\Omega)$, por el Lema 2.28 cada derivada parcial débil de u coincide con la derivada parcial clásica en c.t.p.

2.30 Ejemplos. Sea $\Omega := (-1, 1)$.

(a) Sea $u(x) := |x|$. Es claro que $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Poniendo

$$v(x) := \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

obtenemos $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (sólo es necesario definir v en c.t.p.). Probemos que u es diferenciable débilmente en Ω y que $u' = v$. Sea $\varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\Omega)$. Se sigue que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ y

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 -x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[x\varphi(x)\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] + x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \\ &= -\int_\Omega v\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Esto demuestra que se cumple (2.12) con $\alpha = 1$, es decir que $v = u' := \partial_x u$.

(b) Sea $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definido por

$$u(x) := \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Es claro que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Supongamos que u es diferenciable débilmente. Por Nota 2.29 $u'(x) = 0$ para $x \neq 0$, es decir, $u' = 0$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sea $\varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\Omega)$ tal que $\varphi(0) \neq 0$. En consecuencia la definición de diferenciabilidad débil y $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ implican que

$$0 = -\int_\Omega u'\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -2\varphi(0) \neq 0,$$

una contradicción. Entonces u no es diferenciable débilmente.

2.31 Nota. Diferenciabilidad débil es una noción local: Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y si todo $x \in \Omega$ tiene una vecindad abierta $U_x \subseteq \Omega$ tal que $u|_{U_x}$ posee la derivada débil $\partial_i u$, entonces existe la derivada débil $\partial_i u$ en Ω. Esto se demuestra así: Se sabe que en este caso existe una *partición lisa de 1 subordinada a la cubierta* $(U_x)_{x\in\Omega}$, es decir, una familia $(\eta_x)_{x\in\Omega} \in C^\infty_{\text{c}}(\Omega)$ tal que $\eta_x \in C^\infty_{\text{c}}(\Omega_x)$, $\eta_x\colon \Omega \to [0,1]$ y

$$\sum_{x\in\Omega} \eta_x \equiv 1 \qquad \text{en } \Omega.$$

Todo punto $y \in \Omega$ tiene una vecindad donde esta suma es finita. Por eso podemos intercambiar limites en la calculación mas adelante.

Uno define $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ por $v|_{U_x} := \partial_i u$ para todo $x \in \Omega$. Esto es posible por la unicidad de las derivadas débiles en los conjuntos U_x. Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\partial_i\varphi \,\mathrm{d}y &= \int_\Omega\Big(\sum_{x\in\Omega}\eta_x u\partial_i\varphi\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{x\in\Omega}\int_{U_x} u\eta_x\partial_i\varphi\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{x\in\Omega}\int_{U_x} (u\partial_i(\eta_x\varphi) - u\varphi\partial_i\eta_x)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{x\in\Omega}\int_{U_x} (-\partial_i u\,\eta_x\varphi - u\varphi\partial_i\eta_x)\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_\Omega \partial_i u\,\varphi\,\mathrm{d}y - \int_\Omega u\varphi\partial_i\underbrace{\Big(\sum_{x\in\Omega}\eta_x\Big)}_{\equiv 1}\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_\Omega \partial_i u\,\varphi\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Eso demuestra que existe $\partial_i u$ débilmente en Ω y que $\partial_i u = v$.

2.32 Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y sean $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

(a) *Sea α un multiíndice tal que existen $\partial^\alpha u$ y $\partial^\alpha v$, y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces $w := \lambda u + \mu v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, existe $\partial^\alpha w$ y*

$$\partial^\alpha w = \lambda\partial^\alpha u + \mu\partial^\alpha v,$$

es decir, ∂^α es un operador lineal.

(b) *Supongamos que existen todas derivadas parciales débiles de u hasta el orden k. Si α, β son multiíndices con $|\alpha|_1 + |\beta|_1 \leq k$, entonces*

$$\partial^\alpha(\partial^\beta u) = \partial^\beta(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+\beta}u.$$

(c) *Si $w \in C_c^\infty(\Omega)$ y si existe $\partial_i u$, entonces existe $\partial_i(wu) = u\partial_i w + w\partial_i u$.*

Demostración. **(a)** Se sigue directamente de la Definición 2.27.

(b) Para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\partial^\alpha(\partial^\beta\varphi) = \partial^\beta(\partial^\alpha\varphi) = \partial^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Entonces la Definición 2.27 y el Lema 2.28 implican la afirmación.

(c) Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega (u\partial_i w + w\partial_i u)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(\varphi\partial_i w - \partial_i(w\varphi))\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega uw\partial_i\varphi\,\mathrm{d}x.$$

La unicidad de la derivada parcial débil implica la afirmación. □

2.2.2. Propiedades Básicas de Espacios de Sobolev

2.33 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, sea $p \in [1, \infty]$, y sea $k \in \mathbb{N}_0$. Definimos el *espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ como el espacio de todas funciones $u \in L^p(\Omega)$ que poseen derivada parcial débil $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multiíndice α con $|\alpha|_1 \leq k$.

Para $k \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

2.34 Nota. La definición implica que $W^{k,p}(\Omega) \subseteq W^{l,p}(\Omega)$ si $l \leq k$, y que $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. La Proposición 2.32(b) implica que $\partial^\alpha u \in W^{l,p}(\Omega)$ si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $|\alpha|_1 \leq k - l$. Por La Proposición 2.32(a) $W^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$.

Similarmente como en la Sección 2.1.1, para $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $0 \leq n \leq k$ introducimos las notaciones

$$\mathrm{D}^n u := \{ \partial^\alpha u \mid |\alpha|_1 = n \}$$
$$\|\mathrm{D}^n u\|_p := \left(\sum_{|\alpha|_1 = n} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$
$$\|\mathrm{D}^n u\|_\infty := \max\{ \|\partial^\alpha u\|_\infty \mid |\alpha|_1 = n \}.$$

2.35 Definición. Supongamos que $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$. Para $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{n=0}^{k} \|\mathrm{D}^n u\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|_1 \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \qquad \text{si } p < \infty$$

y

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{n=0}^{k} \|\mathrm{D}^n u\|_\infty = \max_{|\alpha|_1 \leq k} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Si $u, v \in H^k(\Omega)$, entonces definimos

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|_1 \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_2.$$

Si identificamos funciones en $W^{k,p}(\Omega)$ que coinciden en c.t.p., entonces $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ es una norma, y $(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}$ es un producto escalar que genera $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. En consecuencia, $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio normado y $H^k(\Omega)$ es un espacio con producto escalar.

2.36 Lema. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. Entonces $L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega)$ para $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 \geq p_1$. Además, la inyección es continua.*

Demostración. Si $p_1 < p_2 < \infty$, definimos $q := p_2/(p_2 - p_1)$, el exponente adjunto a p_2/p_1. La desigualdad de Hölder implica

$$\|u\|_{p_1}^{p_1} = \int_\Omega |u(x)|^{p_1} \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega 1^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |u(x)|^{p_2} \,\mathrm{d}x \right)^{p_1/p_2} = \mathrm{meas}(\Omega)^{1/q} \|u\|_{p_2}^{p_1}.$$

Para $p_2 = \infty$ es claro que $\|u\|_{p_1} \leq \mathrm{meas}(\Omega)^{1/p_1} \|u\|_\infty$. $\square$

2.37 Lema. *Supongamos que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, \infty]$. Entonces para todo $q \in [1, p]$ y $\varphi \in C_c(\Omega)$ se cumple que $\varphi u_n \to \varphi u$ en $L^q(\Omega)$.*

Demostración. Sea $U \subseteq \Omega$ abierto y acotado tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$. El Lema 2.36 implica que $u_n \to u$ en $L^q(U)$. En el caso $q < \infty$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi u_n - \varphi u\|_{L^q(\Omega)}^q &= \|\varphi u_n - \varphi u\|_{L^q(U)}^q \\
&= \int_U |u_n(x) - u(x)|^q |\varphi(x)|^q \, \mathrm{d}x \\
&\leq \|\varphi\|_\infty^q \|u_n - u\|_{L^q(U)}^q \\
&\to 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Si $q = p = \infty$ entonces $\|\varphi u_n - \varphi u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|u_n - u\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

2.38 Proposición. *Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$ el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $(u_n) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Como $\partial^\alpha u_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ para todo multiíndice α tal que $|\alpha|_1 \leq k$, entonces existen $\bar{u}_\alpha$ tal que $\partial^\alpha u_n \to \bar{u}_\alpha$ en $L^p(\Omega)$, y particularmente existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Es suficiente probar que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $\partial^\alpha u = \bar{u}_\alpha$ para todo multiíndice α tal que $|\alpha|_1 \leq k$.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $|\alpha|_1 \leq k$. Lema 2.37 implica que $u_n \partial^\alpha \varphi \to u \, \partial^\alpha \varphi$ y $\varphi \, \partial^\alpha u_n \to \varphi \bar{u}_\alpha$ en $L^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia

$$\int_\Omega u \, \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \, \partial^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_1} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \partial^\alpha u_n \, \varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega \bar{u}_\alpha \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Variando $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se sigue de Definición 2.27 y el Lema 2.28 que existe $\partial^\alpha u = \bar{u}_\alpha$. □

2.39 Definición. Para $p \in [1, \infty)$ denotemos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Además denotemos

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

Entonces $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

2.40 Nota. En un sentido impreciso las funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ se pueden ver como las funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ que se "anulan sobre $\partial\Omega$".

2.2.3. Encajes

2.41 Definición. Sea $p \in [1, N)$. Definimos el *exponente de Sobolev* por

$$p^* := \frac{Np}{N - p}$$

y notemos que se cumplen

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \qquad \text{y} \qquad p^* > p. \tag{2.14}$$

2.42 Recapitulación (Desigualdad de Hölder generalizada)**.** Sean $m \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m \in [1, \infty]$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1, \tag{2.15}$$

y sean $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, 2, \ldots, m$. Entonces

$$\int_\Omega |u_1 u_2 \cdots u_m| \, \mathrm{d}x \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{p_k}.$$

2.43 Teorema (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sea $p \in [1, N)$. Entonces existe una constante positiva $C = C(N, p)$ tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\mathrm{D}u\|_p \tag{2.16}$$

para todo $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración del Teorema 2.43*.* Fijamos $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$ y primero supongamos que $p = 1$.

Definimos $v \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$ por $v(x) := \max_{i=1}^{N} |\partial_i u(x)|$. Para todo $i = 1, 2, \ldots, N$ y $x \in \mathbb{R}^N$ obtenemos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x^i} \partial_i u(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, y^i, x^{i+1}, \ldots, x^N) \, \mathrm{d}y^i$$

y entonces

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} v(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, y^i, x^{i+1}, \ldots, x^N) \, \mathrm{d}y^i.$$

En consecuencia

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, y^i, x^{i+1}, \ldots, x^N) \, \mathrm{d}y^i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) respecto a x^1 y usando Recapitulación 2.42 se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, \mathrm{d}x^1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v \, \mathrm{d}y^i \right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x^1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v \, \mathrm{d}y^1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v \, \mathrm{d}y^i \right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x^1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v \, \mathrm{d}y^1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}y^i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

En la misma manera calculamos, integrando (2.18) respecto a x^2:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \\
&\quad\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}y^2\right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y^1\right)^{\frac{1}{N-1}}\prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}y^i\right)^{\frac{1}{N-1}}\mathrm{d}x^2 \\
&\quad\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}y^2\right)^{\frac{1}{N-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}y^1\,\mathrm{d}x^2\right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^i\right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Siguiendo con integraciones respecto a $x^3, x^4, \dots, x^N$ llegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\le \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} v\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}y^i\cdots\mathrm{d}x^N\right)^{\frac{1}{N-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} v\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N}{N-1}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Esto implica

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \le \int_{\mathbb{R}^N} v\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}|\partial_i u|\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\|\partial_i u\|_1 = \|\mathrm{D}u\|_1,$$

la afirmación para $p = 1$.

Ahora supongamos que $1 < p < \infty$ y apliquemos (2.19) a la función $w := |u|^\gamma$ donde elegiremos $\gamma > 1$ mas adelante. Notemos que

$$\operatorname*{máx}_{i=1}^{N}|\partial_i w(x)| = \gamma|u(x)|^{\gamma-1}\operatorname*{máx}_{i=1}^{N}|\partial_i u(x)| \tag{2.20}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-1}{N}} &\le \gamma\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\gamma-1}\operatorname*{máx}_{i=1}^{N}|\partial_i u(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname*{máx}_{i=1}^{N}|\partial_i u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\|\mathrm{D}u\|_p.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Elijamos γ tal que se cumpla
$$\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1},$$
es decir,
$$\gamma := \frac{p(N-1)}{N-p} > 1.$$
Se sigue que
$$\frac{\gamma N}{N-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1} = p^* \qquad \text{y} \qquad \frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}.$$
En consecuencia (2.21) implica que
$$\|u\|_{p^*} \leq \gamma \|\mathrm{D}u\|_p.$$
□

2.44 Corolario (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, sean $p \in [1, N)$ y $q \in [1, p^*]$. Entonces existe una constante positiva $C = C(N, p, q, \Omega)$ tal que*
$$\|u\|_q \leq C\|\mathrm{D}u\|_p$$
para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En consecuencia, $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ con inyección continua.

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\|u_n - u\|_p \to 0$ y $\|\mathrm{D}u_n - \mathrm{D}u\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. El Teorema 2.43 implica que existe $C_1 = C_1(N, p)$ tal que
$$\|u_m - u_n\|_{p^*} \leq C_1\|\mathrm{D}u_m - \mathrm{D}u_n\|_p$$
para todo $m, n \in \mathbb{N}$. En consecuencia (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\Omega)$ que converge a un $v \in L^{p^*}(\Omega)$. Como $p^* > p$, el Lema 2.36 implica que $u_n \to v$ en $L^p(\Omega)$, es decir, $v = u$. Otra vez usando el Teorema 2.43 obtenemos
$$\|u_n\|_{p^*} \leq C_1\|\mathrm{D}u_n\|_p.$$
Dejando $n \to \infty$ se sigue que
$$\|u\|_{p^*} \leq C_1\|\mathrm{D}u\|_p,$$
y concluimos con el Lema 2.36 para cualquier $q \in [1, p^*]$. □

2.45 Proposición. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. Entonces existe $C > 0$ tal que*
$$\|u\|_2 \leq C\|\mathrm{D}u\|_2$$
para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. **Caso** $N \geq 3$**:** Esto es una consecuencia directa de la desigualdad de Poincaré, Corolario 2.44, porque $2 < N$ y $2 < 2^*$..

Caso $N = 2$**:** Elijamos $q \in (1, 2)$. Se sigue que $q^* = 2q/(2-q) > 2$. Usando el Lema 2.36 y Corolario 2.44 obtenemos (con varias constantes C)

$$\|u\|_2 \leq C\|u\|_{q^*} \leq C\|\mathrm{D}u\|_q \leq C\|\mathrm{D}u\|_2.$$

Caso $N = 1$**:** Sea $\Omega = (a, b)$. Primero supongamos que $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Se sigue que

$$u(x) = \int_a^x u'(s)\,\mathrm{d}s$$

y en consecuencia que

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(s)|\,\mathrm{d}s$$

para todo $x \in \Omega$. Entonces

$$\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1 \qquad \text{para todo } u \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega). \tag{2.22}$$

Utilizando el Lema 2.36 otra vez se sigue que

$$\|u\|_2 \leq C\|\mathrm{D}u\|_2 \qquad \text{para todo } u \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega). \tag{2.23}$$

Si $u \in H^1_0(\Omega)$ entonces existe $(u_n) \subseteq C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $H^1_0(\Omega)$. Es claro que $\|u_n\|_2 \to \|u\|_2$ y $\|\mathrm{D}u_n\|_2 \to \|\mathrm{D}u\|_2$ cuando $n \to \infty$. Entonces la afirmación se sigue de (2.23). □

2.2.4. El Teorema de Rellich-Kondrakov

2.46 Proposición. *Sean $a < b$, $\Omega := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $p \in (1, \infty]$. Para todo $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ existe $v \in C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$ tal que $u = v$ en c.t.p. Esto genera una inyección continua $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$. Además, la inyección $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty]$.*

Demostración. Pongamos $\gamma := 1 - \frac{1}{p}$ si $p < \infty$ y $\gamma = 1$ si $p = \infty$. Sea $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Primero supongamos que $p < \infty$. Para $x, y \in \overline{\Omega}$, $x < y$, se sigue que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(s)\,\mathrm{d}s \right| &\leq \int_x^y |u'|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \left(\int_x^y 1\,\mathrm{d}s \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_x^y |u'|^p\,\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathrm{D}u\|_p\,|x-y|^\gamma. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$[u]_{\gamma;\overline{\Omega}} \leq \|\mathrm{D}u\|_p.$$

Para $p = \infty$ obtenemos para $a < x < y < b$ que

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty \, |x - y|$$

y entonces que

$$[u]_{1;\overline{\Omega}} \leq \|\mathrm{D}u\|_\infty.$$

En ambos casos el Lema 2.36 y (2.22) implican que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{para todo } u \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega). \tag{2.24}$$

Si $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ entonces existe $(u_n) \subseteq C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $W^{1,p} \hookrightarrow L^p(\Omega)$ continuamente esto implica que

$$u_n \to u \qquad \text{en } L^p(\Omega). \tag{2.25}$$

La desigualdad (2.24) implica que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, un espacio de Banach. Entonces $u_n \to v$ en $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ para un $v \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

continuamente, entonces

$$u_n \to v \qquad \text{en } L^p(\Omega).$$

En consecuencia (2.25) implica que $u = v$ en c.t.p. Por la identificación de funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ que coinciden en c.t.p., $u \in C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$, es decir, $W^{1,p}_0(\Omega) \subseteq C^{0,1-1/p}(\overline{\Omega})$. Observando que

$$\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \to \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \qquad \text{y} \qquad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

cuando $n \to \infty$, (2.24) se cumple para todo $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, y esta inyección es continua.

Para $\gamma \in (0, 1]$ cada función en $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ es continua uniformemente, y esta continuidad uniforme solo depende de una cota para $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$. En consecuencia el teorema de Arzelá-Ascoli implica que la inyección $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ es compacta. Obtenemos que

$$W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \underset{\text{compacto}}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

con inyecciones continuas. Como una composición de operadores lineales continuos con un operador lineal compacto es compacto, se sigue la compacidad de $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. □

Si Ω es acotado, si $p \in [1, N)$ y $q \in [1, p^*]$ el Corolario 2.44 implica que $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Como análogo a la Proposición 2.46 nos interesa cuando esta inyección es compacta.

2.47 Teorema (Rellich-Kondrakov)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, sea $p \in [1, N)$ y sea $q \in [1, p^*)$. Entonces la inyección $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacta.*

Demostración. En esta demostración C denota varias constantes positivas que no dependen de ε ni n. Primero supongamos que $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ cumple

$$\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Extendemos u_n a $\mathbb{R}^N$ por 0 y definimos $u_n^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$u_n^\varepsilon(x) := \eta_\varepsilon * u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y) u_n(y)\,\mathrm{d}y,$$

donde η_ε es la función dada en la Definición 2.18.

Fijamos un dominio acotado $V \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\overline{\Omega} \subseteq V$. Se sigue que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 := \operatorname{dist}(\overline{\Omega}, \partial V)\colon\ \operatorname{supp}(u_n^\varepsilon) \subseteq V. \tag{2.27}$$

Probemos que

$$u_n^\varepsilon \to u_n \qquad \text{en } L^q(V) \text{ cuando } \varepsilon \to 0, \text{ uniformemente en } n. \tag{2.28}$$

Fijamos $x \in V$ y calculamos

$$\begin{aligned}
|u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)(u_n(y) - u_n(x))\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(y)(u_n(x-y) - u_n(x))\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{U_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_0^1 \mathrm{D}u_n(x-sy)[y]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \varepsilon \int_{U_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_0^1 \|\mathrm{D}u_n(x-sy)\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Integrando esta expresión sobre V obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_V |u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \varepsilon \int_V \int_{U_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_0^1 \|\mathrm{D}u_n(x-sy)\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon \int_0^1 \int_{U_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_V \|\mathrm{D}u_n(x-sy)\|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&\leq \varepsilon \|\mathrm{D}u_n\|_1 \int_0^1 \int_{U_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= \varepsilon \|\mathrm{D}u_n\|_1,
\end{aligned}$$

y entonces por (2.26) que

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_1 \leq C\varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.29}$$

Por otro lado, el Corolario 2.44 implica que

(2.30) $$\|u_n\|_{p^*} \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La desigualdad de Hölder implica para $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned}
|u_n^\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{p^*-1}{p^*}}\eta_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p^*}}|u_n(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

y entonces para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ que

$$\begin{aligned}
\|u_n^\varepsilon\|_{p^*}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\varepsilon(x)|^{p^*}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)|u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y \\
&= \|u_n\|_{p^*}^{p^*}.
\end{aligned}$$

Junto con (2.30) obtenemos

(2.31) $$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{p^*} \leq C \qquad \text{para todo } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $1/p^* < 1/q \leq 1$, entonces existe $\theta \in (0,1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \theta + (1-\theta)\frac{1}{p^*}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{\theta q} \geq 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{p^*}{(1-\theta)q} \geq 1$$

Para todo $v \in L^{p^*}(V)$ se sigue con la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}
\|v\|_q^q &= \int_V |v(x)|^q \,\mathrm{d}x \\
&= \int_V |v(x)|^{\theta q} |v(x)|^{(1-\theta)q} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)| \,\mathrm{d}x \right)^{\theta q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p^*} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}} \\
&= \|v\|_1^{\theta q} \|v\|_{L^{p^*}(V)}^{(1-\theta)q}.
\end{aligned}$$

Aplicando esto a $u_n^\varepsilon - u_n$ y usando (2.29) y (2.31) obtenemos que

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_q \leq \|u_n^\varepsilon - u_n\|_1^\theta \|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \leq C\varepsilon^\theta \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

y entonces (2.28).

Probemos que

(2.32) Para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ la sucesión $(u_n^\varepsilon)_n$ es acotada y equicontinua uniformemente.

Fijando $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ y $x \in \mathbb{R}^N$, y utilizando (2.30) y el Lema 2.36 observamos que

$$|u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y) |u_n(y)| \,\mathrm{d}y \leq \|\eta_\varepsilon\|_\infty \|u_n\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^N} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $\|u_n^\varepsilon\|_\infty$ es acotada cuando $n \to \infty$. Además, para todo $i = 1, 2, \ldots, N$ calculamos

$$|\partial_i u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \eta_\varepsilon(x-y)| \, |u_n(y)| \,\mathrm{d}y \leq \|\partial_i \eta_\varepsilon\|_\infty \|u_n\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $\|\mathrm{D}u_n^\varepsilon\|_\infty$ es acotada cuando $n \to \infty$. Como $u_n^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, estas observaciones implican (2.32).

Usando un proceso diagonal y (2.32) pasamos a una subsucesión de (u_n) tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $u_n^{1/k}$ converge en $C(\overline{V})$. Demostremos que esta subsucesion (u_n) converge en $L^q(\Omega)$. Sea $\delta > 0$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon_0$ y tal que $\|u_n - u_n^{1/k}\|_q \leq \delta/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por (2.28). Además, por (2.32) existe n_0 tal que $\|u_m^{1/k} - u_n^{1/k}\|_q \leq \delta/3$ para todo $m, n \geq n_0$. Se sigue para todo $m, n \geq n_0$ que

$$\|u_m - u_n\|_q \leq \|u_m - u_m^{1/k}\|_q + \|u_m^{1/k} - u_n^{1/k}\|_q + \|u_n^{1/k} - u_n\|_q \leq \delta.$$

Eso implica que (u_n) es de Cauchy en $L^q(V)$, es decir, (u_n) converge en $L^q(\Omega)$.

Para finalizar la demostración supongamos que $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ cumple (2.26). Existen funciones $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|u_n - v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces también

$\|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es acotado cuando $n \to \infty$ y lo que hemos probado antes implica que pasando a una subsucesión se cumple que $v_n \to u$ en $L^q(\Omega)$ con una función $u \in L^q(\Omega)$. Se sigue que

$$\|u_n - u\|_q \leq \|u_n - v_n\|_q + \|v_n - u\|_q \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

2.48 Corolario. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. Entonces la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta.*

Demostración. **Caso** $N \geq 3$**:** Esto es una consecuencia directa del Teorema 2.47.

Caso $N = 2$**:** Elijamos $q \in (1, 2)$. Se sigue que $q^* = 2q/(2-q) > 2$. Usando el Lema 2.36 y el Teorema 2.47 obtenemos inyecciones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega) \underset{\text{compacto}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Caso $N = 1$**:** Es contenido en la Proposición 2.46. □

3. Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas

En esta parte sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado.

3.1. Existencia de Soluciones

3.1.1. Operadores Diferenciales

Si $u \in C^2(\Omega)$, entonces definimos

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u(x)$$

para $x \in \Omega$. El operador diferencial lineal Δ se llama el *laplaciano*. Nos interesamos en soluciones $u(x)$ de problemas de la forma

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $c, f \in C(\Omega)$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $\varphi \in C_\mathrm{c}^\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta u + cu)\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u \,\varphi + cu\varphi \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} \partial_i u \,\partial_i \varphi + cu\varphi \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi \Big) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Si además u cumple (3.1) obtenemos que

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi \Big) \mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \text{para todo } \varphi \in C_\mathrm{c}^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

La última identidad tiene sentido si sólo supongamos que $u \in L^1_\mathrm{loc}(\Omega)$ tiene derivadas parciales débiles, que $c \in L^\infty(\Omega)$ y que $f \in L^1_\mathrm{loc}(\Omega)$. La función u se puede ver como una solución débil de (3.1) si cumple (3.2) y si se anula por $\partial\Omega$ en una manera. Por otro lado, si

$u \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, entonces la identidad en (3.2) tiene sentido para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Tiene muchas ventajas trabajar en espacios de Hilbert. Entonces vamos a buscar soluciones de (3.1) como soluciones débiles en $H_0^1(\Omega)$.

Nota: Sea E un espacio normado y sea $B\colon E \times E \to \mathbb{R}$ bilineal. En la tarea 1 se demostró que B es continuo si y sólo si

$$\|B\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})} := \sup_{x,y \in S_1 E} |B[x,y]|$$

es finito. Denotemos por $\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales con $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})} < \infty$. Como en la Proposición 1.13 se demuestra que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})}$ es una norma en $\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})$, tal que resulta un espacio de Banach.

Observamos que $\Delta u = \sum_{i,j=1}^N \partial_j(\delta_{ij}\partial_i u)$ para $u \in C^2(\Omega)$. Por eso, mas generalmente, damos la

3.1 Definición. Sean $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ para $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Definimos el *operador diferencial parcial formal de forma divergencia* L por

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^N \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^N b^i \partial_i u + cu. \tag{3.3}$$

Definimos la función bilineal $B \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ asociada con L por

$$B[u,v] := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + \sum_{i=1}^N b^i \partial_i u\, v + cuv \right) \mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, entonces una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumple

$$B[u,v] = (f,v)_2 \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

es una *solución débil* de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Como originalmente nos interesan soluciones diferenciables fuertemente, también introducimos:

3.2 Definición. Sean $a^{ij}, d^i, c \in C(\Omega)$ para $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Definimos el *operador diferencial parcial formal de forma no divergencia* L por

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^N a^{ij}\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^N d^i \partial_i u + cu. \tag{3.7}$$

Si $f \in C(\Omega)$, entonces una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que cumple

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

es una *solución clásica* de esta ecuación diferencial parcial con valores en la frontera.

3.3 Nota. Si $a^{ij} \in C^1(\Omega)$ para $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$, entonces existe una correspondencia entre los operadores formales de forma divergencia y no divergencia, con $d^i = b^i - \sum_{j=1}^{N} \partial_j a^{ij}$.

3.1.2. El Teorema de Lax-Milgram

3.4 Nota. Para buscar soluciones clásicas de (3.8) la idea principal es primero buscar soluciones débiles usando las herramientas que tenemos en espacios de Hilbert. En la segunda etapa hay que probar que las soluciones débiles también son clásicas. Esta parte se llama la teoría de regularidad.

La definición de soluciones débiles por (3.5) inmediatamente nos da una idea como probar existencia de soluciones débiles. Para eso primero necesitamos:

3.5 Teorema (Lax-Milgram)**.** *Sean E un espacio de Hilbert, $B \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ y $\alpha > 0$ tal que*

$$B[x, x] \geq \alpha \|x\|_E^2 \qquad \textit{para todo } x \in E. \tag{3.9}$$

Entonces para todo $f \in E'$ existe $x \in E$ tal que

$$B[x, y] = \langle f, y \rangle \qquad \textit{para todo } y \in E.$$

Además, el mapeo $f \mapsto x$ es un isomorfismo $E' \to E$.

Demostración. Como $B[x, \cdot] \in E'$ para todo $x \in E$, por el teorema de Fréchet-Riesz existe un operador lineal A en E tal que

$$B[x, y] = (Ax, y) \qquad \text{para todo } x, y \in E. \tag{3.10}$$

Obtenemos para $x \in E$ que

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = B[x, Ax] \leq \|B\|_{\mathcal{L}^2(E,\mathbb{R})} \|x\| \, \|Ax\|. \tag{3.11}$$

En consecuencia $A \in \mathcal{L}(E)$ y $(Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2$ para todo $x \in E$. El Lema 1.36(b) implica que A es un isomorfismo.

Si $f \in E'$ entonces el teorema de Fréchet-Riesz nos da $z \in E$ tal que

$$\langle f, y \rangle = (z, y) \qquad \text{para todo } y \in E. \tag{3.12}$$

Pongamos $x := A^{-1} z$ y concluimos. □

3.6 Nota. El teorema de Lax-Milgram es muy semejante a el de Fréchet-Riesz. Si B es simétrico, por $((\cdot,\cdot)) := B[\cdot,\cdot]$ se puede definir un producto escalar nuevo en E tal que su norma es equivalente a la norma original. En este caso la prueba del teorema anterior es la misma como en el de Fréchet-Riesz. Por eso lo nuevo en el teorema de Lax-Milgram es que no se necesita la simetría.

3.7 Definición. Sean $a^{ij} = a^{ji}$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Un operador diferencial parcial formal es elíptico uniformemente en Ω si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) v^i v^j \geq \theta |v|_2^2 \qquad \text{para todo } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^N. \tag{3.13}$$

3.8 Proposición. *Sea L un operador de forma divergencia elíptico y sea B definido como en la Definición 3.1. Entonces $B \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y existen $\alpha > 0$ y $\gamma \geq 0$ tal que*

$$B[u,u] + \gamma \|u\|_2^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Calculamos para $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |B[u,v]| &\leq \sum_{i,j=1}^{N} \|a^{ij}\|_\infty \|\partial_i u\|_2 \|\partial_j v\|_2 + \sum_{i=1}^{N} \|b^i\|_\infty \|\partial_i u\|_2 \|v\|_2 \\ &\qquad + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En consecuencia $B \in \mathcal{L}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

La elipticidad de L implica que para θ como en (3.13) y $u \in H_0^1(\Omega)$ se cumple

$$\begin{aligned} \theta \|\mathrm{D}u\|_2^2 &= \theta \int_\Omega |\nabla u|_2^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} \partial_i u \partial_j u \,\mathrm{d}x \\ &= B[u,u] - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} b^i \partial_i u\, u + c u^2 \right) \mathrm{d}x \\ &\leq B[u,u] + \|\mathrm{D}u\|_2 \|u\|_2 \sum_{i=1}^{N} \|b^i\|_\infty + \|c\|_\infty \|u\|_2^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Como $st \leq (s^2 + t^2)/2$ para $s, t \geq 0$, con $\varepsilon > 0$ obtenemos que

$$\|\mathrm{D}u\|_2 \|u\|_2 = \left(\sqrt{2\varepsilon}\, \|\mathrm{D}u\|_2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \|u\|_2 \right) \leq \varepsilon \|\mathrm{D}u\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_2^2.$$

Elijamos $\varepsilon > 0$ tal pequeño que
$$\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \|b^i\|_\infty \le \frac{\theta}{2}.$$
Con eso se sigue de (3.14) que
$$\frac{\theta}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \frac{\theta}{2}(\|\mathrm{D}u\|_2^2 + \|u\|_2^2) \le B[u,u] + C\|u\|_2^2,$$
la afirmación. $\square$

3.9 Nota. Para $L = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j a^{ij}\partial_i + c$ donde $c \ge 0$ se sigue de (3.14) que

$$B[u,u] \ge \theta\|\mathrm{D}u\|_2^2. \tag{3.15}$$

La desigualdad de Poincaré, Corolario 2.45, implica que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_2^2 \le C\|\mathrm{D}u\|_2^2$. Entonces
$$B[u,u] \ge \frac{\theta}{C+1}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
para todo $u \in H^1_0(\Omega)$. En consecuencia, respecto al resultado de la Proposición 3.8, podemos elegir $\gamma = 0$ en esta situación. Particularmente esto aplica cuando $L = -\Delta + c$ con una función $c \ge 0$.

3.10 Teorema. *Sea L un operador elíptico de forma divergencia. Entonces existe $\gamma \ge 0$ que cumple: Si $\mu \ge \gamma$ y $f \in L^2(\Omega)$ entonces existe solución débil única de*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

Denotando $L_\mu := L + \mu$ para $\mu \ge \gamma$ y escribiendo $L_\mu^{-1} f \in H^1_0(\Omega)$ para la solución débil única de (3.16) *si $f \in L^2(\Omega)$, entonces $L_\mu^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1_0(\Omega))$.*

Demostración. Elijamos γ como en la Proposición 3.8, fijamos $\mu \ge \gamma$, y definimos la función bilineal $B_\mu \in \mathcal{L}^2(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$ por
$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu(u,v)_2.$$
Esta función B_μ corresponde al operador $L_\mu[u] := Lu + \mu u$ como en la Definición 3.1. Por la Proposición 3.8 existe $\alpha > 0$ tal que
$$B_\mu[u,u] \ge \alpha\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \qquad \text{para todo } u \in H^1_0(\Omega).$$
Fijando $f \in L^2(\Omega)$ definimos $g \in H^1_0(\Omega)'$ por
$$\langle g, u\rangle := (f,u)_2.$$

Es claro que

$$\|g\|_{H_0^1(\Omega)'} \leq \|f\|_2. \tag{3.17}$$

El Teorema 3.5 implica la existencia de $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B_\mu[u, v] = \langle g, v\rangle = (f, v)_2 \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Como la aplicación $g \mapsto u$ es un isomorfismo, y utilizando (3.17), existe $C > 0$ que no depende de g (y f) tal que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{H_0^1(\Omega)'} \leq C\|f\|_2.$$

□

3.11 Ejemplo. Si $L = -\Delta + c$ con $c \in L^\infty(\Omega)$ y $c \geq 0$ la Nota 3.9 implica que

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f, \qquad && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

tiene solución débil única para todo $f \in L^2(\Omega)$.

3.1.3. La Alternativa de Fredholm para Ecuaciones

3.12 Nota. En el Teorema 3.10 podemos definir $B_\mu \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ por $B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v)_2$. Entonces $L_\mu u = f$ es una manera formal de decir que

$$B_\mu[u, v] = (f, v)_2 \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.18}$$

Pongamos $E := H_0^1(\Omega)$. Definimos $L_\mu \in \mathcal{L}(E, E')$ por $L_\mu u := B_\mu[u, \cdot]$. Entendido en esta manera, L_μ está bien definido como operador lineal acotado, no sólo formalmente. Si $\mu \geq \gamma$ como en La Proposición 3.8, el Teorema 3.5 implica que L_μ es un isomorfismo.

Ahora nos interesa que es el papel del espacio $L^2(\Omega)$ en esto. Mas abstracto, sean E, V espacios de Hilbert (aquí V corresponde a $L^2(\Omega)$) y sea $\eta \in \mathcal{L}(E, V)$. Usando una norma equivalente en E podemos suponer que $\|\eta\|_{\mathcal{L}(E,V)} \leq 1$. Definimos $\vartheta \colon V \to E'$ por

$$\langle \vartheta u, v\rangle := (u, \eta v)_V.$$

Se sigue que

$$|\langle \vartheta u, v\rangle| \leq \|u\|_V \|\eta v\|_V \leq \|u\|_V \|v\|_E$$

y en consecuencia que $\vartheta u \in E'$ con $\|\vartheta u\|_{E'} \leq \|u\|_V$. Por eso $\vartheta \in \mathcal{L}(V, E')$ y $\|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')} \leq 1$. Obtenemos un diagrama

$$E \xrightarrow{\eta} V \xrightarrow{\vartheta} E'. \tag{3.19}$$

Si η, ϑ son inyectivos con imágenes densos, entonces (3.19) está conocido como un *triple de Gelfand*.

Supongamos que para $B \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ existe $\alpha > 0$ tal que se cumple (3.9). Definimos $L, M \in \mathcal{L}(E, E')$ por $Lu := B[u, \cdot]$ y $Mu := B[\cdot, u]$. El Teorema 3.5 de Lax-Milgram implica que L, M son isomorfismos. Definimos $G_L, G_M \in \mathcal{L}(V)$ por

$$G_L := \eta \circ L^{-1} \circ \vartheta, \qquad G_M := \eta \circ M^{-1} \circ \vartheta, \tag{3.20}$$

los *operadores de Green* asociados a L, M.

3.13 Proposición. *Los operadores de Green G_L y G_M son adjuntos en $\mathcal{L}(V)$, es decir, $G_L^* = G_M$.*

Demostración. La definición de L, M implica que

$$B[u, v] = \langle Lu, v\rangle = \langle Mv, u\rangle \qquad \text{para todo } u, v \in E. \tag{3.21}$$

En consecuencia

$$B[L^{-1}f, v] = \langle f, v\rangle = B[v, M^{-1}f] \qquad \text{para todo } f \in E',\ v \in E. \tag{3.22}$$

Para $u, v \in V$ calculamos

$$\begin{aligned}
(G_L u, v)_V &= (v, G_L u)_V \\
&= (v, \eta L^{-1}\vartheta u)_V && \text{definición de } G_L \\
&= \langle \vartheta v, L^{-1}\vartheta u\rangle && \text{definición de } \vartheta \\
&= B[L^{-1}\vartheta u, M^{-1}\vartheta v] && (3.22) \\
&= \langle \vartheta u, M^{-1}\vartheta v\rangle && (3.22) \\
&= (u, \eta M^{-1}\vartheta v)_V && \text{definición de } \vartheta \\
&= (u, G_M v)_V && \text{definición de } G_M
\end{aligned}$$

y concluimos. $\square$

Apliquemos esta construcción abstracta a operadores diferenciales. Sean $E := H_0^1(\Omega)$, $V := L^2(\Omega)$, L un operador elíptico de forma divergencia y $B \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ la función bilineal asociada con L. Por tanto, podemos interpretar $L \in \mathcal{L}(E, E')$ por $Lu = B[u, \cdot]$. Elegimos $\gamma \geq 0$ y $\alpha > 0$ como en la Proposición 3.8. Para $\mu \geq \gamma$ definimos $B_\mu = B + \mu(\cdot, \cdot)_V$ y el isomorfismo $L_\mu \in \mathcal{L}(E, E')$ por $L_\mu u := B_\mu[u, \cdot]$ (véase la Nota 3.12). Sea $\eta \colon E \hookrightarrow V$ la inclusión, y $\vartheta \colon V \to E'$ dado como en (3.19). Como η es compacto por el Corolario 2.48, el operador de Green $G_{L_\mu} = \eta L_\mu^{-1}\vartheta \in \mathcal{L}(V)$ es compacto.

Nos recordamos que formalmente L está dado por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^{N} b^i \partial_i u + cu. \tag{3.23}$$

La ecuación que nos interesa es

$$
\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}
$$

o, equivalentemente,

$$
\begin{cases} L_\mu u = f + \mu u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}
$$

Por tanto, es suficiente buscar soluciones débiles de (3.25). Formalmente, $u \in E$ es una solución débil de (3.25) si y sólo si

$$
u - \mu L_\mu^{-1} u = L_\mu^{-1} f. \tag{3.26}
$$

Mas adelante vamos a dar una fundación analítica a esta idea y buscar soluciones de la ecuación

$$
(I - K)u = g \tag{3.27}
$$

en V, donde $K := \mu G_{L_\mu} \in \mathcal{L}(V)$ es compacto y $g := G_{L_\mu} f \in V$. Para poder aplicar la Alternativa de Fredholm (Corolario 1.80) a (3.27), necesitamos saber como expresar $G_{L_\mu}^*$, el operador adjunto de G_{L_μ}, como el operador de Green de un operador diferencial.

Definimos $B^* \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ por

$$
B^*[u, v] := B[v, u] \tag{3.28}
$$

y $L^* \in \mathcal{L}(E, E')$ por

$$
L^* u := B^*[u, \cdot] = B[\cdot, u]. \tag{3.29}
$$

Para $u, v \in E$ se sigue de $a^{ij} = a^{ji}$ que

$$
\begin{aligned}
\langle L^* u, v \rangle = B^*[u, v] = B[v, u] &= \sum_{i,j=1}^N (a^{ij} \partial_i v, \partial_j u)_V + \sum_{i=1}^N (b^i \partial_i v, u)_V + (cv, u)_V \\
&= \sum_{i,j=1}^N (\partial_i v, a^{ij} \partial_j u)_V + \sum_{i=1}^N (\partial_i v, b^i u)_V + (v, cu)_V \\
&= \sum_{i,j=1}^N (a^{ij} \partial_i u, \partial_j v)_V + \sum_{i=1}^N (b^i u, \partial_i v)_V + (cu, v)_V .
\end{aligned}
$$

3.14 Definición. El *operador formal L^* adjunto a L* se define por

$$L^*u := -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \sum_{i=1}^{N} \partial_i(b^i u) + cu. \tag{3.30}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, entonces una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumple

$$B^*[u,v] = (f,v)_V \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.31}$$

es una *solución débil* de la ecuación

$$\begin{cases} L^*u = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.32}$$

la *ecuación adjunta a* (3.24).

Definimos $B_\mu^* := B^* + \mu(\cdot,\cdot)_V$ para $\mu \geq \gamma$. Como $B^*[u,u] = B[u,u]$, se sigue que

$$B_\mu^*[u,u] \geq \alpha \|u\|_E^2 \qquad \text{para todo } u \in E. \tag{3.33}$$

El operador $L_\mu^* \in \mathcal{L}(E,E')$, dado por $L_\mu^* u := B_\mu^*[u,\cdot]$, es un isomorfismo. Claramente, $B_\mu^*[u,v] = B_\mu[v,u]$, y en seguida, L_μ^* es el operador adjunto a L_μ. La Proposición 3.13 dice que

$$G_{L_\mu}^* = G_{L_\mu^*}. \tag{3.34}$$

Para la formulación del teorema siguiente necesitamos los problemas elípticos homogéneos:

$$\begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

y

$$\begin{cases} L^*u = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.36}$$

3.15 Teorema. *Se cumple exactamente una de las alternativas:*

(I) *Para todo $f \in L^2(\Omega)$ cada una de las ecuaciones* (3.24) *y* (3.32) *posee solución débil única.*

(II) *Las ecuaciones homogéneas* (3.35) *y* (3.36) *poseen soluciones no triviales. En este caso los espacios de soluciones de ambas ecuaciones son de dimensión finita igual. Para $f \in L^2(\Omega)$ la ecuación* (3.24) *tiene una solución (no única) si y sólo si $(f,u)_2 = 0$ para todas soluciones débiles u de* (3.36). *La ecuación* (3.32) *tiene una solución (no única) si y sólo si $(f,u)_2 = 0$ para todas soluciones débiles u de* (3.35).

Demostración. Seguimos usando $E = H_0^1(\Omega)$ y $V = L^2(\Omega)$. Definimos $\eta \in \mathcal{L}(E, V)$ como la inyección natural. Por Corolario 2.48 η es compacto.

Fijamos $\mu \geq \gamma$ tal que $\mu > 0$. Si $f \in V$, entonces se sigue que $u \in E$ es solución débil de (3.24) si y sólo si $B_\mu[u, v] = (f + \eta\mu u, \eta v)_V = \langle \vartheta[f + \eta\mu u], v \rangle$ para todo $v \in E$, es decir, $\vartheta[f + \mu\eta u] = L_\mu u$. Equivalentemente $G_{L_\mu}[f + \mu\eta u] = \eta u$ o $(I - K)[\eta u] = g$ donde $K := \mu G_{L_\mu} \in \mathcal{L}(V)$ es compacto y $g := G_{L_\mu} f \in V$. Como $\mathcal{R}(G_{L_\mu}) \subseteq \mathcal{R}(\eta)$ y η es inyectivo,

(3.37) η es una biyección lineal entre soluciones débiles de (3.24) y soluciones $v \in V$ de $(I - K)v = g$.

Por la Proposición 3.13 obtenemos para el operador adjunto de K que

$$K^* = \mu G_{L_\mu^*}. \tag{3.38}$$

En consecuencia se sigue análogamente que

(3.39) η es una biyección lineal entre soluciones débiles de (3.32) y soluciones $v \in V$ de $(I - K^*)v = g$.

Como K es compacto, el Teorema 1.79 sobre la alternativa de Fredholm implica que si no se cumple (i), los núcleos de $I - K$ y $I - K^*$ tienen la misma dimensión positiva. Sea $f \in V$ y $g = G_{L_\mu} f$. Por la segunda alternativa del Teorema 1.79 $g \in \mathcal{R}(I - K)$ si y sólo si $g \in \mathcal{N}(I - K^*)^{\perp_V}$, es decir si y sólo si para todo $v \in \mathcal{N}(I - K^*)$

$$0 = \mu(g, v)_V = (Kf, v)_V = (f, K^* v)_V = (f, v)_V.$$

Aquí hemos usado $\mu > 0$. Como $\mathcal{R}(K^*) = \mathcal{R}(G_{L_\mu^*}) \subseteq \mathcal{R}(\eta)$, entonces (3.24) tiene solución débil si y sólo si $(f, u)_2 = 0$ para todas soluciones débiles u de (3.32). El resto se sigue análogamente. $\square$

3.1.4. El Espectro de Operadores Diferenciales

3.16 Teorema. *Sea Σ el conjunto de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.40}$$

tiene una solución débil en $H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Entonces

(a) *Σ no tiene punto de agregación. En consecuencia Σ es numerable. Si Σ no es finito entonces $\Sigma = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}$ donde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ y $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*

(b) *Si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$ entonces*

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.41}$$

tiene solución débil única para todo $f \in L^2(\Omega)$.

El conjunto Σ *es el* espectro de la ecuación (3.40).

3.17 Nota. Cada valor propio aparece k veces en la sucesión de los λ_n, donde k es la dimensión del espacio de funciones propias correspondiente al valor propio.

Demostración del Teorema 3.16. Usemos la notación de la demostración del Teorema 3.15. Podemos suponer que $\mu > 0$. Recordemos que $K \in \mathcal{L}(V)$ es compacto.

(a) Si $\lambda \in \Sigma$ y si $u \neq 0$ es una solución débil de (3.40), entonces

$$0 < \alpha \|u\|_E^2 \leq B_\mu[u,u] = (\lambda + \mu)(\eta u, \eta u)_V = (\lambda + \mu)\|u\|_2^2.$$

Se sigue que

$$\lambda + \mu > 0 \qquad \text{para todo } \lambda \in \Sigma. \tag{3.42}$$

Por (3.37) η es una biyección lineal entre las soluciones débiles $u \in E$ de (3.40) y las soluciones $v \in V$ de

$$(I - K)v = \frac{\lambda}{\mu} K v,$$

o equivalentemente de

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} I - K\right) v = 0. \tag{3.43}$$

Se sigue que

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \in \sigma(K) \backslash \{0\}. \tag{3.44}$$

Inversamente, sea $s \in \sigma(K)\backslash\{0\}$. Como K es compacto, existe un vector propio $v \in V\backslash\{0\}$ de K para el valor propio s. Calculemos con $u := L_\mu^{-1}\vartheta v$:

$$\begin{aligned} s\|v\|_V^2 = (Kv, v)_V = \mu(\eta L_\mu^{-1}\vartheta v, v)_V = \mu\langle \vartheta v, L_\mu^{-1}\vartheta v\rangle& \\ = \mu\langle L_\mu u, u\rangle = \mu B_\mu[u,u] \geq \mu\alpha\|u\|_E^2 > 0& \end{aligned}$$

y obtenemos $s > 0$. Con $\lambda := \mu(1 - s)/s$ se sigue que

$$s = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Además, usando la equivalencia de (3.43) con (3.40), se obtiene $\lambda \in \Sigma$. Entonces, $\lambda \mapsto \mu/(\lambda + \mu)$ es una biyección entre Σ y $\sigma(K)\backslash\{0\}$ con inversa $s \mapsto \mu(1 - s)/s$. En seguida,

$$\Sigma = \left\{ \frac{\mu(1 - s)}{s} \;\middle|\; s \in \sigma(K)\backslash\{0\} \right\}. \tag{3.45}$$

Si $\sigma(K)\backslash\{0\}$ es infinito, entonces consiste de una sucesión $(s_n) \subseteq (0, \infty)$ tal que $s_n \to 0$. Por (3.45) Σ consiste de una sucesión λ_n tal que $\lambda_n \to \infty$.

(b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$. La demostración de la parte (a) implica que

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \in \rho(K). \tag{3.46}$$

Por (3.37) η es una biyección lineal entre las soluciones débiles $u \in E$ de (3.41) y de soluciones $v \in V$ de

$$(I - K)v = \frac{1}{\mu}(\lambda K v + K f),$$

o equivalentemente, de

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} I - K\right) v = \frac{1}{\lambda + \mu} K f. \tag{3.47}$$

Entonces (3.46) implica la afirmación. $\square$

3.18 Teorema. *Sean $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ y L un operador elíptico de forma divergencia con espectro Σ como en el Teorema* 3.16*.*

(a) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|u\|_2 + \|f\|_2) \tag{3.48}$$

para todo $f \in L^2(\Omega)$ y todas soluciones débiles $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.24)*.*

(b) *Si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_2 \tag{3.49}$$

para todo $f \in L^2(\Omega)$ y la solución débil única $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.41)*.*

Demostración. Usemos la notación de la demostración del Teorema 3.15 otra vez, suponiendo que $\mu \geq \gamma$ y $\mu > 0$. Es claro que

$$\|\eta\|_{\mathcal{L}(E,V)},\ \|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')} \leq 1. \tag{3.50}$$

(a) Sean $f \in V$ y $u \in E$ una solución débil de (3.24). Por la discusión antes de (3.37) sabemos que $u = L_\mu^{-1}\vartheta[f + \mu\eta u]$ y entonces

$$\|u\|_E \leq \|L_\mu^{-1}\|_{\mathcal{L}(E',E)}\|\vartheta\|_{\mathcal{L}(V,E')}(\mu\|\eta u\|_V + \|f\|_V).$$

Usemos (3.50) y pongamos $C := \|L_\mu^{-1}\|_{\mathcal{L}(E',E)} \max\{1, \mu\}$. Este C no depende de f ni de u y entonces concluimos.

(b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\Sigma$, sea $f \in V$ y sea u una solución débil de (3.41). La ecuación (3.47) implica que

$$\eta u = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} I - K\right)^{-1} \frac{1}{\lambda+\mu} K f$$

y entonces que

$$\|\eta u\|_V \leq C\|f\|_V$$

con una constante $C > 0$ que no depende de f ni de u. Junto con la parte (a) concluimos. $\square$

3.19 Teorema. *Sean $a^{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ y L un operador elíptico de forma divergencia*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + cu.$$

Entonces $\Sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ y existen soluciones débiles $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} Lu = \lambda_n \varphi_n, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.51}$$

tal que $\{\varphi_n\}$ es una base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$.

Además, si $c \geq 0$, entonces $\lambda_1 > 0$.

Demostración. Seguimos usando la notación de la prueba del Teorema 3.15. Como $L = L^*$ y $B = B^*$, el operador de Green es simétrico: $G^*_{L_\mu} = G_{L^*_\mu} = G_{L_\mu}$. Por (3.37) η es una biyección lineal entre las soluciones de (3.51) y de

$$\left(\frac{\mu}{\lambda_n+\mu} I - K\right) v = 0. \tag{3.52}$$

En consecuencia, el Teorema 1.87 implica la existencia de funciones v_n que son funciones propias de K correspondiente a los valores propios $\mu/(\lambda_n+\mu)$ de K y que dan una base Hilbertiana de V. Esto implica la primera afirmación.

Si $c \geq 0$ y si φ_1 es una función propia correspondiente a λ_1, entonces por la Nota 3.9

$$0 < C\|\varphi_1\|_E^2 \leq B[\varphi,\varphi] = \lambda_1\|\varphi_1\|_2^2,$$

es decir, $\lambda_1 > 0$. $\square$

3.20 Ejemplos. (a) En $\Omega := (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ consideramos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.53}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias dice que los valores propios son $\lambda_n = \pi^2 n^2$ y las funciones propias $\varphi_n(x) = \sin(\pi n x)$, para $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que los φ_n forman una base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$. El operador de Green correspondiente está dado en la tarea 6, ejercicio 12, como un operador integral.

(b) En $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ consideramos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.54}$$

El «Ansatz» $u(x,y) = v(x)w(y)$ produce los valores propios $\lambda_{m,n} := \pi^2(m^2 + n^2)$ y las funciones propias $\varphi_{m,n}(x,y) := \sin(\pi m x)\sin(\pi n y)$. Se puede demostrar que estos son todos valores propios y funciones propias, es decir, los $\varphi_{m,n}$ forman una base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$.

3.2. Propiedades de Soluciones

3.2.1. Regularidad

3.21 Teorema (Desigualdad de Morrey)**.** *Sean $N < p \leq \infty$. Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ se cumple*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

donde $\gamma := 1 - N/p$.

Demostración. Véase la demostración de «Theorem 4» en la sección 5.6 de «Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations». □

3.22 Corolario. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces existe la inclusión continua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Similar como la segunda parte de la demostración de la Proposición 2.46. □

3.23 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. Ω es de clase C^1 si existe $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Omega = f^{-1}((-\infty, 0))$, $\partial\Omega = f^{-1}(0)$ y $\nabla f \neq 0$ en $\partial\Omega$.

3.24 Nota. Ω es de clase C^1 si y sólo si para todo $z \in \partial\Omega$ existe un subespacio X de $\mathbb{R}^N$ de dimensión $N-1$, una vecindad U de 0 en X, una vecindad V de 0 en $X^\perp$, y una función $h \in C^1(U)$ tal que (identificando $X^\perp$ con $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \Omega \cap (z + U + V) &= z + \{\, x + s \mid x \in U,\ s \in V,\ s < h(x) \,\}, \\ \partial\Omega \cap (z + U + V) &= z + \{\, x + s \mid x \in U,\ s \in V,\ s = h(x) \,\}. \end{aligned}$$

Informalmente: Localmente $\partial\Omega$ es la gráfica de una función que es C^1, y Ω sólo está en un lado de $\partial\Omega$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces denotamos por $\lfloor \alpha \rfloor$ el *piso de* α y por $\lceil \alpha \rceil$ el *techo de* α:

$$\lfloor \alpha \rfloor := \text{máx}\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha \,\},$$
$$\lceil \alpha \rceil := \text{mín}\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \geq \alpha \,\}.$$

Se tiene que $\lfloor \alpha \rfloor, \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} \alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha, \\ \alpha \leq \lceil \alpha \rceil < \alpha + 1 \end{aligned} \tag{3.55}$$

caracterizan estos números.

3.25 Teorema (Sin prueba)**.** *Sean* $N \in \mathbb{N}$*,* $k \in \mathbb{N}_0$*,* $p \in [1, \infty]$*, y sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado, y de clase* C^1*. Además asumimos que*

$$k > \frac{N}{p} \tag{3.56}$$

y definimos

$$\gamma := \begin{cases} \left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil - \frac{N}{p} & \textit{si } \frac{N}{p} \notin \mathbb{N} \\ \textit{cualquier numero en } (0,1) & \textit{si } \frac{N}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces existe un encaje continuo

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k - \lfloor \frac{N}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\overline{\Omega}).$$

Demostración. Los capítulos 5.3, 5.4 y 5.6 en el libro de Evans. □

Definimos los espacios $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ análogamente como $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, véase la Sección 2.1.4. Asumimos que L es un operador elíptico de forma divergencia, con la función bilineal B asociada, ahora mas generalmente definida sobre $H^1(\Omega)$. Si $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$, entonces decimos que u es una solución débil de $Lu = f$ en Ω si

$$B[u, \varphi] = (f, \varphi)_2 \qquad \text{para todo } \varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\Omega). \tag{3.57}$$

3.26 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Escribimos $U \subset\subset \Omega$ si $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto y acotado, y si $\overline{U} \subseteq \Omega$.

3.27 Teorema. *Sean* $a^{ij} \in C^1_{\text{B}}(\Omega)$*,* $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ *y* $f \in L^2(\Omega)$*. Sea* $u \in H^1(\Omega)$ *una solución débil de*

$$Lu = f \qquad \textit{en } \Omega. \tag{3.58}$$

Entonces $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$*. Si* $U \subset\subset \Omega$*, entonces existe* $C > 0$ *que no depende de* u *tal que*

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.59}$$

Demostración. «Theorem 1» de la sección 6.3 en el Evans. □

3.28 Nota. El resultado dice que u cumple

$$\widetilde{L}u = f \qquad \text{en c.t.p. de } \Omega, \tag{3.60}$$

donde $\widetilde{L}$ es el operador de forma no divergencia relacionado con L.

3.29 Teorema. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $a^{ij}, b^i, c \in C_{\mathrm{B}}^{m+1}(\Omega)$ y $f \in H^m(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de $Lu = f$ en Ω, entonces $u \in H_{\mathrm{loc}}^{m+2}(\Omega)$. Además, si $U \subset\subset \Omega$, entonces existe $C > 0$ que no depende de u tal que*

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^m(\Omega)}). \tag{3.61}$$

Demostración. Utilicemos inducción sobre m. A_m sea la afirmación del teorema para un m. A_0 está contenido en el Teorema 3.27. Entonces supongamos que valen $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ y demostremos que vale A_{m+1}.

Sean

$$a^{ij}, b^i, c \in C_{\mathrm{B}}^{m+2}(\Omega),\ f \in H^{m+1}(\Omega) \tag{3.62}$$

y $u \in H^1(\Omega)$ una solución débil de $Lu = f$ en Ω. Demostremos que $u \in H_{\mathrm{loc}}^{m+3}(\Omega)$. Si $U \subset\subset \Omega$, entonces también demostremos

$$\|u\|_{H^{m+3}(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}). \tag{3.63}$$

Existe $V \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto tal que $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$. Por A_m se cumplen

$$u \in H_{\mathrm{loc}}^{m+2}(\Omega) \tag{3.64}$$

y

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^m(\Omega)}). \tag{3.65}$$

Fijamos un multiíndice α tal que $|\alpha|_1 = m + 1$. Para cualquier $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(V)$ definimos

$\tilde{\varphi} := (-1)^{|\alpha|_1}\partial^\alpha\varphi \in C_c^\infty(V)$. Ponemos $\tilde{u} := \partial^\alpha u$. Como u es solución débil, se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= B[u,\tilde{\varphi}] - (f,\tilde{\varphi})_2 \\
&= (-1)^{|\alpha|_1}\int_V \left(\sum_{ij} a^{ij}\partial_i u \partial_j \partial^\alpha\varphi + \Big(\sum_i b^i\partial_i u + cu\Big)\partial^\alpha\varphi\right)\,\mathrm{d}x - (-1)^{|\alpha|_1}\int_V f\partial^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_V \left(\sum_{ij} a^{ij}\partial_i\partial^\alpha u\partial_j\varphi + \Big(\sum_i b^i\partial_i\partial^\alpha u + c\partial^\alpha u\Big)\varphi\right)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_V \Bigg(\partial^\alpha f - \sum_{\substack{\beta\le\alpha\\ \beta\ne\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\Big(-\sum_{ij}\partial_j(\partial^{\alpha-\beta}a^{ij}\partial^\beta\partial_i u) \\
&\qquad\qquad + \sum_i \partial^{\alpha-\beta}b^i\partial^\beta\partial_i u + \partial^{\alpha-\beta}c\partial^\beta u\Big)\Bigg)\varphi\,\mathrm{d}x \\
&= B[\tilde{u},\varphi] - (\tilde{f},\varphi)_2,
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{f} = \partial^\alpha f - \sum_{\substack{\beta\le\alpha\\ \beta\ne\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\Big(-\sum_{ij}\partial_j(\partial^{\alpha-\beta}a^{ij}\partial^\beta\partial_i u) + \sum_i \partial^{\alpha-\beta}b^i\partial^\beta\partial_i u + \partial^{\alpha-\beta}c\partial^\beta u\Big).$$

Por (3.62), (3.64) y (3.65) se tiene que $\tilde{f} \in L^2(V)$ y

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(V)} \le C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}). \tag{3.66}$$

En seguida, $\tilde{u} \in H^1(V)$ es una solución débil de $L\tilde{u} = \tilde{f}$. A_0 implica que $\tilde{u} \in H^2_{\mathrm{loc}}(V)$, y junto con (3.65) y (3.66) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{H^2(U)} &\le C(\|\tilde{u}\|_{L^2(V)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(V)}) \\
&\le C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Esta desigualdad se cumple para todo α con $|\alpha|_1 = m+1$. Por tanto $u \in H^3(U)$ y se cumple (3.63). □

3.30 Teorema. *Sean $a^{ij}, b^i, c, f \in C_B^\infty(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de $Lu = f$, entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. El Teorema 3.29 implica que $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. El Teorema 3.25 dice que $u \in C^k(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Regresamos al problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.68}$$

Con otro método se puede obtener un resultado mejor sobre la regularidad y existencia de una solución clásica, véase el Libro «Elliptic Partial Differential Equations of Second Order» de Gilbarg y Trudinger. Un resultado que se obtiene es:

3.31 Teorema (sín prueba)**.** *Sean Ω de clase C^2, $\gamma \in (0,1]$, $a^{ij} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ y $b^i, c, f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Sea L un operador elíptico de forma divergencia y $\widetilde{L}$ el operador de forma no divergencia asociado con L. Entonces toda solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de* (3.68) *satisface $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y es una solución clásica de*

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.69}$$

3.2.2. Positividad

En esta subsección sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, y sea L un operador elíptico de forma no divergencia, tal que $a^{ij}, d^i, c \in C(\overline{\Omega})$.

3.32 Definición. Sea $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Definimos

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \qquad u^-(x) := -\min\{u(x), 0\}.$$

En seguida $u^\pm \geq 0$ y $u = u^+ - u^-$.

3.33 Definición. Una función $u \in C^2(\Omega)$ es una *subsolución* (*supersolución*) si $Lu \leq 0$ ($Lu \geq 0$) en Ω.

3.34 Teorema (Principio débil del máximo)**.** *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una subsolución (resp. supersolución).*

(a) *Si $c \equiv 0$, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \qquad (\textit{resp. } \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u). \tag{3.70}$$

(b) *Si $c \geq 0$, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \qquad (\textit{resp. } \min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u^-)). \tag{3.71}$$

(c) *Si $c \geq 0$ y $Lu = 0$, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{3.72}$$

Demostración.

(a) Sea u una subsolución, es decir, $Lu \leq 0$. Tenemos que demostrar que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.73}$$

Primero trataremos el caso donde $Lu < 0$, y demostremos que u no tiene máximo local en Ω. Eso demostrará (3.73) en este caso. Supongamos por contradicción que existe un máximo local $x_0 \in \Omega$ de u. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matriz formada por los $a^{ij}(x_0)$. Como A es simétrica y positiva definida (L es elíptico), existe una matriz ortogonal $Q \in O(N)$ tal que $G := QAQ^T$ es diagonal. Entonces G también es positiva definida, es decir, $g^{11}, g^{22}, \ldots, g^{NN} > 0$. Sean q^{ij} las coordenadas de Q, y sea $H \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la Hessiana de u en x_0, con coordenadas $h^{ij} := \partial_j\partial_i u(x_0)$. Como x_0 es un máximo local de u, H es negativa semidefinida, y también QHQ^T es simétrica negativa semidefinida. Particularmente sus elementos en la diagonal son no positivas, es decir,

$$\sum_{i,j=1}^{N} q^{ki}h^{ij}q^{kj} \leq 0 \qquad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.74}$$

La identidad $A = Q^T GQ$ implica

$$a^{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^{N} q^{ki}g^{kk}q^{kj}$$

y por tanto con $g^{kk} > 0$ y (3.74)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x_0)\partial_j\partial_i u(x_0) &= \sum_{i,j,k=1}^{N} q^{ki}g^{kk}q^{kj}h^{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{N} g^{kk} \sum_{i,j=1}^{N} q^{ki}h^{ij}q^{kj} \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Por otro lado, x_0 siendo un punto crítico de u, se tiene

$$\partial_i u(x_0) = 0 \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.76}$$

En consecuencia, (3.75) y (3.76) implican

$$Lu(x_0) = -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x_0)\partial_j\partial_i u(x_0) + \sum_{i=1}^{N} d^i\partial_i u(x_0) \geq 0,$$

contradiciendo $Lu < 0$ en Ω. Entonces está probado que, si $Lu < 0$ en Ω, u no tiene máximo local en Ω, es decir, se cumple (3.73).

Ahora sea $Lu \leq 0$. Fijemos $\gamma > \|d^1\|_\infty/\theta$, donde θ es la constante que aparece en la definición de elipticidad de L. Calculamos

$$Le^{\gamma x^1} = (-\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x^1} \leq (-\gamma^2\theta + \gamma\|b^1\|_\infty)e^{\gamma x^1} < 0. \tag{3.77}$$

Para todo $\varepsilon > 0$ eso implica $L(u + \varepsilon e^{\gamma x^1}) < 0$, y entonces, por lo anterior,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon e^{\gamma x^1}) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x^1}).$$

Dejando $\varepsilon \to 0$, obtenemos (3.73).

Falta el caso de una supersolución. Entonces sea $Lu \geq 0$. Se sigue que $L(-u) = -Lu \leq 0$. La parte anterior implica que

$$\min_{\overline{\Omega}} u = -\max_{\overline{\Omega}}(-u) = -\max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u.$$

(b) Sea $c \geq 0$. Supongamos primero que $Lu \leq 0$ y definimos $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. Si $u^+ \equiv 0$, entonces $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$ es trivial. Supongamos que $u^+ \not\equiv 0$, es decir, $\Omega^+ \neq \varnothing$. Ponemos

$$L_0 := -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\partial_j\partial_i + \sum_{i=1}^{N} d^i(x)\partial_i.$$

Entonces

$$L_0 u \leq L_0 u + cu = Lu \leq 0 \qquad \text{en } \Omega^+.$$

Del inciso (a) obtenemos

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u^+ = \max_{\overline{\Omega^+}} u^+ = \max_{\partial\Omega^+} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

En la última desigualdad hemos usado que $u^+ = 0$ en $\partial\Omega^+ \cap \Omega$.

Ahora supongamos que $Lu \geq 0$, es decir, $L(-u) \leq 0$. Por la parte anterior

$$\min_{\overline{\Omega}} u = -\max_{\overline{\Omega}}(-u) \geq -\max_{\partial\Omega}(-u)^+ = -\max_{\partial\Omega} u^- = \min_{\partial\Omega}(-u^-).$$

(c) Sea $c \geq 0$ y $Lu = 0$ en Ω. Por el inciso (b) se sigue que

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{\Omega}}|u| &= \max\{\max_{\overline{\Omega}} u,\ \max_{\overline{\Omega}}(-u)\} \\
&\leq \max\{\max_{\partial\Omega} u^+,\ \max_{\partial\Omega}(-u)^+\} \\
&= \max\{\max_{\partial\Omega} u^+,\ \max_{\partial\Omega} u^-\} \\
&= \max_{\partial\Omega}|u|.
\end{aligned}$$

□

3.35 Lema (Lema del punto en la frontera de Hopf)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^N$ una bola abierta, sea $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ una subsolución, y sea $x_0 \in \partial U$ tal que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in U$. Asumimos que existe $\partial_\nu u(x_0)$, la derivada parcial de u en x_0 en la dirección ν del vector normal exterior de $\overline{U}$ en x_0. Entonces $\partial_\nu u(x_0) > 0$ si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(I) $c \equiv 0$ *en* U,

(II) $c \geq 0$ *en* U *y* $u(x_0) \geq 0$,

(III) $u(x_0) = 0$.

3.36 Nota. Es obvio de las condiciones que $\partial_\nu u(x_0) \geq 0$. El chiste es la positividad de esta derivada direccional.

Demostración. Por simplicidad asumimos $U = U_r = U_r(0)$ con $r > 0$. Cada una de las condiciones (I)–(III) implica que

$$c(x)u(x_0) \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in U. \tag{3.78}$$

Definimos para un $\lambda > 0$, que se fija mas adelante, la función

$$v(x) := \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} + \mathrm{e}^{-\lambda r^2}, \qquad x \in B_r.$$

Escribimos $|\cdot|$ por la norma euclidiana en $\mathbb{R}^N$, $A = ((a^{ij}))_{ij}$ y $d = (d^i)_i$. La condición (3.13) de la definición de elipticidad uniforme implica que

$$\begin{aligned}(L + c^-)v &= -\sum_{ij} a^{ij}\partial_i\partial_j v + \sum_i d^i\partial_i v + c^+ v \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\sum_{ij} a^{ij}(-4\lambda^2 x^i x^j + 2\lambda\delta_{ij}) - \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\sum_i d^i 2\lambda x^i + c^+(\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2} - \mathrm{e}^{-\lambda r^2}) \\ &\leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}(-4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|d|\,|x| + c^+).\end{aligned}$$

Definimos $V := U_r \backslash B_{r/2}$, un anillo abierto. Escogemos λ tan grande que

$$(L + c^-)v \leq \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}(-\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|d|r + c^+) \leq 0 \qquad \text{para todo } x \in V. \tag{3.79}$$

Como $u(x) < u(x_0)$ para $x \in U_r$, $u(x) \leq u(x_0)$ para $x \in B_r$. Además, $v(x) = 0$ para $x \in S_r = \partial B_r$. Por tanto podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \qquad \text{para todo } x \in \partial V = S_{r/2} \cup S_r. \tag{3.80}$$

Usando (3.79) obtenemos

$$(L + c^-)(u - u(x_0) + \varepsilon v) \leq L(u - u(x_0)) + (L + c^-)\varepsilon v \leq -cu(x_0) \leq 0 \qquad \text{en } V, \tag{3.81}$$

porque u es una subsolución, y por (3.78). Ésto y (3.80) implican por el Teorema 3.34 que $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$ en V. Observamos que $\nu = x_0/r$ en x_0. Con ésto calculamos

$$\begin{aligned}\partial_\nu u(x_0) = \lim_{t\to 0-} \frac{u(x_0+t\nu)-u(x_0)}{t} &\geq \lim_{t\to 0-} \frac{-\varepsilon v(x_0+t\nu)}{t} \\ &= -\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} v(x_0+t\nu) = -\varepsilon \mathrm{D}v(x_0)[x_0/r] = 2\lambda\varepsilon r \mathrm{e}^{-\lambda r^2} > 0.\end{aligned}$$

□

3.37 Teorema (Principio fuerte del máximo)**.** *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una subsolución (resp. supersolución). Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $u(z_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ (resp. $u(z_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$). Entonces u es constante si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(I) $c \equiv 0$,

(II) $c \geq 0$ *y* $u(z_0) \geq 0$ (*resp.* $u(z_0) \leq 0$),

(III) $u(z_0) = 0$.

Demostración. Tratamos el caso donde u es una subsolución. El otro se sigue reemplazando $-u$ por u.

Supongamos que se cumple una de las condiciones (I)–(III). Ponemos $M := \max_{\overline{\Omega}} u$ y

$$K := \{\, x \in \overline{\Omega} \mid u(x) = M \,\}.$$

Por la hipótesis tenemos que

$$z_0 \in K \cap \Omega \neq \varnothing. \tag{3.82}$$

Por contradicción asumimos que u no es constante, es decir que $V := \Omega \backslash K \neq \varnothing$. En seguida, existe $y_0 \in V$ tal que $r := \operatorname{dist}(y_0, K) < \operatorname{dist}(y_0, \partial\Omega)$. Tenemos que $U := U_r(y_0) \subseteq V$ y $\partial U \cap K \neq \varnothing$. Escogemos $x_0 \in \partial U \cap K$. Por tanto, $u(x_0) = M$, $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in U$, y se cumple una de las condiciones (I)–(III) del Lema 3.35. Entonces este Lema dice que $\nabla u(x_0) \neq 0$. Esto es una contradicción porque $x_0 \in \Omega$ es un máximo de u en Ω, es decir $\nabla u(x_0) = 0$. □

3.38 Lema. *Sean $p \in [1,\infty)$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado. Entonces $C^1_{\mathrm{c}}(\Omega) \subseteq W^{1,p}_0(\Omega)$.*

Demostración. Fijamos $u \in C^1_c(\Omega)$. Extendemos u a $\mathbb{R}^N$ por 0, es decir, $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$. Para $\varepsilon > 0$ definimos $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ como en la Definición 2.18. Si $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega)$, entonces $\operatorname{supp}(u_\varepsilon) \subseteq \Omega$. Como $\overline{\Omega}$ es compacto y $\partial_i u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * (\partial_i u)$, la Proposición 2.21(III) dice que

$$u_\varepsilon \to u \qquad \text{en } C^1(\overline{\Omega}) \text{ cuando } \varepsilon \to 0. \tag{3.83}$$

Para ε suficientemente chico tenemos $u_\varepsilon \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Además, (3.83) implica que $u_\varepsilon \to u$ en $H^1(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto, $u \in H^1_0(\Omega)$. □

3.39 Proposición. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que f' es acotado, $p \in [1,\infty)$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $v := f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y las derivadas débiles cumplen $\partial_i v = (f' \circ u)\partial_i u$ para todo $i \in \{1,2,\dots,N\}$. Además, si $f(0) = 0$, entonces se tiene que $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $M := \sup_{\mathbb{R}}|f'|$. Escogemos $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Usando $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|f \circ u_n - f \circ u\|_p^p = \int_\Omega |f(u_n(x)) - f(u(x))|^p \,\mathrm{d}x \le M^p \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ = M^p \|u_n - u\|_p^p \to 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$f \circ u_n \to f \circ u \qquad \text{en } L^p(\Omega) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.84}$$

Fijamos $i \in \{1,2,\dots,N\}$ y demostremos que

$$(f' \circ u_n)\partial_i u_n \to (f' \circ u)\partial_i u \qquad \text{en } L^p(\Omega) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.85}$$

Pasando a una subsucesión podemos asumir que $u_n(x) \to u(x)$ cuando $n \to \infty$, en c.t.p. $x \in \Omega$. La continuidad de f' implica que

$$|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u| \to 0 \qquad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Además,

$$|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u| \le 2M|\partial_i u| \in L^p(\Omega).$$

Por tanto, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u\|_p \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty. \tag{3.86}$$

Además, sabemos que $\partial_i u_n \to \partial_i u$ en $L^p(\Omega)$. Calculamos

$$\begin{aligned}&\|(f' \circ u_n)\partial_i u_n - (f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \le \|(f' \circ u_n)\partial_i u_n - (f' \circ u_n)\partial_i u\|_p + \|(f' \circ u_n)\partial_i u - (f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \le M\|\partial_i u_n - \partial_i u\|_p + \|(f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_i u\|_p \\ &\qquad \to 0\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por (3.86). Esto implica (3.85) por un argumento sencillo de contradicción.

Como $(f' \circ u_n)\partial_i u_n$ son las derivadas parciales clásicas de $f \circ u_n$, (3.84) y (3.85) dicen que $f \circ u_n$ es una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Esta sucesión converge a $f \circ u$, que por tanto tiene las derivadas parciales débiles $(f' \circ u)\partial_i u$. Si $f(0) = 0$, entonces $f \circ u_n \in C_c^1(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo n, usando el Lema 3.38. En seguida, $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

3.40 Proposición. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado,* $1 \le p < \infty$ *y* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Entonces* $|u|, u^\pm \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Las derivada débiles son*

$$\partial_i u^+(x) = \begin{cases} \partial_i u, & \text{si } u(x) > 0, \\ 0, & \text{si } u(x) \le 0, \end{cases} \qquad \partial_i u^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } u(x) \ge 0, \\ -\partial_i u, & \text{si } u(x) < 0, \end{cases}$$

y

$$\partial |u|(x) = \begin{cases} \partial_i u, & \text{si } u(x) > 0, \\ -\partial_i u, & \text{si } u(x) < 0, \\ 0 & \text{si } u(x) = 0. \end{cases}$$

Demostración. Primero tratamos la función u^+. Para $\varepsilon > 0$ definimos $f_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

Usando que $f_\varepsilon(t) = t^2/(\sqrt{t^2+\varepsilon^2} + \varepsilon)$ para $t > 0$ se obtiene que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y que

$$f'_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & t > 0, \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

Además, $f(0) = 0$, $|f'(t)| \le 1$, $|f(t)| \le t$ y $f_\varepsilon(t) \to \text{máx}\{t, 0\}$ cuando $\varepsilon \to 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $t > 0$ tenemos $f'_\varepsilon(t) \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Fijamos $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ y definimos

$$v(x) := \begin{cases} \partial_i u, & \text{si } u(x) > 0, \\ 0, & \text{si } u(x) \le 0. \end{cases}$$

También definimos

$$A^+ := \{ x \in \Omega \mid u(x) > 0 \}.$$

Para c.t.p. $x \in A^+$ se tiene que $|f_\varepsilon(u(x)) - u(x)| \le 2|u(x)|$ y $\text{lím}_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u(x)) \to u(x)$. Obtenemos con el teorema de convergencia dominada de Lebesgue que

$$\|f_\varepsilon \circ u - u^+\|_{L^p(\Omega)} = \|f_\varepsilon \circ u - u\|_{L^p(A^+)} \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Tenemos que $f'_\varepsilon \circ u \to 1$ en c.t.p. de A^+. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\|(f'_\varepsilon \circ u)\partial_i u - v\|_{L^p(\Omega)} = \|(f'_\varepsilon \circ u - 1)\partial_i u\|_{L^p(A^+)} \to 0 \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Por la Proposición 3.39 $(f'_\varepsilon \circ u)\partial_i u$ es la derivada parcial débil de $f_\varepsilon \circ u$. Entonces hemos probado que $f_\varepsilon \circ u \to u^+$ en $W^{1,p}(\Omega)$, y que $\partial_i u^+ = v$. Como $f_\varepsilon(0) = 0$ para $\varepsilon > 0$, la Proposición 3.39 dice que $f_\varepsilon \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo ε. Por lo tanto, $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En la misma manera se prueban los resultados respectivos para u^-. El resto es una consecuencia de $|u| = u^+ + u^-$. $\square$

3.41 Teorema. *Sean Ω de clase C^2 y L un operador elíptico de forma divergencia tal que, con un $\gamma \in (0,1]$, $a^{ij} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $b^i = 0$ y $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ los valores propios del problema*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.87}$$

Si E_1 es el espacio propio correspondiente al valor propio λ_1, entonces $\dim E_1 = 1$. *Un representante continuo $\varphi \in E_1$ no cambia del signo.*

Demostración.

Primer paso: Sin perder generalidad podemos suponer que $c \geq 0$. Para ver eso, sea $m := \min c(\overline{\Omega})$. En lugar de L uno considera el operador $L' := L - m$ con los valores propios

$$\lambda_1 - m \leq \lambda_2 - m \leq \lambda_3 - m \leq \dots$$

y las mismas funciones propias correspondientes de L.

Segundo paso: Supongamos que $c \geq 0$. Sean $E := H_0^1(\Omega)$ y $B \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$ la función bilineal asociada con L. Por la Nota 3.9 existe $C > 0$ tal que

$$B[u,u] \geq C\|u\|_E^2 \qquad \text{para todo } u \in E, \tag{3.88}$$

es decir, B es positivo definido. Como $b^i = 0$, B es simétrico. Por tanto, $B[\cdot,\cdot]$ define un nuevo producto escalar en E. Denotemos por $\|\cdot\|_B$ la norma generada por B. (3.88) y la continuidad de B (véase la Proposición 3.8) dicen que $\|\cdot\|_B$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes. Además, el Teorema 3.19 dice que $\lambda_1 > 0$.

Sea (w_k) la base Hilbertiana de $V := L^2(\Omega)$ consistiendo de funciones propias de L asociadas con los valores propios λ_k, dada por el Teorema 3.19. Notemos que $w_k \in E$ para todo k. Tenemos que

$$\|w_k\|_B^2 = B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|_V^2 = \lambda_k \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

y

$$B[w_k, w_l] = \lambda_k (w_k, w_l)_V = 0 \qquad \text{para todo } k, l \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \neq l.$$

Definiendo $z_k := w_k / \lambda_k^{1/2}$, se obtiene que (z_k) es un sistema ortonormal en E respecto al producto escalar B.

Sea $u \in [z_1, z_2, \dots]^{\perp_E}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ ésto implica que

$$0 = B[w_k, u] = \lambda_k (w_k, u)_V \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En seguida, $u = 0$, porque $\lambda_k > 0$ y (w_k) es una base Hilbertiana de V. Entonces $\overline{[z_1, z_2, \dots]}^E = E$ y el Lema 1.40 dice que (z_k) es una base Hilbertiana de E.

Tercer paso: Definimos

$$\mathcal{S} := \{\, u \in E \mid \|u\|_V = 1 \,\}.$$

Sea $u \in \mathcal{S}$. Con $d_k := (u, w_k)_V$ obtenemos

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k \quad \text{en } V \qquad \text{y} \qquad 1 = \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2. \tag{3.89}$$

Con $\mu_k := B[u, z_k]$ obtenemos

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z_k \qquad \text{en } E.$$

Por la inyección continua $E \hookrightarrow V$, esta series también converge en V. Por tanto,

$$d_k = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \mu_l z_l,\ w_k \right)_V = \sum_{l=1}^{\infty} (\mu_l z_l, w_k)_V = \mu_k (z_k, w_k)_V = \frac{\mu_k}{\lambda_k^{1/2}}.$$

Se sigue que

$$\|u\|_B^2 = B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \qquad \text{para todo } u \in \mathcal{S}. \tag{3.90}$$

Cuarto paso: Demostremos que

$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{S}} B[u, u]. \tag{3.91}$$

Sea $u \in \mathcal{S}$. (3.90) y (3.89) dicen que

$$B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1.$$

Como $B[w_1, w_1] = \lambda_1$, hemos probado (3.91).

Quinto paso: Demostremos

$$u \in \mathcal{S} \text{ es una función propia para } \lambda_1 \text{ si y sólo si } B[u, u] = \lambda_1. \tag{3.92}$$

La parte «sólo si» se sigue de la ecuación (3.87) y es trivial. Entonces sean $u \in \mathcal{S}$ y $B[u, u] = \lambda_1$. Otra vez escribiendo $d_k := (w_k, u)_V$ obtenemos con (3.89) y (3.90) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1 = B[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k.$$

En seguida,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0.$$

Como $\lambda_k \geq \lambda_1$, $d_k = 0$ para todo k tal que $\lambda_k \neq \lambda_1$, y se obtiene $u \in E_1$. Hemos probado (3.92).

Sexto paso: Sea $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ una función propia de λ_1. Por el Teorema 3.31 podemos asumir que

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

y que u es una solución clásica de la ecuación

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda_1 u, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\widetilde{L}$ es el operador de forma no divergencia asociado con L. Demostremos que u no cambia del signo.

Asumimos que $u \in \mathcal{S}$. Definimos

$$\alpha := \|u^+\|_V^2 \qquad \text{y} \qquad \beta := \|u^-\|_V^2.$$

La Proposición 3.40 implica que $u^\pm \in E$ y que $u^+u^- \equiv 0$ y $\partial_i u^+ \partial_j u^- \equiv 0$, es decir, $B[u^+, u^-] = 0$. En seguida, (3.92) y (3.91) dicen que

$$\lambda_1 = B[u,u] = B[u^+,u^+] + B[u^-,u^-] \geq \lambda_1 \|u^+\|_V^2 + \lambda_1 \|u^-\|_V^2 = (\alpha+\beta)\lambda_1 = \lambda_1.$$

Entonces ésta desigualdad es una igualdad; se obtienen $B[u^\pm, u^\pm] = \lambda_1 \|u^\pm\|_V^2$, es decir, $u^\pm$ son funciones propias de L correspondientes a λ_1, por (3.92). Otra vez ésto implica que $u^\pm \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y que

$$\begin{cases} \widetilde{L}u^\pm = \lambda_1 u^\pm \geq 0, & \text{en } \Omega, \\ u^\pm = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por ser una supersolución de $\widetilde{L}$, se puede aplicar el teorema del máximo fuerte, Teorema 3.37, y se obtiene o bien $u^+ \equiv 0$ o bien $u^+ > 0$ en Ω. Similarmente, $u^- > 0$ en Ω si $u^- \not\equiv 0$. Como u es continuo y $u \not\equiv 0$, ésto implica que $u > 0$ o $u < 0$ en Ω.

Séptimo paso: Sean $u_1, u_2 \in E_1\backslash\{0\}$. Podemos suponer que u_1, u_2 son continuos. Por lo que vimos antes, u_1 y u_2 no cambian del signo. Particularmente,

$$\int_\Omega u_1(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Por tanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega u_2(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega u_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

es decir

$$\int_\Omega (u_2(x) - \alpha u_1(x))\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.93}$$

Como también $v := u_2 - \alpha u_1 \in E_1$, v no cambia del signo. En seguida, (3.93) implica que $v = 0$, es decir, u_1 y u_2 son linealmente dependientes. Esto implica que $\dim E_1 = 1$. $\square$